BTS Groupement C - Corrigé de juin 2001

Exercice 1 *(11 points)*

A – Résolution d'une équation différentielle $xy' - y = \ln x \quad (E)$

1. Résolution, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ de l'équation sans second membre associée : $xy' - y = 0$.
   Cette équation est de la forme $ay' + by = 0$ avec $\begin{cases} a(x) = x \\ b(x) = -1 \end{cases}$
   Posons $u(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)} = -\dfrac{1}{x}$.
   On sait qu'alors, si U est une primitive de u sur $]0\,;+\infty[$, l'équation a pour solution générale : $y = Ce^{-U}$ où C est une constante réelle quelconque.
   Dans notre exemple, on a : $U(x) = -\ln x$ pour $x \in]0\,;+\infty[$
   Donc la solution générale de l'équation $xy' - y = 0$ est : $y = Ce^{\ln x}$
   ou encore : $\boxed{y = Cx}$.

2. Vérification que h est bien une solution particulière de (E).
   On a, pour $x \in]0\,;+\infty[$: $h(x) = -\ln x - 1$.
   Donc : $h'(x) = -\dfrac{1}{x}$
   Donc : $xh' - h = x\left(-\dfrac{1}{x}\right) - (-\ln x - 1)$
   Donc : $xh' - h = \ln x$
   Donc h est bien une solution particulière de (E).

   On sait que la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre à une solution particulière de (E).
   Donc la solution générale de (E) est : $\boxed{y = Cx - \ln x - 1}$.

3. Recherche de la solution f qui vérifie $f(1) = 1$.
   On a : $f(x) = Cx - \ln x - 1$
   Donc : $f(1) = 1 \iff C - \ln 1 - 1 = 1$
   $\iff C = 2$
   La solution particulière cherchée est donc la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\boxed{f(x) = 2x - \ln x - 1}$.

B. Étude de la fonction f

1. Calcul des limites.
   On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} (2x - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0} (-\ln x) = +\infty \end{array}\right\}$ donc, par addition : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$.
   Pour $x > 0$, on peut écrire : $f(x) = x\left(2 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.
   Or, on a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0 \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 2$
   Donc, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

2. Calcul de la dérivée. Étude des variations.
   La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.
   On a : $f'(x) \geq 0 \iff 2 - \dfrac{1}{x} \geq 0$

ñ $\frac{1}{x}$ Â 2

ñ x Ã $\frac{1}{2}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $^{+}$).

La fonction f' est donc positive sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\text{õ}\right[$ et négative sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$

La fonction f est donc croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\text{õ}\right[$ et décroissante sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$.

Elle admet un minimum en $\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$ ó 0,69.

C. Représentation graphique ; calcul d'aire

1. Étude de la position de C par rapport à la droite D d'équation $y = 2x-1$.

