Exercice 1 (*11 points*)

1. *a)* Quel est, pour l'échantillon (E), le pourcentage de boules non-conformes ?
Les boules non-conformes sont celles dont le diamètre d vérifie $d < 72{,}7$ ou $d > 73{,}3$.
Elles correspondent donc aux deux classes extrêmes de l'échantillon, soit 4 boules au total.
L'échantillon contient 50 boules, donc le pourcentage de boules non-conformes est $\boxed{8\ \%}$.

b) Calcul de la moyenne et de l'écart type de l'échantillon.
La calculatrice permet d'obtenir directement ces résultats :

On obtient donc : $\boxed{\text{moyenne} = \bar{x} \approx 72{,}96}$ $\boxed{\text{écart type} = \sigma \approx 0{,}19}$.

2. *a)* Préciser et justifier la loi de probabilité suivie par X
Un lot est assimilable à un tirage au hasard avec remise de 50 boules.
Chacun des 50 tirages est donc indépendant.
Pour chaque tirage, il y a 2 issues :
- la boule n'est pas conforme (probabilité $p = 0{,}12$)
- la boule est conforme.

Donc la loi suivie par X est la loi binomiale de paramètres 50 et 0,12 : $\boxed{B(50\,;0{,}12)}$.

b) On approche cette loi par une loi de Poisson.
b_1) Quel est le paramètre de cette loi ?
Une loi binomiale $B(n,p)$ a pour espérance np.
Donc la loi suivie par X a pour espérance $50\times 0{,}12 = 6$.
Donc la loi de X peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$: $\boxed{P(6)}$.

b_2) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 5 boules non-conformes ?
Si on utilise la loi $P(6)$, on a :
$p(X > 5) = 1 - p(X \leqslant 5)$
$\boxed{p(X > 5) = 1 - \left(1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!} + \frac{6^5}{5!}\right)e^{-6} \approx 0{,}55}$.

3. *a)* Calculer la probabilité que la boule soit conforme
La variable D , qui donne le diamètre d'une boule, suit la loi normale $N(73\,;0{,}2)$
Si on pose $T = \dfrac{D-73}{0{,}2}$, alors on sait que la variable T suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$

Dans ces conditions, on a : $p(72{,}7 \leqslant D \leqslant 73{,}3) = p\left(-\frac{0{,}3}{0{,}2} \leqslant T \leqslant \frac{0{,}3}{0{,}2}\right)$
Donc : $p(72{,}7 \leqslant D \leqslant 73{,}3) = p(-1{,}5 \leqslant T \leqslant 1{,}5)$
Donc : $p(72{,}7 \leqslant D \leqslant 73{,}3) = 2\Pi(1{,}5) - 1$
Donc, par lecture de la table de Π : $\boxed{p(72{,}7 \leqslant D \leqslant 73{,}3) = 2\times 0{,}9332 - 1 \approx 0{,}866}$.

b) Quelle valeur devrait prendre σ pour que la probabilité d'obtenir une boule non conforme soit 0,1 ?
Cela équivaut à déterminer σ pour que l'on ait : $p(72{,}7 \leqslant D \leqslant 73{,}3) = 0{,}9$.
La variable D suit maintenant la loi $N(73\,;\sigma)$
En posant maintenant $T = \dfrac{D-73}{\sigma}$, les calculs donnent :

$p(72{,}7 \leqslant D \leqslant 73{,}3) = 0{,}9 \iff p\left(-\frac{0{,}3}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{0{,}3}{\sigma}\right) = 0{,}9$

$p(72{,}7 \text{ Â } D \text{ Â } 73{,}3) = 0{,}9$ ñ $2\Pi\left(\dfrac{0{,}3}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}9$

$p(72{,}7 \text{ Â } D \text{ Â } 73{,}3) = 0{,}9$ ñ $\Pi\left(\dfrac{0{,}3}{\sigma}\right) = 0{,}95$

$p(72{,}7 \text{ Â } D \text{ Â } 73{,}3) = 0{,}9$ ñ $\dfrac{0{,}3}{\sigma} \text{ ó } 1{,}75$

$p(72{,}7 \text{ Â } D \text{ Â } 73{,}3) = 0{,}9$ ñ $\boxed{\sigma \text{ ó } 0{,}171}$.

4. Construction d'un test d'hypothèse unilatéral au risque de 5 %
L'hypothèse nulle est $H_0 : m = 73$
L'hypothèse alternative est $H_1 : m < 73$.
La variable de test, $\grave{D}$, qui mesure le diamètre moyen sur un échantillon de 50 boules prélevées au hasard, suit la loi normale $N\left(73\,;\, \dfrac{0{,}2}{\sqrt{50}}\right)$

a) Calcul du réel a tel que $p\left(\grave{D} \text{ Ã } 73 - a\right) = 0{,}95$
Si on pose $\grave{T} = \dfrac{\grave{D} - 73}{\frac{0{,}2}{\sqrt{50}}}$, alors on peut dire que $\grave{T}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$

On a alors les équivalences : $p\left(\grave{D} \text{ Ã } 73 - a\right) = 0{,}95$ ñ $p\left(\grave{T} \text{ Ã } - \dfrac{a}{\frac{0{,}2}{\sqrt{50}}}\right) = 0{,}95$

