Corrigé de l'épreuve de mathématiques BTS industriels Groupement C – Juin 2007

Exercice 1 *(10 points)*

Le tableau ci-dessous montre une étude statistique portant sur l'offre (z) et la demande (y) en fonction du prix unitaire (x) d'un nouveau produit mis sur le marché :

x en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y en milliers	7,8	6,1	4,7	3,7	3	2,5	2,2	2
z en milliers	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6

Partie A. Étude de la demande

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}4y = 0{,}4x - 1$

1. Résoudre sur , l'équation différentielle : $y' + 0{,}4y = 0$.

   On sait qu'une équation différentielle de la forme $ay' + by = 0$ a pour solution générale : $y = Ce^{-\frac{b}{a}x}$ où C est une constante réelle quelconque.

   Dans notre cas, la solution générale est donc : $\boxed{y = Ce^{-0{,}4x}}$. $(C \in \ )$

2. *a)* Déterminons les réels a et b pour que la fonction g, définie par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de (E)

   On a : $g'(x) = a$

   Donc, si g est solution de (E) alors, pour tout réel x : $g'(x) + 0{,}4g(x) = 0{,}4x - 1$

   Donc : $a + 0{,}4(ax + b) = 0{,}4x - 1$

   Donc : $0{,}4ax + (a + 0{,}4b) = 0{,}4x - 1$

   Donc, par identification des coefficinets : $\begin{cases} 0{,}4a = 0{,}4 \\ a + 0{,}4b = -1 \end{cases}$

   Donc : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{2}{0{,}4} = -5 \end{cases}$

   La fonction g définie sur par : $\boxed{g(x) = x - 5}$ est donc une solution particulière de (E).

   b) Résolution de (E)

   On sait que la solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant :

   - la solution générale de l'équation homogène (question 1) : $y = Ce^{-0{,}4x}$
   - une solution particulière de l'équation complète (E) (question $2a$) : $g(x) = x - 5$

   Donc la solution générale de l'équation (E) est : $\boxed{y = Ce^{-0{,}4x} + x - 5}$.

3. Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que $f(0) = 10$.

   On a : $f(x) = Ce^{-0{,}4x} + x - 5$

   Donc : $f(0) = C - 5$

   On doit donc avoir : $C - 5 = 10$

   Donc : $C = 15$.

   La fonction f qui remplit la condition initiale $f(0) = 10$ est donc définie par : $\boxed{f(x) = 15e^{-0{,}4x} + x - 5}$.

4. On pose, pour $x \in [0{,}5;4]$, $y = d(x)$ avec $d(x) = 15e^{-0{,}4x} + x - 5$.

   a) Calcul de $d'(x)$ et étude des variations de d sur l'intervalle $[0{,}5 ; 4]$

   On a, d'après les règles de calcul des dérivées : $d'(x) = 15 \times (-0{,}4)e^{-0{,}4x} + 1$

   Donc : $\boxed{d'(x) = -6e^{-0{,}4x} + 1}$.

   On en déduit : $d'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -6e^{-0{,}4x} \geq -1$

   $\Leftrightarrow e^{-0{,}4x} \leq \dfrac{1}{6}$

   $\Leftrightarrow -0{,}4x \leq \ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$

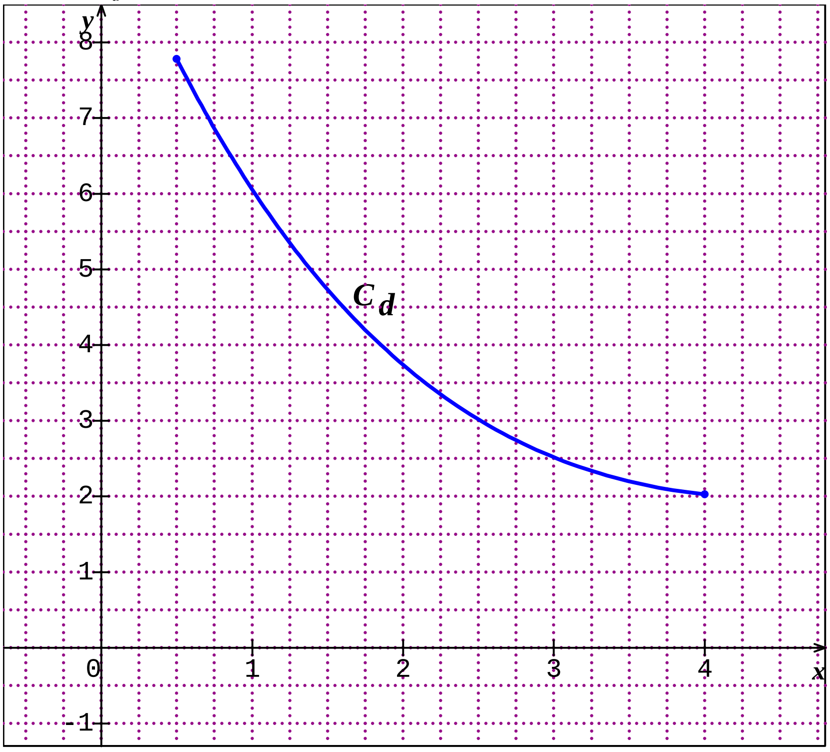
   $\Leftrightarrow -0{,}4x \leq -\ln 6$

   $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{\ln 6}{0{,}4}$ avec $\dfrac{\ln 6}{0{,}4} \approx 4{,}48$

   Donc, pour tout $x \in [0{,}5 ; 4]$, $d'(x) < 0$

   Donc $\boxed{\text{la fonction } d \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } [0{,}5 ; 4]}$.

b) Construction de la courbe C_d



Partie B. Étude de l'offre

1. *a)* Table de valeurs à compléter :

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
z	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6
$Z = e^z$	2,46	4,06	5,47	6,69	8,17	9,97	11,02	13,46

b) Équation de la droite de régression de Z en x par la méthode des moindres carrés.

On obtient à la calculatrice l'équation : $\boxed{Z = 3{,}0x + 0{,}9}$.

c) En déduire z en fonction de x.

D'après ce qui précède, on peut écrire : $e^z = 3x + 0{,}9$

On en déduit : $\boxed{z = \ln(3x + 0{,}9)}$.

2. Étude de la fonction offre définie par $h(x) = \ln(3x + 0{,}9)$ sur l'intervalle [0,5 ; 4].

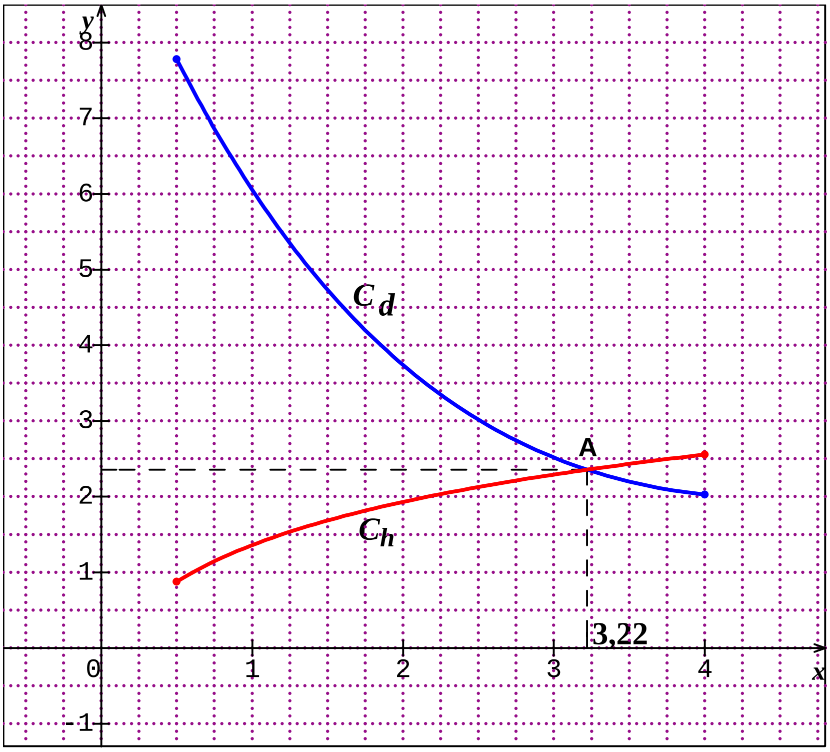
a) Calcul de $h'(x)$ et étude des variations de h.

La dérivée de h est définie sur [0,5 ; 4] par : $h'(x) = \dfrac{3}{3x + 0{,}9}$ (car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$)

On peut remarquer que, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 4], $h'(x) > 0$.

$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est donc strictement croissante sur l'intervalle } [0{,}5 ; 4]}$.

b) Construction de la courbe C_h dans le même repère que la courbe C_d.



c) Déterminer graphiquement une valeur approchée du prix de vente pour lequel la demande est égale à l'offre.

Les courbes C_d et C_h se coupent au point A d'abscisse 3,22 environ.

Donc, à 10 centimes près, le prix de vente pour lequel la demande est égale à l'offre est :

$\boxed{x \text{ ó } 3{,}20 \text{ €}}$.

Exercice 2 *(10 points)*

Partie A. Dans cette partie on s'intéresse aux stylos du modèle M_1

1. Quelle est la probabilité de prélever au hasard un style provenant de la chaîne C_1 et non-conforme ?
   Notons C_1 l'événement : "le stylo prélevé provient de la chaîne C_1"
   Notons C l'événement : "le stylo est conforme". (par conséquent $\overline{C}$ désigne l'événement "le style est non-conforme")
   D'après l'énoncé, la chaîne de production C_1 produit 40 % du stock. Donc $p(C_1) = 0{,}4$.
   On sait également que la chaîne C_1 produit 6 % de stylos non-conformes. Donc $p(\overline{C}/C_1) = 0{,}06$.
   On en déduit : $\dfrac{p(\overline{C} \cap C_1)}{p(C_1)} = 0{,}06$, ou encore : $p(\overline{C} \cap C_1) = 0{,}06 \times 0{,}4 = 0{,}024$.
   La probabilité de prélever un style provenant de la chaîne C_1 et non-conforme est donc égale à $\boxed{0{,}024}$.
2. Déterminer le pourcentage t de stylos non-conformes produits par la chaîne C_2 .
   Notons C_2 l'événement : "le stylo prélevé provient de la chaîne C_2".
   Autrement dit, on cherche $t = p(\overline{C}/C_2)$.
   On a : $p(\overline{C}) = p(\overline{C} \cap C_1) + p(\overline{C} \cap C_2)$
   Or d'après l'énoncé, la probabilité que le stylo prélevé soit non-conforme est égale à 0,09.
   Donc : $p(\overline{C} \cap C_1) + p(\overline{C} \cap C_2) = 0{,}09$.
   Donc : $0{,}024 + p(\overline{C} \cap C_2) = 0{,}09$.
   Donc : $p(\overline{C} \cap C_2) = 0{,}066$
   Donc : $p(\overline{C}/C_2) \times p(C_2) = 0{,}066$
   Donc : $t \times 0{,}6 = 0{,}066$
   Finalement : $t = \dfrac{0{,}066}{0{,}6} = 0{,}11$. $\boxed{\text{La chaîne } C_2 \text{ produit donc 11 \% de stylos non-conformes}}$.

Remarque : toute cette partie A pouvait se faire à l'aide d'un tableau de répartition :

	Stylos produits par la chaîne C_1	Stylos produits par la chaîne C_2	Total
Stylos conformes	$40\ \% - 2{,}4\ \% = 37{,}6\ \%$	$60\ \% - 6{,}6\ \% = 53{,}3\ \%$	$100\ \% - 9\ \% = 91\ \%$
Stylos non-conformes	$6\ \% \times 40\ \% = 2{,}4\ \%$	$9\ \% - 2{,}4\ \% = 6{,}6\ \%$	9 %
Total	40 %	60 %	100 %

On déduit de ce tableau que, **parmi les stylos produits par la chaîne** C_2, le pourcentage de styles non-conformes est :

$$t = \frac{6{,}6}{60} = 0{,}11 = 11\ \%.$$

Partie B. Dans cette partie, on s'intéresse aux stylos du modèle M_2

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
   L'expérience consiste à prélever 50 stylos du modèle M_2.
   On peut dire que les tirages sont indépendants car assimilés à des tirages avec remise.
   Pour chaque tirage, il y a 2 issues :
   - le style est non-conforme avec une probabilité de 0,03;
   - le style est conforme avec une probabilité de 0,97.

   La variable X qui compte le nombre de stylos non-conformes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}03$.
   Autrement dit, $\boxed{X \text{ suit la loi } \mathcal{B}(50;0{,}03)}$.

2. *a)* Quelle est la probabilité que ce lot contienne exactement 2 stylos non-conformes ?
   On peut écrire : $\boxed{p(X = 2) = C_{50}^{2} \times 0{,}03^2 \times 0{,}97^{48} \approx 0{,}256}$.

b) Quelle est la probabilité que ce lot contienne au moins 2 stylos non-conformes ?
On peut écrire : $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2)$.
Donc : $p(X \geq 2) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1))$
Donc : $p(X \geq 2) = 1 - 0{,}97^{50} - \left(50 \times 0{,}03 \times 0{,}97^{49}\right) \approx 0{,}445$.

$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait au moins 2 stylos non-conformes est égale à } 0{,}445 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

3. *a)* On approche X par une variable Y qui suit une loi de Poisson. Quel en est son paramètre ?
On sait que l'espérance d'une variable X qui suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$ est $E(X) = np$.
Donc l'espérance de la variable X est : $E(X) = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5$.
Donc $\boxed{\text{la variable } Y \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda = 1{,}5 : \mathcal{P}(1{,}5)}$.

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait 47 stylos conformes ?
S'il y a exactement 47 stylos conformes c'est que 3 stylos sont non-conformes.
Donc $p(Y = 3) = \dfrac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$.
Donc : $\boxed{p(Y = 3) = \dfrac{1{,}5^3}{6} e^{-1{,}5} \approx 0{,}126}$. (on pouvait aussi se contenter de lire le résultat dans la table de $\mathcal{P}(1{,}5)$).

Partie C. Dans cette partie, on s'intéresse aux stylos du modèle M_3.

1. *a)* Quelle est l'hypothèse nulle ? Quelle est l'hypothèse alternative ?
L'hypothèse nulle est que la moyenne est de 11 grammes : H_0 : m=11.
L'hypothèse alternative est donc : H_1 : m $\neq$ 11.

b) Déterminer le réel h tel que : $p\left(11 - h \leq \bar{X} \leq 11 + h\right) = 0{,}9$.
On sait que, sous l'hypothèse H_0, $\bar{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(11 ; 0{,}4)$.
On a l'équivalence : $p\left(11 - h \leq \bar{X} \leq 11 + h\right) = 0{,}9 \iff p\left(-\dfrac{h}{0{,}4} \leq \dfrac{\bar{X} - 11}{0{,}4} \leq \dfrac{h}{0{,}4}\right) = 0{,}9$.
Or la variable $\dfrac{\bar{X} - 11}{0{,}4}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.
On peut donc utiliser la table Π de cette loi : $p\left(11 - h \leq \bar{X} \leq 11 + h\right) = 0{,}9$

$$\iff \Pi\left(\frac{h}{0{,}4}\right) - \Pi\left(-\frac{h}{0{,}4}\right) = 0{,}9$$
$$\iff \Pi\left(\frac{h}{0{,}4}\right) - \left(1 - \Pi\left(\frac{h}{0{,}4}\right)\right) = 0{,}9$$
$$\iff 2\Pi\left(\frac{h}{0{,}4}\right) - 1 = 0{,}9$$
$$\iff \Pi\left(\frac{h}{0{,}4}\right) = 0{,}95$$
$$\iff \frac{h}{0{,}4} = 1{,}645$$
$$\iff \boxed{h = 0{,}658}.$$

c) Règle de décision permettant d'utiliser ce test ?
D'après ce qui précède, au risque de 10 %, la moyenne des masses des stylos d'un échantillon de taille 100, doit appartenir à l'intervalle $[11 - h ; 11 + h]$ c'est-à-dire [10,342 ; 11,658].
Donc :

- si, pour un échantilon donné de taille 100, la moyenne des masses appartient à cet intervalle, on accepte l'hypothèse H_0 au risque de 10 % et on rejette l'hypothèse H_1.
- si la moyenne des masses est dans la zone critique (à l'extérieur de l'intervalle), alors on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse H_1.

2. Que peut-on conclure pour un échantillon de taille 100 dont la moyenne observée est de 10,6 grammes ?
$10{,}6 \in [10{,}342 ; 11{,}658]$
Donc d'après ce qui précède, on accepte l'hypothèse H_0 et on peut dire que $\boxed{\text{le stock est conforme}}$.