   On a : $f(x)-(2x-1) = -\ln x$

   Donc : $f(x)-(2x-1)$ Ã 0 ñ $-\ln x$ Ã 0

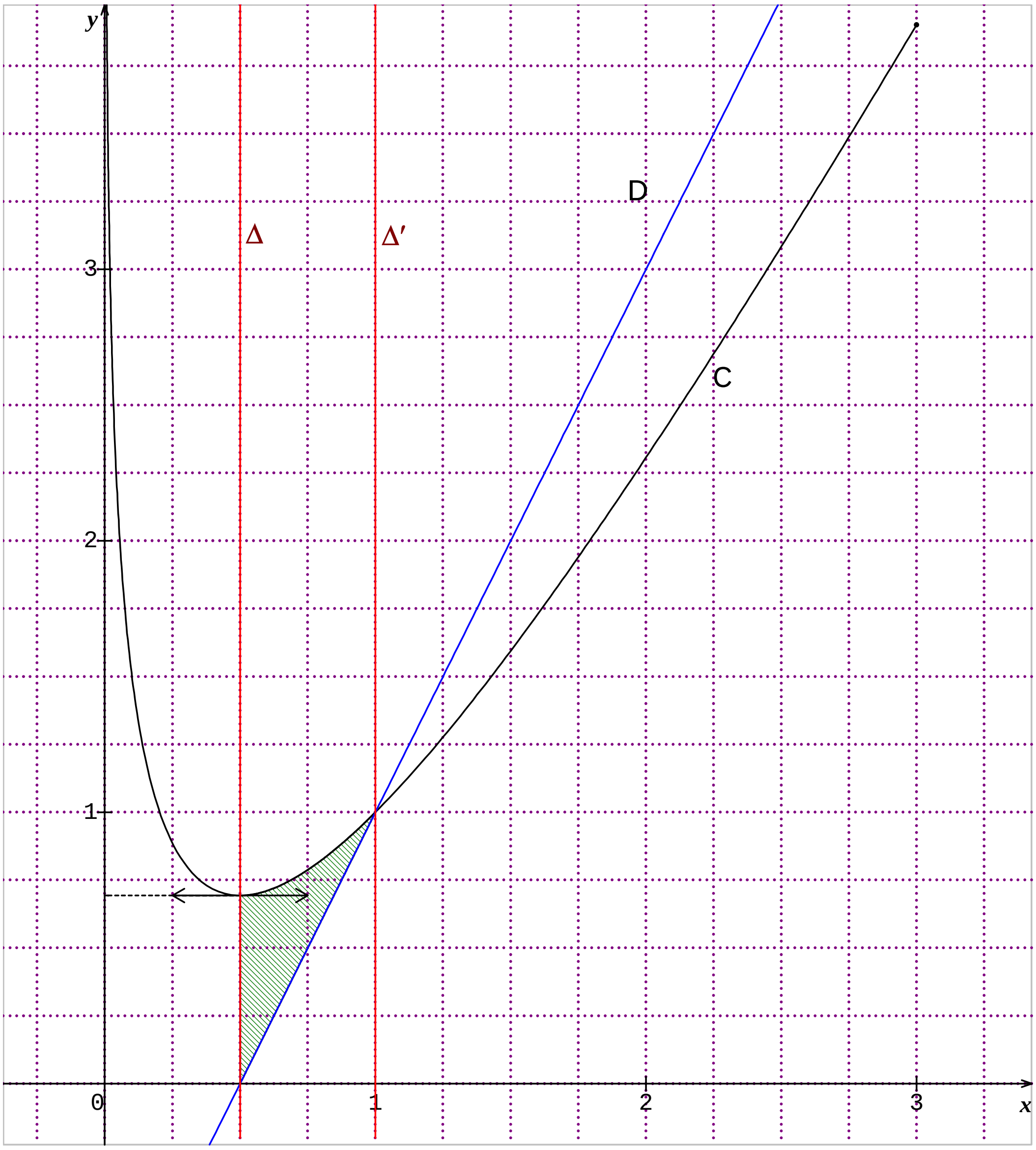
   ñ $\ln x$ Â 0

   ñ x Â 1.

   On en déduit que : - sur l'intervalle $]0\,;1]$, C est au-dessus de D

   - sur l'intervalle $[1\,;+$õ$[$, C est en-dessous de D.

2. Courbe.



3. *a)* Vérifier que H est une primitive de la fonction logarithme népérien

On a , pour tout réel $x > 0$: $H(x) = x\ln x - x$

Donc : $H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1$

Donc : $H'(x) = \ln x$

La fonction H est donc bien une primitive de la fonction logarithme népérien.

b) Représenter sur le graphique, le domaine délimité par C, D et les droites Δ et Δ'.

Voir page précédente.

c) Calcul de l'aire du domaine hachuré.

Nous savons, que sur l'intervalle]0 ; 1], la courbe C est au-dessus de la droite D.

Donc l'aire du domaine hachuré est donné par : $A = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x) - (2x-1)\,\mathrm{d}x$. (en unités d'aire)

Or : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x) - (2x-1)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\ln x\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\frac{1}{2}} \ln x\,\mathrm{d}x$

Donc : $A = H\left(\dfrac{1}{2}\right) - H(1)$ unités d'aire

ou bien : $A = \left(\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\right) - (\ln 1 - 1)$ unités d'aire

ou bien : $A = \dfrac{1}{2}(1 - \ln 2)$ unités d'aire

Donc, puisque l'unité d'aire vaut 16 cm^2, $\boxed{A = 8(1-\ln 2) \approx 2{,}45 \text{ cm}^2}$.

Exercice 2

A – Étude de la production

1. Calculer la probabilité des événements E_1 et E_2.

On sait que la variable aléatoire X suit la loi normale $N(25\,;0{,}44)$.

Donc, si on pose $T = \dfrac{X-25}{0{,}44}$, alors T suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

On a alors : $p(E_1) = p(X \leq 25{,}2)$

donc : $p(E_1) = p\left(T \leq \dfrac{0{,}2}{0{,}44}\right) = p(T \leq 0{,}455)$

donc : $\boxed{p(E_1) \approx \Pi(0{,}455) = 0{,}68 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

De même : $p(E_2) = p(24{,}1 \leq X \leq 25{,}9)$

Donc : $p(E_2) = p\left(-\dfrac{0{,}9}{0{,}44} \leq T \leq \dfrac{0{,}9}{0{,}44}\right)$

Donc : $p(E_2) = \Pi\left(\dfrac{0{,}9}{0{,}44}\right) - \Pi\left(-\dfrac{0{,}9}{0{,}44}\right)$

Donc : $p(E_2) = \Pi\left(\dfrac{0{,}9}{0{,}44}\right) - \left(1 - \Pi\left(\dfrac{0{,}9}{0{,}44}\right)\right)$

Donc : $p(E_2) = 2\Pi\left(\dfrac{0{,}9}{0{,}44}\right) - 1 \approx 2\Pi(2{,}045)$

Donc : $\boxed{p(E_2) = 0{,}96 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

2. Les billes sont conditionnées par paquets de 150.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale.

D'après l'énoncé, le choix des 150 billes est assimilable à un tirage avec remise.

