Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2008 - groupement B
Éléments de correction

Exercice 1 :

A. Résolution d'une équation différentielle

1. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -2x$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2$.
   On en déduit la solution générale de l'équation homogène (E_0), $y(x) = k\mathrm{e}^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-1)\mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   À l'aide de la dérivée d'un produit, on obtient $g'(x) = (-x-2)\mathrm{e}^x$. On a alors :
$$\begin{aligned} g'(x) - 2g(x) &= (-x-2)\mathrm{e}^x - 2(-x-1)\mathrm{e}^x \\ &= (-x-2+2x+2)\mathrm{e}^x \\ &= x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$
   La fonction g est alors une solution particulière de l'équation différentielle (E_0).
3. La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière g à la solution générale de l'équation homogène (E_0).
   La solution générale de (E) peut s'écrire :
$$y(x) = k\mathrm{e}^{2x} + (-x-1)\mathrm{e}^x \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}.$$
4. La fonction f est solution de (E) alors $f(x) = k\mathrm{e}^{2x} + (-x-1)\mathrm{e}^x$.
   De plus, $f(0) = 0$, alors $k + g(0) = 0$ avec $g(0) = -1$, d'où $k = 1$. On obtient alors
$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + (-x-1)\mathrm{e}^x.$$

B. Étude locale d'une fonction

1. (a) On remarque que $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + g(x)$, et donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} + g'(x) \\ &= 2\mathrm{e}^{2x} + (-x-2)\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 2 - x\right) \end{aligned}$$
   (b) On a $f'(0) = 0$: la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ est alors horizontale au point d'abscisse 0.
2. (a) Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction exponentielle est :
$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + x^2\varepsilon(t) \quad \text{avec} \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$
   En posant $t = 2x$, on obtient le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ est :
$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
   (b) Pour obtenir le développement limité de la fonction $\mathrm{e}^x(x+1)$, il faut faire le produit de celui de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ avec $(x+1)$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2. On obtient
$$\mathrm{e}^x(x+1) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$
   Par différence, le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de f est alors
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

C. Calcul intégral

1. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-0,3}^{0,3} \\ &= \frac{1}{3} \times 0,3^3 \\ &= 0,009 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} J &= \int_{-0,3}^{0,3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-0,3}^{0,3} \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{0,6} - \mathrm{e}^{-0,6}\right] \\ &= 0,5\left(\mathrm{e}^{0,6} - \mathrm{e}^{-0,6}\right) \end{aligned}$$

3. On intègre $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ par parties en posant :

$$\begin{array}{lll} u(x) = x+1 & \text{alors} & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{x} & \text{alors} & v(x) = \mathrm{e}^{x} \end{array}$$

   d'où

$$\begin{aligned} K &= \left[(x+1)\mathrm{e}^{x}\right]_{-0,3}^{0,3} - \int_{-0,3}^{0,3} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[(x+1)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}\right]_{-0,3}^{0,3} \\ &= \left[x\mathrm{e}^{x}\right]_{-0,3}^{0,3} \\ &= 0,3\left(\mathrm{e}^{0,3} + \mathrm{e}^{-0,3}\right) \end{aligned}$$

4. (a) On a

$$\begin{aligned} L &= \int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-0,3}^{0,3} \left(e^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-0,3}^{0,3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x - \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\ &= J - K \\ &= 0,5\left(\mathrm{e}^{0,6} - \mathrm{e}^{-0,6}\right) - 0,3\left(\mathrm{e}^{0,3} + \mathrm{e}^{-0,3}\right) \end{aligned}$$

   (b) $L \approx 0{,}009\ 45$.

   (c) $L - K \approx 0{,}000\ 45 = 4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 :

A. Loi normale

1. X suit $\mathcal{N}(10\,;\,0,21)$ alors $T = \dfrac{X-10}{0,21}$ suit $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5) &= P\left(\frac{9,5-10}{0,21} \leqslant T \leqslant \frac{11,5-10}{0,21}\right) \\
&= P\left(\frac{-0,5}{0,21} \leqslant T \leqslant \frac{0,5}{0,21}\right) \\
&= \Pi\left(\frac{0,5}{0,21}\right) - \Pi\left(-\frac{0,5}{0,21}\right) \\
&= \Pi\left(\frac{0,5}{0,21}\right) - \left[1 - \Pi\left(\frac{0,5}{0,21}\right)\right] \\
&= 2\Pi\left(\frac{0,5}{0,21}\right) - 1 \\
&= 2\Pi(2,38) - 1 \\
&\approx 0,983
\end{aligned}$$

2. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned}
P\left((9,5 \leqslant X \leqslant 10,5) \cap (10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5)\right) &= P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5) \times P(10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5) \\
&\approx 0,983 \times 0,985 \\
&\approx 0,968
\end{aligned}$$

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1. – Chaque prélèvement est constitué de 50 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise ;
   – Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles : soit le succès : l'événement E, la pièce est défectueuse, de probabilité $p = p(E) = 0,03$, soit l'échec : l'événement $\overline{E}$, la pièce n'est pas défectueuse, de probabilité $q = 1 - p = 0,97$;
   – La variable aléatoire Z mesure le nombre de succès,

   alors la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,03$.

2. On a

$$\begin{aligned}
P(Z = 0) &= C_{50}^{0}\, 0,03^{0} \times 0,97^{50} \\
&\approx 0,218
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
P(Z \leqslant 2) &= P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) \\
&= C_{50}^{0}\, 0,03^{0} \times 0,97^{50} + C_{50}^{1}\, 0,03^{1} \times 0,97^{49} + C_{50}^{2}\, 0,03^{2} \times 0,97^{48} \\
&\approx 0,811
\end{aligned}$$

3. (a) Par approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, on conserve l'espérance de la loi binomiale. Or $E(Z) = np = 1,5$ alors le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = 1,5$.

   (b) On demande de calculer

$$\begin{aligned}
P(Z_1 \leqslant 2) &= P(Z_1 = 0) + P(Z_1 = 1) + P(Z_1 = 2) \\
&\approx 0,809
\end{aligned}$$

C. Intervalle de confiance

1. Une estimation ponctuelle de la fréquence p inconnue est $f = \dfrac{96}{100} = 0,96$.

2. L'intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance à 95% est donné par

$$I = \left[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\ ;\ f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} \right]$$

où $f = 0,96$, $n = 100$ et t est tel que $2\Pi(t) - 1 = 0,95$. On obtient $\Pi(t) = 0,975$, et donc par lecture inverse de la table de la loi normale $t = 1,96$.
On obtient

$$I = [0,921\,;\ 0,999]$$

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr