

# Chapitre 6

## Géométrie analytique

# 1. Compléments

**Théorème** : dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ,

les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont données par

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

ex : Soit A(4 ; 6) et B(8 ; 3) alors I(6 ; 4,5) est le milieu de [AB]

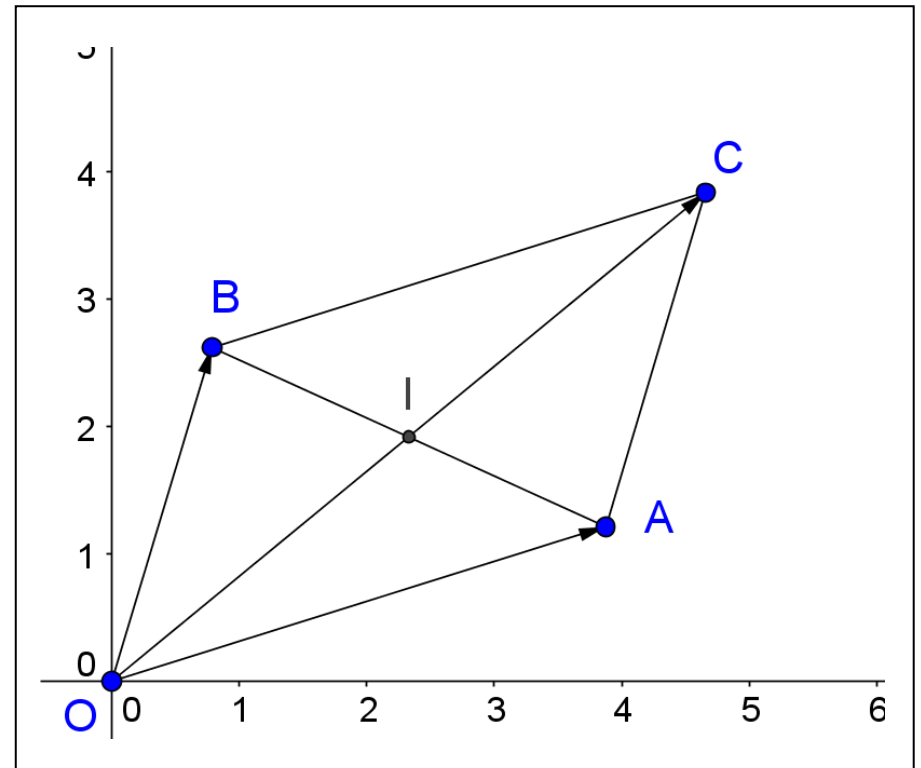
## 1. Compléments

**Théorème** :  $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$  et  $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

Preuve : on a :  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$   
donc  $x_C = x_A + x_B$  et  $y_C = y_A + y_B$

OACB est un parallélogramme  
donc  $\overrightarrow{OC} = 2 \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

d'où  $2x_I = x_A + x_B$  et  $2y_I = y_A + y_B$



1. Compléments

**Théorème** : la distance de deux points est donnée dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  par

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)^2 + (\mathbf{y}_B - \mathbf{y}_A)^2}$$

**ex** : A(4 ; 6) et B(8 ; 3) alors  $AB = \sqrt{(8 - 4)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{25} = 5$

1. Compléments

**Théorème** :  $\mathbf{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

**Preuve** : D est tel que  
ODBA soit un parallélogramme

donc  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$  alors  $OD = AB$

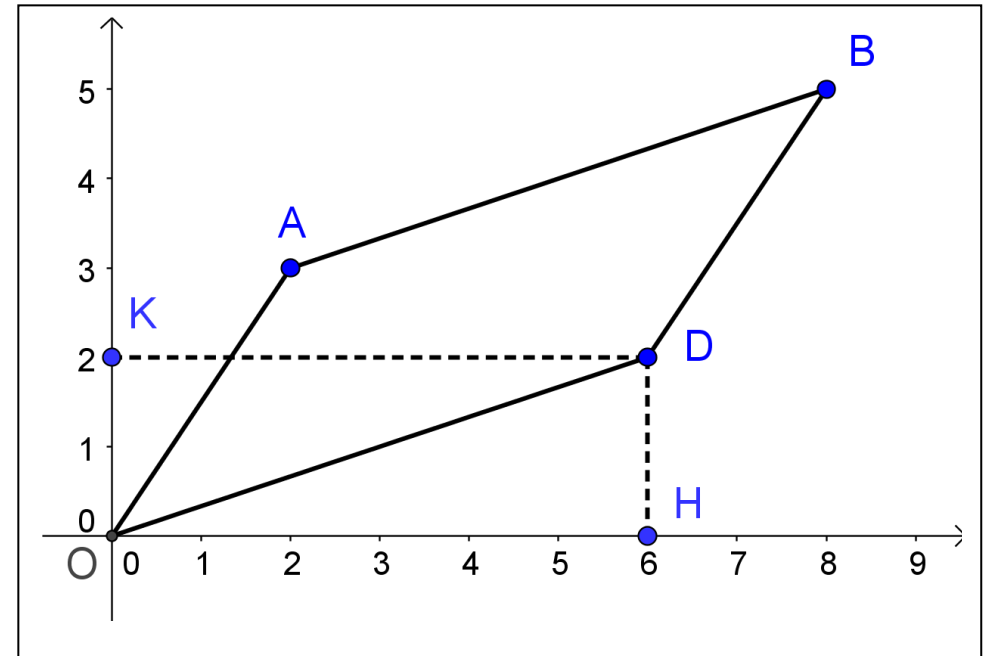
et  $x_D = x_B - x_A$  ;  $y_D = y_B - y_A$

or

$OD^2 = OH^2 + OK^2$  (Pythagore)

