

Corrigé de l'épreuve de mathématiques BTS industriels Groupement C – Juin 2006

Exercice 1 (10 points)

Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y suivante : $y'' - 4y' + 3y = -3x - 2$.

Partie A

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$. (E') C'est l'équation homogène associée à l'équation (E) .

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 3 = 0$

Ses racines (apparentes) sont : $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.

Donc la solution générale de l'équation différentielle (E') est : $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

2. a) Déterminer a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit une solution de (E)

$$\text{On a, pour tout réel } x : \begin{cases} g'(x) = a \\ g''(x) = 0 \end{cases}$$

Donc, si g est une solution de (E) alors : $g'' - 4g' + 3g = -3x - 2$

$$\text{Donc : } 0 - 4(a) + 3(ax + b) = -3x - 2$$

$$\text{Donc : } 3ax + (3b - 4a) = -3x - 2$$

$$\text{On en déduit le système : } \begin{cases} 3a = -3 \\ -4a + 3b = -2 \end{cases}$$

$$\text{finalement : } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

La fonction g , solution de (E) , est donc définie par : $g(x) = -x - 2$.

- b) Résoudre l'équation (E) .

On sait que la solution générale de l'équation différentielle (E) est égale à la solution générale de l'équation (E') à laquelle on ajoute la solution particulière g :

Donc la solution générale de (E) est : $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x - 2$.

3. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie les conditions $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f''(0) = 9 \end{cases}$

$$\text{On a : } f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x - 2 \quad \text{donc} \quad f(0) = C_1 + C_2 - 2$$

$$\text{Par ailleurs : } f'(x) = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} - 1$$

$$\text{et : } f''(x) = C_1 e^x + 9C_2 e^{3x} \quad \text{donc} \quad f''(0) = C_1 + 9C_2$$

$$\text{On a les équivalences suivantes : } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f''(0) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 - 2 = -1 \\ C_1 + 9C_2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 9C_2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

On en déduit la solution cherchée : $f(x) = e^{3x} - x - 2$.

Partie B Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{3x} - x - 2$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 2) = +\infty \end{cases} \quad \text{donc, par addition : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Calcul de la limite de f en $+\infty$.

On ne peut pas utiliser les théorèmes généraux sur les limites pour déterminer la limite de f en $+\infty$ (forme indéterminée)

$$\text{On peut remarquer que, pour tout réel } x \neq 0, \quad f(x) = x \left(\frac{e^{3x}}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right)$$

$$\text{Or, on sait que : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ donc, à plus forte raison : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty.$$

$$\text{De même on peut dire que : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 - \frac{2}{x} \right) = -1$$

Donc, d'après les théorèmes sur les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Étude des variations de f .

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est définie par : $f'(x) = 3e^{3x} - 1$.

On a les équivalences : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3e^{3x} \geq 1$
 $\Leftrightarrow e^{3x} \geq \frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow 3x \geq \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
 $\Leftrightarrow 3x \geq -\ln 3$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{-\ln 3}{3}$ avec $\frac{-\ln 3}{3} \approx -0,366$

On en déduit que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{-\ln 3}{3}]$ et strictement croissante sur $[\frac{-\ln 3}{3} ; +\infty[$.

x	$-\infty$	$\frac{-\ln 3}{3}$	$+\infty$
signe de f'		-	0
f	$+\infty$	$\frac{\ln 3 - 5}{3}$	$+\infty$

La fonction f admet un minimum pour $x = \frac{-\ln 3}{3}$ et : $f\left(\frac{-\ln 3}{3}\right) = \frac{\ln 3 - 5}{3} \approx -1,3$.

4. Asymptote oblique.

On a, pour tout réel x : $f(x) - (-x - 2) = e^{3x}$

Or on a vu à la première question que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 2)) = 0$

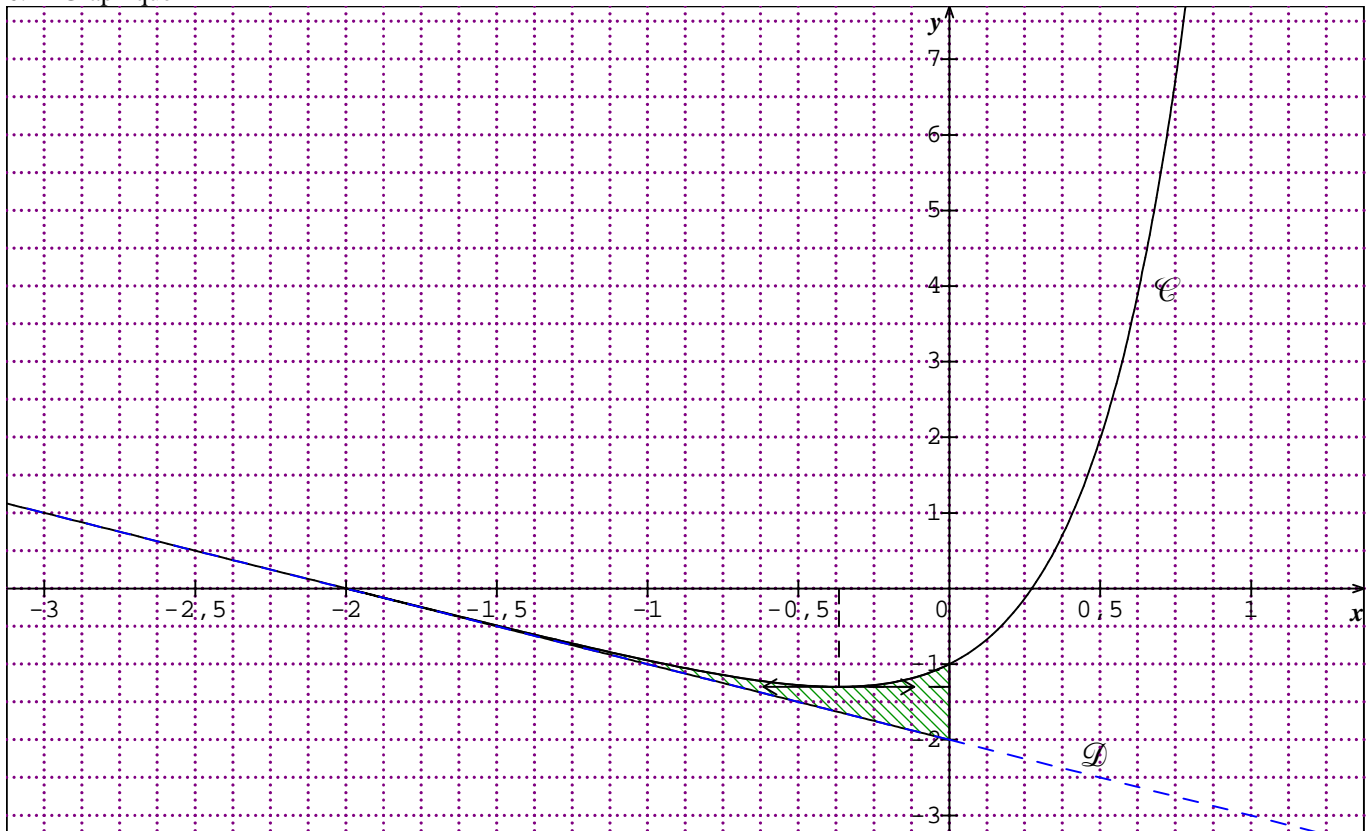
Donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = -x - 2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} représentative de f au voisinage de $-\infty$.

5. Positions relatives de \mathcal{C} et de \mathcal{D} .

On sait que, pour tout réel x : $f(x) - (-x - 2) = e^{3x}$ et que $e^{3x} > 0$

Donc la courbe \mathcal{C} est entièrement située au-dessus de la droite \mathcal{D} .

6. Graphique



Partie C Calcul d'aire

Nous savons que, sur l'intervalle $[-2; 0]$, la courbe \mathcal{C} est au-dessus de la droite \mathcal{D} .

Donc l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^0 [f(x) - (-x-2)] dx \quad (\text{en unités d'aire})$$

Or on a : $f(x) - (-x-2) = e^{3x}$

Donc :
$$\mathcal{A} = \int_{-2}^0 e^{3x} dx \quad (\text{en unités d'aire})$$

Donc :
$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_{-2}^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-6} \quad (\text{en unités d'aire})$$

Or l'unité d'aire vaut 4 cm^2 .

Donc
$$\mathcal{A} = \frac{4}{3} (1 - e^{-6}) \approx 1,33 \text{ cm}^2.$$

Exercice 2 (10 points)

Partie A

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(14; 0,1)$.

Donc, la variable aléatoire T définie par $T = \frac{X-14}{0,1}$, suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

On a donc :
$$p(13,7 \leq X \leq 14,2) = p\left(\frac{13,7-14}{0,1} \leq T \leq \frac{14,2-14}{0,1}\right)$$

donc :
$$p(13,7 \leq X \leq 14,2) = p(-3 \leq T \leq 2)$$

donc :
$$p(13,7 \leq X \leq 14,2) = \Pi(2) - \Pi(-3)$$

donc :
$$p(13,7 \leq X \leq 14,2) = \Pi(2) - (1 - \Pi(3)) = \Pi(2) + \Pi(3) - 1$$

donc, d'après la table de la fonction intégrale de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$:

$$p(13,7 \leq X \leq 14,2) \approx 0,9772 + 0,99865 - 1 \approx 0,97585.$$

La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est donc :
$$p(13,7 \leq X \leq 14,2) \approx 0,976.$$

Partie B

1. Quelle est la loi suivie par Y ?

Le choix d'une pièce prélevée au hasard est une épreuve de Bernoulli dans laquelle :

- la probabilité d'un «succès» (la pièce est non conforme) est $p = 0,024$
- la probabilité d'un «échec» (la pièce est conforme) est $1 - p = 0,976$

Le prélèvement de 100 pièces étant assimilé à un tirage avec remise, on peut considérer qu'il s'agit d'une répétition de 100 épreuves de Bernoulli indépendantes.

