BTS Groupement C - Corrigé de juin 2003

Exercice 1 *(10 points)*

D'après l'énoncé, la répartition des roulements, selon leur provenance et selon leur qualité, est la suivante :

On notera les événements :

R : "le roulement vient de Reims"
U : "le roulement est utilisable"

	Provenant de Reims	Provenant de Nancy	Total
Roulements utilisables	$40\% \times 95{,}5\%$ $= 38{,}2\%$	$60\% \times 98\%$ $= 58{,}8\%$	97%
Roulements non utilisables	$40\% \times 4{,}5\%$ $= 1{,}8\%$	$60\% \times 2\%$ $= 1{,}2\%$	3%
Total	40%	60%	100%

Partie A

1. On prélève au hasard un roulement dans le stock.
   a) Quelle est la probabilité qu'il soit utilisable sachant qu'il provient de Reims.
   D'après l'énoncé, 4,5% de la production de Reims est inutilisable : $p\left(\overline{U}/R\right) = 4{,}5\% = 0{,}045$
   On en déduit que 95,5% de la production de Reims est utilisable : $\boxed{p\left(U/R\right) = 1 - p\left(\overline{U}/R\right) = 0{,}955}$
   b) Quelle est la probabilité qu'il soit utilisable sachant qu'il provient de Nancy.
   D'après l'énoncé, *2*% de la production de Nancy est inutilisable : $p\left(\overline{U}/\overline{R}\right) = 2\% = 0{,}02$
   On en déduit que 98% de la production de Nancy est utilisable : $\boxed{p\left(U/\overline{R}\right) = 1 - p\left(\overline{U}/\overline{R}\right) = 0{,}98}$.
   c) En déduire la probabilité qu'il soit utilisable.
   On a : $U = (U \cap R) \cup \left(U \cap \overline{R}\right)$
   Donc : $p(U) = p(U \cap R) + p\left(U \cap \overline{R}\right)$
   Donc : $p(U) = p(R) \times p\left(U/R\right) + p\left(\overline{R}\right) \times p\left(U/\overline{R}\right)$
   Donc : $p(U) = 0{,}4 \times 0{,}955 + 0{,}6 \times 0{,}98$
   Donc : $\boxed{p(U) = 0{,}97}$.

2. On prélève dans le stock, successivement et au hasard, 10 roulements.
   a) Quelle est la probabilité de X ?
   On sait que le tirage des 10 roulements est assimilable à un tirage avec remise. Les 10 épreuves sont donc indépendantes.
   Pour chaque roulement tiré, il y a 2 issues :
   - le roulement est utilisable (avec une probabilité de 0,97),
   - le roulement est inutilsable

   On en déduit que la variable X qui compte le nombre de roulements utilisables suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}97$: $\boxed{B(10\,;0{,}97)}$.
   b) Quelle est la probabilité que 9, au moins, des 10 roulements soient utilisables ?
   On a : $p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10)$
   Donc : $p(X \geq 9) = C_{10}^{9} \times 0{,}97^{9} \times 0{,}03^{1} + C_{10}^{0} \times 0{,}97^{10}$
   Donc : $\boxed{p(X \geq 9) = 0{,}97}$ à 10^{-2} près par excès.

3. On prélève maintenant 100 roulements au hasard dans le stock.
   La variable aléatoire Y qui donne le nombre de roulements inutilisables suit la loi $B(100\,;0{,}03)$.
   On décide d'approcher la loi de Y par une loi de Poisson.
   a) Quel est le paramètre de cette loi ?
   On sait qu'un loi binomiale $B(n\,;p)$ peut, lorsque n est grand et p petit, être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Donc puisque Y suit la loi binomiale $B(100\,;0{,}003)$, on a : $np = 3$.

Donc la loi suivie par Y peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$: P(3).

b) Quelle est la probabilité que moins de 2 roulements soient inutilisables ?

On a : $p(Y<2) = p(Y=0)+p(Y=1)$

Donc : $p(Y<2)$ ó $0{,}050+0{,}149$ par lecture de la table de la loi P(3).

Donc : $\boxed{p(Y<2) = 0{,}20 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

Partie B

La variable aléatoire D donne le diamètre en mm de chaque roulement. D suit la loi $N(23{,}65\,;0{,}02)$.

1. Quelle est la probabilité que le diamètre soit dans l'intervalle [23,61 ; 23,70] ?

Si on pose $T = \dfrac{D-23{,}65}{0{,}02}$, alors on sait que T suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

On a alors : *p*(23,61 Â *D* Â 23,70) = $p\left(-\dfrac{0{,}04}{0{,}02}\right.$ Â *T* Â $\left.\dfrac{0{,}05}{0{,}02}\right)$

Donc : *p*(23,61 Â *D* Â 23,70) = *p*(-2 Â *T* Â 2,5)

Donc : *p*(23,61 Â *D* Â 23,70) = $\Pi(2{,}5)-(1-\Pi(2))$ où Π est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Donc : *p*(23,61 Â *D* Â 23,70) = $\Pi(2{,}5)+\Pi(2)-1$

Donc : **[** *p*(23,61 Â *D* Â 23,70) ó 0,971 **]** d'après la table de Π.

2. Calcul de h.

On a les équivalences suivantes : $p(23{,}65-h < D < 23{,}65+h) = 0{,}90$ ñ $p\left(-\dfrac{h}{0{,}02} < T < \dfrac{h}{0{,}02}\right) = 0{,}90$

ñ $2\Pi\left(\dfrac{h}{0{,}02}\right)-1 = 0{,}90$

ñ $2\Pi\left(\dfrac{h}{0{,}02}\right) = 1{,}90$

ñ $\Pi\left(\dfrac{h}{0{,}02}\right) = 0{,}95$

ñ $\dfrac{h}{0{,}02}$ ó $1{,}645$

ñ $\boxed{h = 0{,}033 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

3. En déduire l'intervalle I.

D'après ce qui précède, $I = [23{,}65-0{,}033\,;23{,}65+0{,}033]$

Donc : $\boxed{I = [23{,}617\,;23{,}683]}$.

