BTS Groupement C - Corrigé de juin 2005

Exercice 1

Partie A Résolution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x$

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$
   On sait qu'une équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$ a pour solution : $y = Ce^{-ax}$
   Donc, la solution générale de l'équation (E') est : $\boxed{y = Ce^{2x}}$ où C est une constante réelle quelconque.

2. Recherche de la solution particulière g de (E) de la forme $g(x) = ax + b$
   On a : $g'(x) = a$
   Donc, si g est une solution de (E) alors : $g' - 2g = 4x$
   Donc : $a - 2(ax + b) = 4x$
   Donc : $-2ax + (a - 2b) = 4x$
   On en déduit le sytème : $\begin{cases} -2a = 4 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$
   Finalement : $\boxed{\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}}$
   La fonction g défiie sur par : $g(x) = -2x - 1$ est donc une solution particulière de (E).

3. *a)* Résoudre l'équation différentielle (E).
   La solution générale de (E) s'obtient en additionnant la solution générale de (E') et la solution particulière g de (E) :
   $$\boxed{y = Ce^{2x} - 2x - 1}.$$

   b) Recherche de la solution f satisfaisant la condition initiale $f(0) = 0$.
   On a $f(x) = Ce^{2x} - 2x - 1$
   Donc $f(0) = C - 1$
   Donc la condition $f(0) = 0$ est satisfaite si et seulement si : $C = 1$.
   Donc la solution cherchée est la fonction f définie sur par : $\boxed{f(x) = e^{2x} - 2x - 1}$.

Partie B Étude de la fonction f définie sur par : $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

1. *a)* Limite en $-\infty$.
   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.
   Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 1) = +\infty$
   Donc, par addition : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

   b) Limite en $+\infty$.
   On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x - 1) = -\infty$,
   ce qui conduit à une forme indéterminée pour la somme.
   Or, on peut écrire, pour tout réel x : $f(x) = 2x\left(\dfrac{e^{2x}}{2x} - 1 - \dfrac{1}{2x}\right)$
   On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{2x} = +\infty$
   Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^{2x}}{2x} - 1 - \dfrac{1}{2x}\right) = +\infty$
   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

2. Calcul de $f'(x)$, étude des variations de f et du signe de $f(x)$.
   On a pour tout réel x : $f'(x) = 2e^{2x} - 2$.
   Donc : $f'(x) \geqslant 0 \iff 2e^{2x} - 2 \geqslant 0$
   $\iff e^{2x} \geqslant 1$

ñ $2x$ Ã 0

ñ x Ã 0.

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle [0 ; + õ[et décroissante sur l'intervalle]- õ ; 0].
Elle admet un minimum égal à 0 en 0 :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de f'	-	0	+
f	+ õ ↘	0	↗ + õ

Puisque f a un minimum égal à 0 en 0, on en déduit que la fonction f est positive sur .

Partie C Construction de la courbe et calcul d'aire

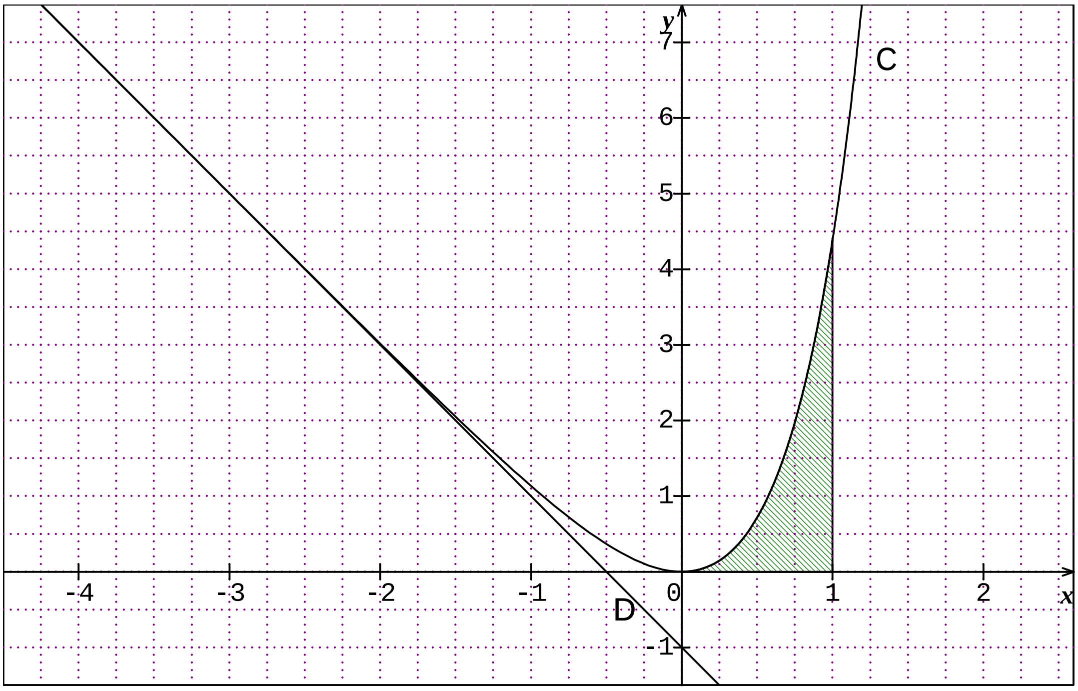
1. Montrer que la droite D d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à C au voisinage de $-$ õ.

En effet, on sait que : $\lim\limits_{x \leftrightarrow -\text{õ}} e^{2x} = 0$ or $f(x) - (-2x - 1) = e^{2x}$

Donc : $\lim\limits_{x \leftrightarrow -\text{õ}} (f(x) - (-2x - 1)) = 0$

Donc la droite D est bien asymptote à la courbe C au voisinage de $-$ õ.

2. Construction de la courbe C et de son asymptote D.



3. Calcul d'aire.

La fonction f étant positive sur , on peut dire que l'aire du domaine compris entre l'axe Ox, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est fonnée par l'intégrale : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (en unités d'aire)

Or l'unité d'aire vaut 2 cm^2.

Donc : $A = 2 \times \int_0^1 \left(e^{2x} - 2x - 1\right)\mathrm{d}x$ cm^2

Donc : $A = 2 \times \left[\frac{e^{2x}}{2} - x^2 - x\right]_0^1$ cm^2

Donc : $A = 2 \times \left(\frac{e^2}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2}\right)$ cm^2

Finalement : $\boxed{A = e^2 - 5 \text{ ó } 2{,}39 \text{ cm}^2}$.

Exercice 2

Partie A

La répartition de la production des axes de moteurs électriques peut s'observer dans le tableau :

	Machine E	Machine F	Machine G	Total
Axes défectueux	$1{,}5\%\times 25\%$ soit 0,375 %	$2{,}5\%\times 35\%$ soit 0,875 %	$3\%\times 40\%$ soit 1,2%	2,45 %
Axes conformes	24,625 %	34,125 %	38,8 %	97,55 %
Total	25 %	35 %	40 %	100 %

D'après le tableau ci-dessus, 2,45 % des axes sont défectueux (sur l'ensemble de la production)

Donc la probabilité de prélever au hasard un axe défectueux est : $\boxed{p = 0{,}0245}$.

Remarque : en utilisant les probabilités conditionnelles, si on note E, F, G et D les événements :

E :" l'axe provient de la machine E"

F :"l'axe provient de la machine F"

G :"l'axe provient de la machine G"

D :"l'axe est défectueux"

On a ,d'après l'énoncé : $p(E)=0{,}25$ $p(F)=0{,}35$ $p(G)=0{,}4$

Par ailleurs : $p(D/E)=0{,}015$ $p(D/F)=0{,}025$ $p(D/G)=0{,}03$

Donc : $p(D)=p(D\cap E) + p(D\cap F) + p(D\cap G)$

Donc : $p(D)=p(D/E)\times p(E) + p(D/F)\times p(F) + p(D/G)\times p(G)$

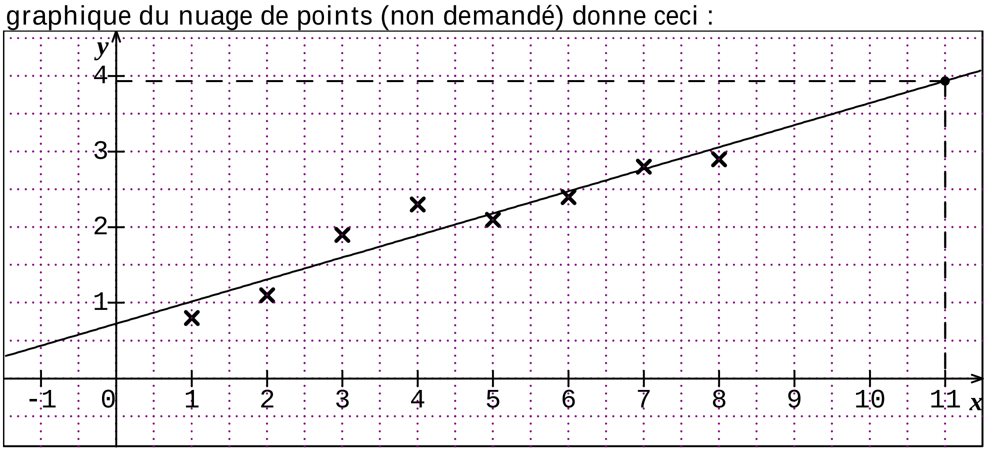
Donc : $p(D)=0{,}015\times 0{,}25 + 0{,}025\times 0{,}35 + 0{,}03\times 0{,}4$