$OD^2 = x_D^2 + y_D^2$

d'où  $\mathbf{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



## 1. Compléments

### Formules à connaître

Relation de Chasles :  $\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}}$

Coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  :  $\boxed{(x_B - x_A ; y_B - y_A)}$

$\vec{u} (x ; y)$  et  $\vec{v} (x' ; y')$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \boxed{xy' = yx' \text{ ou } xy' - yx' = 0}$

I est Milieu de [AB]  $\Leftrightarrow \boxed{x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}}$

Distance AB :  $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

## 2. Rappel sur les droites dans un repère

**Théorème** : Dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , toute fonction affine  
 $f : x \mapsto mx + p$  est représentée par une droite.

on a alors  $y = f(x) = mx + p$

## 2. Droites dans un repère

### Réciproquement

toute droite  $d$  est l'ensemble des point  $M(x ; y)$  tels que :

- ☛ soit  $x = k$  ( $k$  étant un nombre réel fixé)  
d est alors parallèle à l'axe des ordonnées ( $Oy$ ).
- ☛ soit  $y = mx + p$  ( $m$  et  $p$  deux nombres fixés)  
d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ( $Oy$ ).

## 2. Droites dans un repère

### **Définitions :**

L'équation  $y = mx + p$  (ou  $x = k$ ) est l'équation de la droite  $d$ .

$m$  est le coefficient directeur de  $d$

$p$  est l'ordonnée à l'origine de  $d$

2. Droites dans un repère

**Théorème** : Soit les points  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  avec  $x_A \neq x_B$ .  
(la droite (AB) n'est donc pas parallèle à l'axe des ordonnées).  
Alors le coefficient directeur  $m$  de la droite (AB) est :

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{y_B - y_A}}{\mathbf{x_B - x_A}}$$

Rq : si  $x_A = x_B$ , d est parallèle à (Oy), son équation est  $x = k$   
cette droite n'a pas de coefficient directeur.

## 2. Droites dans un repère

**Preuve** : Si  $x_A \neq x_B$ , la droite (AB) a pour équation  $y = mx + p$ .

$$B \in (AB) \text{ donc } y_B = m x_B + p$$

$$A \in (AB) \text{ donc } y_A = m x_A + p$$

$$\text{et par différence : } y_B - y_A = m(x_B - x_A)$$

et comme  $x_A \neq x_B$ , on peut diviser par  $x_B - x_A$

$$\text{ce qui donne bien } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple : A(5 ; 3) B(7 ; 9) : le coefficient directeur de la droite (AB)

$$\text{est } m = \frac{9 - 3}{7 - 5} = 3$$

2. Droites dans un repère

**Théorème** : Soit une droite  $d$  d'équation  $y = mx + p$ .  
qui représente la fonction affine  $f : x \mapsto mx + p$ .  
son ordonnée à l'origine  $p = f(0)$   
c'est l'ordonnée du point de la droite  $d$  d'abscisse 0.

Preuve :  $f(0) = p$  donc pour  $x = 0$ ,  $y = p$   
le point  $A(0 ; p)$  est bien un point de la droite  $d$ .

## 2. Droites dans un repère

**Théorème** : Soit deux droites  $d$  et  $d'$  d'équations respectives

$$y = mx + p \text{ et } y = m'x + p'$$

Les points communs aux deux droites sont les points dont

les coordonnées vérifient le système :  $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$

2. Droites dans un repère

**Résolution du système** (S) : 
$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Si (S) possède une solution alors :  $mx + p = m'x + p'$   
donc  $(m - m')x = p' - p$

1<sup>er</sup> cas :  $m \neq m'$  alors il existe toujours une solution unique :

$$x = \frac{p' - p}{m - m'}, \text{ et } y = m \frac{p' - p}{m - m'} + p = \frac{mp' - m'p}{m - m'}$$

on dira que les droites d et d' sont sécantes

2<sup>ème</sup> cas :  $m = m'$  si  $p \neq p'$  : il n'y a aucune solution :  $d \parallel d'$   
si  $p = p'$  : d et d' ont la même équation :  $d = d'$

## 2. Droites dans un repère

Exemples :

Si les droites d'équations suivantes sont sécantes,  
trouver les coordonnées de leur point d'intersection :

$$d : y = 2x + 8$$

$$d' : y = -3x - 7$$

$$d'' : y = 2x - 5$$

## 2. Droites dans un repère

**Théorème** : le coefficient directeur indique la direction de la droite.

Deux droites  $d$  et  $d'$  d'équations respectives  $y = mx + p$  et  $y = m'x + p'$

- ☛ sont parallèles si et seulement si  $m = m'$
- ☛ sont sécantes si et seulement si  $m \neq m'$

## 2. Droites dans un repère

**Théorème** : Si les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  ont le même coefficient directeur alors les points  $A, B, C$  sont alignés.

Preuve :  $(AB) // (AC)$  et ces droites ont un point commun  $A$

**FIN**