ñ $p\left(\grave{T} \text{ Â } \dfrac{a}{\frac{0{,}2}{\sqrt{50}}}\right) = 0{,}95$

ñ $\Pi\left(\dfrac{a}{\frac{0{,}2}{\sqrt{50}}}\right) = 0{,}95$

ñ $\dfrac{a}{\frac{0{,}2}{\sqrt{50}}} = 1{,}75$

ñ $a = 1{,}75 \times \dfrac{0{,}2}{\sqrt{50}} \text{ ó } 0{,}05$

b) Règle de décision du test :
D'après ce qui précède, la zone d'acceptabilité du test est l'intervalle [72,95 ; + õ[.
Si, dans un échantillon de taille 50, la moyenne des diamètre est supérieure à 72,95, alors on accepte l'hypothèse nulle H_0 et on rejette l'hypothèse alternative H_1.
Si le diamètre moyen des boules de l'échantillon est dans la zone critique [0 ; 72,95], alors on accepte H_1 et on rejette H_0.

c) Conclusion
Dans l'échantillon (E), le diamètre moyen des boules est 72,96. Il se situe donc hors de la zone critique.
On en conclut que, au risque de 5%, le diamètre des boules est bien de 73 mm.

Exercice 2 *(9 points)*

Partie A

1. Résoudre dans l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$
L'équation caractéristique associée est : $5r^2 + 6r + 1 = 0$
Son discriminant est positif et ses solutions réelles sont : $r_1 = -1$ et $r_2 = -0{,}2$
Donc la solution générale de l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$ est :

$\boxed{z = Ae^{-t} + Be^{-0{,}2t}}$ où A et B sont 2 constantes réelles quelconques.

2. Recherche d'une solution particulière constante de (E).
Une solution particulière, constante, de (E) : $5z'' + 6z' + z = 2$ est : $\boxed{z_0 = 2}$.
On sait qu'alors, on obtient la solution générale de l'équation complète en ajoutant cette solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre.
On en déduit que la solution générale de (E) est : $\boxed{z = Ae^{-t} + Be^{-0{,}2t} + 2}$.

3. Recherche de la solution g de (E) qui remplit les conditions particulières $g(0) = 5$ et $g'(0) = -1$.
On a : $g(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-0,2t} + 2$.
Donc : $g'(t) = -A\mathrm{e}^{-t} - 0,2B\mathrm{e}^{-0,2t}$

Les conditions initiales se traduisent donc par le système : $\begin{cases} A\mathrm{e}^0 + B\mathrm{e}^0 + 2 = 5 \\ -A\mathrm{e}^0 - 0,2B\mathrm{e}^0 = -1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} A + B = 3 \\ -A - 0,2B = -1 \end{cases}$

Par addition membre à membre, on déduit : $0,8B = 2$ d'où $B = 2,5$
En reportant ce résultat dans la première équation : $A + 2,5 = 3$ d'où $A = 0,5$.
La solution cherchée est donc définie sur par : $\boxed{g(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t} + 2}$.

Partie B Étude de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = g(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t} + 2$.

1. Étude des variations de f.
La fonction f est dérivable sur et sa dérivée est définie par : $f'(t) = -0,5\mathrm{e}^{-t} - 0,2 \times 2,5\mathrm{e}^{-0,2t}$
On en déduit, que pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$, $f'(t) < 0$.
Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$

Donc, d'après les règles de calcul des limites : $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2}$.

3. En déduire l'évolution de la cote du poit G en fonction du temps.
D'après ce qu'on sait, à l'intant 0, la cote du point G est égale à 5 (l'énoncé ne dit pas s'il s'agit de mètres) et le point G descend avec une vitesse initiale de 1 ($\mathrm{m.s^{-1}}$?).
Ensuite la cote décroît continuellement vers la cote limite de 2.

4. Asymptote à C.
Nous savons que : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2$. Donc la droite d'équation $z = 2$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$
(Voir le tracé ci-après)

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $h(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t}$
Une primitive de h est la fonction H définie par : $H(t) = -0,5\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{2,5}{0,2}\mathrm{e}^{-0,2t}$
ou encore : $H(t) = -0,5\mathrm{e}^{-t} - 12,5\mathrm{e}^{-0,2t}$

2. *a)* Calcul de $\displaystyle\int_1^5 (f(t) - 2)\,\mathrm{d}t$.
On a, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f(t) - 2 = h(t)$
Donc $\displaystyle\int_1^5 (f(t)-2)\,\mathrm{d}t = \int_1^5 h(t)\,\mathrm{d}t = H(5) - H(1)$
Donc $\displaystyle\int_1^5 (f(t)-2)\,\mathrm{d}t = \left(-0,5\mathrm{e}^{-5} - 12,5\mathrm{e}^{-1}\right) - \left(-0,5\mathrm{e}^{-1} - 12,5\mathrm{e}^{-0,2}\right)$
Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^5 (f(t)-2)\,\mathrm{d}t = 12,5\mathrm{e}^{-0,2} - 12\mathrm{e}^{-1} - 0,5\mathrm{e}^{-5} \approx 5,82}$.

b) Interprétation géométrique
L'intégrale précédente correspond à l'aire du domaine plan délimité par la courbe C et son asymptote d'équation $z = 2$, hachurée ci-contre.