La variable Y suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,024)$.

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces non conformes dans un lot de 100 pièces ?

Cette probabilité peut s'écrire :
$$p(Y \geq 3) = 1 - p(Y < 3) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) - p(Y = 2)$$

Or
$$p(Y = k) = \binom{100}{k} \times 0,024^k \times 0,976^{100-k}$$

Donc :
$$p(Y = 0) = 0,976^{100} \approx 0,0881$$

$$p(Y = 1) = 100 \times 0,024 \times 0,976^{99} \approx 0,2166$$

$$p(Y = 2) = 4950 \times 0,024^2 \times 0,976^{98} \approx 0,2637$$

On en déduit :
$$p(Y \geq 3) \approx 1 - 0,0881 - 0,2166 - 0,2637 \approx 0,4316$$

La probabilité qu'il y ait au moins trois pièces non conformes dans un lot de 100 pièces est donc
$$p \approx 0,432.$$

3. a) La variable Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,024)$.

Son espérance mathématique est donc $E(Y) = 100 \times 0,024 = 2,4$.

On sait que, sous certaines conditions, une variable aléatoire qui suit une loi binomiale d'espérance λ peut être approchée par une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Donc la variable Y peut être approchée par la variable Z qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(2,4)$.

b) En utilisant la variable Z , donner une estimation de la probabilité d'avoir exactement 3 pièces non conformes.

Cette estimation est donnée par :
$$p(Z = 3) = \frac{e^{-2,4} \times 2,4^3}{3!} \approx 0,209$$
.

(un calcul direct de $p(Y = 3)$ donne 0,212 environ).

Partie C

La variable \bar{R} qui donne la résistance mécanique moyenne d'un échantillon de 50 pièces suit la loi $\mathcal{N}\left(r; \frac{1}{\sqrt{50}}\right)$.

On construit un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1 % pour savoir si la résistance mécanique moyenne est égale à 10.

1. Donner l'hypothèse H_0 .

L'hypothèse nulle est $H_0 : \boxed{r = 10}$.

2. Sous l'hypothèse nulle H_0 , la loi suivie par \bar{R} est $\mathcal{N}\left(10; \frac{1}{\sqrt{50}}\right)$.

3. Calcul de h tel que $p(\bar{R} \leq 10 + h) = 0,99$.

La variable \bar{R}^* définie par $\bar{R}^* = \frac{\bar{R} - 10}{\frac{1}{\sqrt{50}}}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

On a donc :
$$p(\bar{R} \leq 10 + h) = 0,99 \Leftrightarrow p\left(\bar{R}^* \leq \frac{h}{\frac{1}{\sqrt{50}}}\right) = 0,99$$

On en déduit, par lecture inverse de la table de la fonction intégrale de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$:

$$\frac{h}{\frac{1}{\sqrt{50}}} \approx 2,34$$

Donc :
$$h \approx \frac{2,34}{\sqrt{50}} \approx 0,331$$
.

Ce réel permet de définir la zone critique : $[10 + 0,331; +\infty[= [10,331; +\infty[$. La zone "critique", ici, correspond en réalité à la zone d'acceptabilité (la résistance mécanique est supérieure au seuil critique).

4. Règle de décision du test :

- si, dans un échantillon donné de 50 pièces, la moyenne calculée n'est pas dans la zone critique, on accepte l'hypothèse nulle H_0 et on rejette l'hypothèse alternative H_1 : les jouets ne sont pas considérés comme suffisamment solides au risque de 1 %
- si, dans un échantillon donné de 50 pièces, la moyenne calculée se trouve dans la zone critique, alors l'hypothèse nulle est rejetée et les jouets sont considérés comme suffisamment solides au seuil de 1 % de risque.

5. a) Calcul de la moyenne r_e et de l'écart type σ_e d'un échantillon.

Les calculs effectués à la machine donnent : $\boxed{r_e = 10,38}$ et $\boxed{\sigma_e \approx 1,04}$.

b) D'après cet échantillon, au seuil de risque de 1 %, les jouets sont-ils assez solides ?

On remarque que la moyenne calculée est située dans la zone critique.

Donc, d'après la règle de décision du test, on peut dire que :

les jouets produits par cette entreprise sont assez solides.