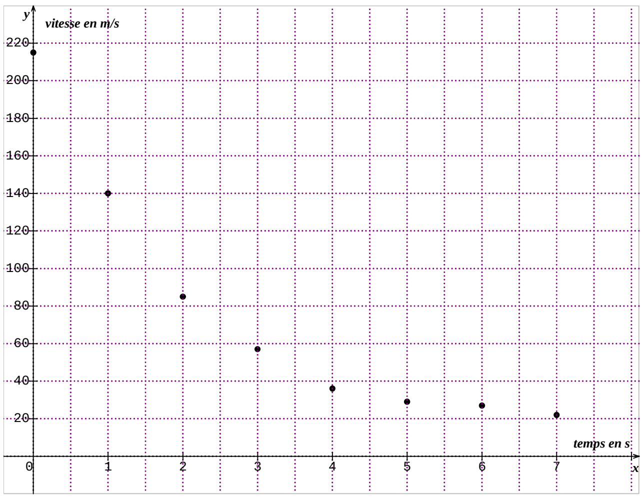
On peut dire que I est l'intervalle de confiance à 90% dans lequel se trouve le diamètre d'un roulement pris au hasard.

Exercice 2

Partie A

1. Nuage de points

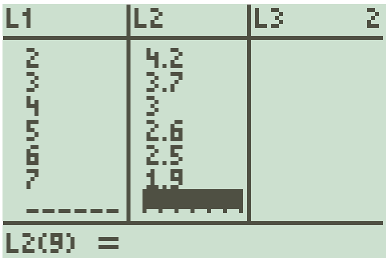
Sur ce nuage, on voit bien que les points ne sont pas du tout alignés et, donc, qu'un ajustement affine ne convient pas.

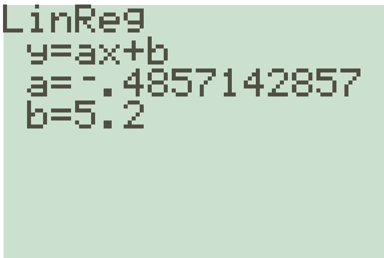


2. Changement de variable : on pose $n_i = \ln\left(v_i - 15\right)$
Le tableau de la série $\left(t_i\ ;\ n_i\right)$ est le suivant :

t_i en s	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i en $m.s^{-1}$	5,3	4,8	4,2	3,7	3	2,6	2,5	1,9

3. Équation de la droite de régression de n en t par la méthode des moindres carrés.





L'équation de la droite, fournie par la calculatrice, est, en arrondissant les coefficients à 10^{-1} :

$\boxed{n = -0{,}5t + 5{,}2}$.

4. En déduire une expression de v en fonction de t sous la forme : $v = \alpha e^{\beta t} + \gamma$.
D'après ce qui précède, on a : $\ln(v - 15) = -0{,}5t + 5{,}2$
Donc : $v - 15 = e^{-0{,}5t + 5{,}2}$
ou encore : $v - 15 = e^{-0{,}5t} \times e^{5{,}2}$
ou bien : $v = e^{5{,}2} \times e^{-0{,}5t} + 15$
Finalement : $\boxed{v = 181{,}3e^{-0{,}5t} + 15}$.

Partie B

On modélise la vitesse comme solution de l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 15$

1. Résoudre l'équation $2y' + y = 0$.
Cette équation équivaut à : $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
Or on sait que la solution générale d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$ est $y = Ce^{-at}$
Donc, la solution générale de l'équation $2y' + y = 0$ est : $\boxed{y = Ce^{\frac{-1}{2}t}}$ avec C ☻

2. Recherche d'une solution particulière constante de (E).
Cette solution est naturellement $\boxed{y_0 = 15}$.

3. En déduire la solution générale de (E).
On sait que la solution générale d'une équation différentielle s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre associée.
Donc la solution générale de (E) est : $\boxed{y = Ce^{-0{,}5t} + 15}$.

4. Recherche de la solution particulière telle que $v(0) = 215$.
On a : $v(t) = Ce^{-0{,}5t} + 15$ et $v(0) = 215$.
Donc : $Ce^{0} + 15 = 215$
Donc : $C = 200$.
La solution particulière cherchée est donc : $\boxed{v = 200e^{-0{,}5t} + 15}$.

Partie C

La vitesse du mobile est donnée par la fonction : $v(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 15$ pour $t \in [0\,;+\infty[$.

1. Étude des variations de v.

   La fonction v est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa dérivée est : $v'(t) = -100\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.
   On en déduit que $v'(t) < 0$ pour tout t dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Donc la fonction v est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Montrer que ce modèle montre que, en théorie, le mobile ne s'arrête pas.

   On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 15$

   Donc, la vitesse décroît continuellement mais tend vers la vitesse limite de $15\,m.s^{-1}$.
   Le freinage du mobile ne permet donc pas de l'arrêter.

3. Distance parcourue par le mobile entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 10$.
   Cette distance est :

$$d = \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$d = \left[-400\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 15t\right]_0^{10}$$

$$d = \left(-400\mathrm{e}^{-5} + 150\right) - (-400)$$

$$\boxed{d = 550 - \frac{400}{e^5} \approx 547{,}3}.$$

   En 10 secondes, le mobile aura donc parcouru 547,3 m.