Les 150 épreuves sont donc indépendantes.

Chacune des 150 épreuves est une épreuve de Bernoulli (où il y a 2 issues) :

- la bille choisie est défectueuse, avec une probabilité de 0,04,
- la bille est conforme, avec une probabilité de 0,96

Donc la variable Y qui compte le nombre de billes défectueuses dans un paquet de 150 billes, suit

$\boxed{\text{la loi binomiale de paramètres 150 et 0,04 : } B(150\,;0{,}04)}$.

b) On admet que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.
On que l'espérance d'une loi binomiale $B(n\ ;\ p)$ est $n \times p$
Donc le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = n \times p = 150 \times 0{,}04 = 6$.
Dans ces conditions, on a : $p\left(E_3\right) = p(Y \leqslant 4)$
soit : $p\left(E_3\right) = \left(1 + \lambda + \dfrac{\lambda^2}{2} + \dfrac{\lambda^3}{3!} + \dfrac{\lambda^4}{4!}\right)e^{-\lambda}$
Finalement : $\boxed{p\left(E_3\right) \approx 0{,}285}$.

(on pouvait aussi utiliser la table de la loi de Poisson pour $\lambda = 6$:
$p(Y=0)+p(Y=1)+p(Y=2)+p(Y=3)+p(Y=4) = 0{,}002+0{,}015+0{,}045+0{,}089+0{,}134 = 0{,}285$)

B – Commande d'un client

Un client veut faire un test pour vérifier si le diamètre des billes est bien de 25 mm.

1. Quelle est l'ypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
Si on note m le diamètre des billes.
L'hypothèse nulle est $m = 25$.
L'hypothèse alternative est : $m \neq 25$ car il s'agit d'un test bilatéral.

2. *a)* Donner, sous l'hypothèse nulle, la loi suivie par $\bar{X}$.
Sous l'hypothèse nulle :
La variable X, qui donne le diamètre d'une bille, suit la loi normale $N(25\ ;0{,}44)$
Donc la variable $\bar{X}$, qui donne le diamètre moyen sur un échantillon de 125 billes, suit la loi normale $N\left(25\ ;\dfrac{0{,}44}{\sqrt{125}}\right)$

b) Déterminer le nombre a tel que $p\left(25 - a < \bar{X} < 25 + a\right) = 0{,}95$
a représente l'écart critique, par rapport à la moyenne, pour un risque de 5%.
Posons $D = \dfrac{\bar{X} - 25}{\dfrac{0{,}44}{\sqrt{125}}} \approx \dfrac{\bar{X} - 25}{0{,}04}$. On sait que D suit la loi normale centrée réduite $N(0\ ;1)$

On a donc : $p\left(25 - a < \bar{X} < 25 + a\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow p\left(-\dfrac{a}{0{,}04} < D < \dfrac{a}{0{,}04}\right) = 0{,}95$

$$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{a}{0{,}04}\right) - 1 = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{a}{0{,}04}\right) = 0{,}975$$

Par lecture inverse de la table de Π, on déduit : $\dfrac{a}{0{,}04} \approx 1{,}96$

Donc l'écart critique par rapport à la moyenne est : $\boxed{a = 0{,}08 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

c) Règle de décision du test.
Si dans un échantillon de taille 125, la moyenne des diamètres appartient à l'intervalle $[25 - a\ ;25 + a] = [24{,}92\ ;25{,}08]$, alors l'hypothèse H_0 est acceptée et l'hypothèse H_1 rejetée.
Sinon, l'hypothèse H_0 est rejetée et l'hypothèse alternative H_1 acceptée.

3. Conclusion au vu de l'échantillon.
Nous savons que l'échantillon de 125 billes présente une moyenne de 25,1 mm de diamètre.
Cette valeur se situe dans la zone critique (hors de l'intervalle d'acceptabilité [24,92 ; 25,01].
On peut donc dire, au risque de 5%, que l'entreprise qui a fourni les billes n'a pas tenu son engagement de fournir des billes de diamètre 25 mm.