On retrouve bien : $p(D)=0{,}0245$

Partie B Production de la machine E qui se dégrade au fil des jours

Jours x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentages d'axes défectueux y_i	0,8	1,1	1,9	2,3	2,1	2,4	2,8	2,9

1. Équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
   Les calculs fournis par la calculatrice donnent l'équation : $\boxed{y ó 0{,}292x + 0{,}725}$ (avec un coefficient de corrélation de 0,95)
   L'ajustement graphique du nuage de points (non demandé) donne ceci :



2. Quel pourcentage d'axes défectueux peut-on prévoir le 11e jour ?
   En remplaçant x par 11 dans l'équation précédente, on obtient y ó 3,933.
   Donc, à 0,1% près, <u>le pourcentage d'axe défectueux auquel on peut s'attendre le 11e jour est 3,9 %</u>

Partie C Production de la machine F

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   On peut dire que le prélèvement de 50 axes conduit à un schéma de Bernoulli :
   - Chaque prélèvement d'un axe est indépendant (tirages assimilés à des tirages avec remise).

- chaque prélèvement est une épreuve à 2 issues :
  - l'axe est défectueux avec une probabilité de 0,025
  - l'axe est conforme avec une probabilité de 0,975

Donc, la variable aléatoire Y qui compte le nombre d'axes défectueux, suit la loi binomiale : $\boxed{B(50\,;0{,}025)}$

2. Quelle est la probabilité que le lot contienne exactement 2 axes défectueux ?

   On a : $\boxed{p(Y=2)=C_{50}^{2}\times 0{,}025^{2}\times 0{,}975^{48}\approx 0{,}227}$.

Partie D Test bilatéral sur la production de la machine G

1. *a)* Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?

   L'hypothèse nulle est que la moyenne m des longueurs est égale à 350 mm : $H_0 : m = 350$

   L'hypothèse alternative est l'hypothèse contraire : $H_1 : m \neq 350$

   b) Déterminer le réel h tel que $p\left(350-h \leq \bar{X} \leq 350+h\right)=0{,}95$.

   On sait que la variable $\bar{X}$ suit la loi normale $N(350\,;0{,}5)$.

   Posons $\bar{X}' = \dfrac{\bar{X}-350}{0{,}5}$. On sait qu'alors $\bar{X}'$ suit la loi normale centrée réduite N(0 ; 1)

   On peut alors écrire :

$$
\begin{aligned}
p\left(350-h \leq \bar{X} \leq 350+h\right)=0{,}95 &\iff p\left(-\frac{h}{0{,}5} \leq \bar{X}' \leq \frac{h}{0{,}5}\right)=0{,}95\\
&\iff \Pi\left(\frac{h}{0{,}5}\right)-\Pi\left(-\frac{h}{0{,}5}\right)=0{,}95\\
&\iff \Pi\left(\frac{h}{0{,}5}\right)-\left(1-\Pi\left(\frac{h}{0{,}5}\right)\right)=0{,}95\\
&\iff 2\Pi\left(\frac{h}{0{,}5}\right)-1=0{,}95\\
&\iff \Pi\left(\frac{h}{0{,}5}\right)=0{,}975
\end{aligned}
$$

   Par lecture de la table de Π, on obtient : $\dfrac{h}{0.5}\approx 1{,}96$

   Donc : $\boxed{h\approx 0{,}98}$.

   On en déduit l'intervalle de confiance à 95 % de niveau de confiance : $[350-0{,}98\,;350+0{,}98]$

   Soit encore : [349,02 ; 350,98]

   c) Règle de décision à l'issue du test :

   Si, dans un échantillon de 100 pièces, la moyenne des longueurs observées est dans l'intervalle de confiance à 95% de confiance [349,02 ; 350,98], alors on accepte, au risque de 5% l'hypothèse H_0.

   Si cette moyenne se trouve dans la zone critique (hors de l'intervalle de confiance) alors on rejette H_0 et on accepte l'hypothèse H_1.

2. Utilisation du test.

   La moyenne observée est de 349 mm. Elle se situe dans la zone critique. Donc on rejette l'hypothèse nulle H_0 et <u>on peut conclure au risque de 5% que la machine *G* est déréglée</u>.