

**Mathématiques - brevet de technicien supérieur**  
**session 2006 - groupement B**

**Exercice 1 (sur 11 points)**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

*A. Résolution d'une équation différentielle*

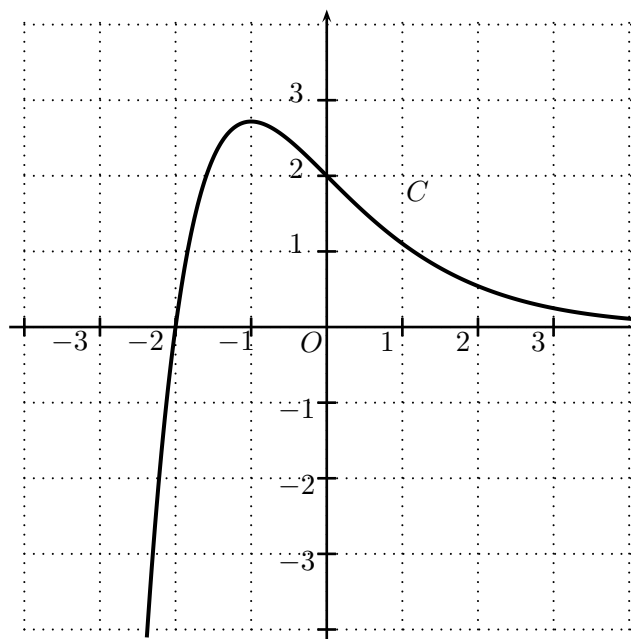
On considère l'équation différentielle  $(E) : y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$

où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $y'$  la fonction dérivée de  $y$  et  $y''$  sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E_0) : y'' - 3y' - 4y = 0$ .
2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = xe^{-x}$ .  
Démontrer que la fonction  $h$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E_0)$ .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
4. Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle  $(E)$  qui vérifie les conditions initiales  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = -1$ .

*B. Étude locale d'une fonction*

La courbe  $C$  ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ .



1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction  $f$  est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. Déduire du 1. une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de  $C$  et  $T$  au voisinage du point d'abscisse 0.

*C. Calcul intégral*

On note  $I = \int_0^{0,6} f(x) dx$ .

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que  $I = 3 - 3,6e^{-0,6}$ .
2. Donner la valeur approchée arrondie à  $10^{-3}$  de  $I$ .
3. Donner une interprétation graphique du nombre  $I$ .

## Exercice 2 (sur 9 points)

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types :

- des chaudières dites « à cheminée ».
- des chaudières dites « à ventouse ».

**Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

### A. Ajustement affine

Le nombre de chaudières fabriquées lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3	4	5
Nombre de chaudières fabriquées par milliers : $y_i$	15,35	15,81	16,44	16,75	17,19	17,30

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer :
  - (a) le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double de variables  $x$  et  $y$  ; arrondir à  $10^{-2}$  ;
  - (b) une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ , sous la forme  $y = ax + b$ , où  $a$  sera arrondi à  $10^{-3}$  et  $b$  sera arrondi à l'unité.
2. En supposant que la tendance observée se poursuive pendant deux années, estimer le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

### B. Probabilités conditionnelles

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5% des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées. On considère les événements suivants :

A : « La chaudière est à cheminée » ;

B : « La chaudière est à ventouse » ;

C : « La chaudière présente un défaut » ;

1. Déterminer  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(D/A)$  et  $P(D/B)$ .
2. Calculer  $P(D \cap A)$  et  $P(D \cap B)$ .
3. En remarquant que  $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$  et que les événements  $D \cap A$  et  $D \cap B$  sont incompatibles, calculer  $P(D)$  et  $P(\bar{D})$ .

### C. Loi normale

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque chaudière à cheminée prélevée au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement en années.

On admet que  $X$  suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart-type 3.

Une chaudière est dite « amortie » si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à 10 ans.

Calculer la probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit « amortie » ; arrondir à  $10^{-3}$ .

### D. Intervalle de confiance

On considère un échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard dans un stock important.

Ce stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 94 chaudières sont sans aucun défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue  $p$  des chaudières de ce stock qui sont sans aucun défaut.

2. Soit  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard et avec remise dans ce stock, associe la fréquence des chaudières de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.

On suppose que  $F$  suit la loi normale de moyenne  $p$  et d'écart-type  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$ , où  $p$  est la fréquence inconnue des chaudières du stock qui sont sans aucun défaut.

Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence  $p$  avec le coefficient de confiance 95%. Arrondir les bornes à  $10^{-2}$ .

3. On considère l'affirmation suivante : « la fréquence  $p$  est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2 ».  
Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification).