Chapitre V

Le premier degré

1. Fonctions affines

Définition : Les fonctions affines sont les fonctions définies sur **R** par : $\mathbf{f(x) = mx + p}$, m et p étant deux nombres réels donnés.

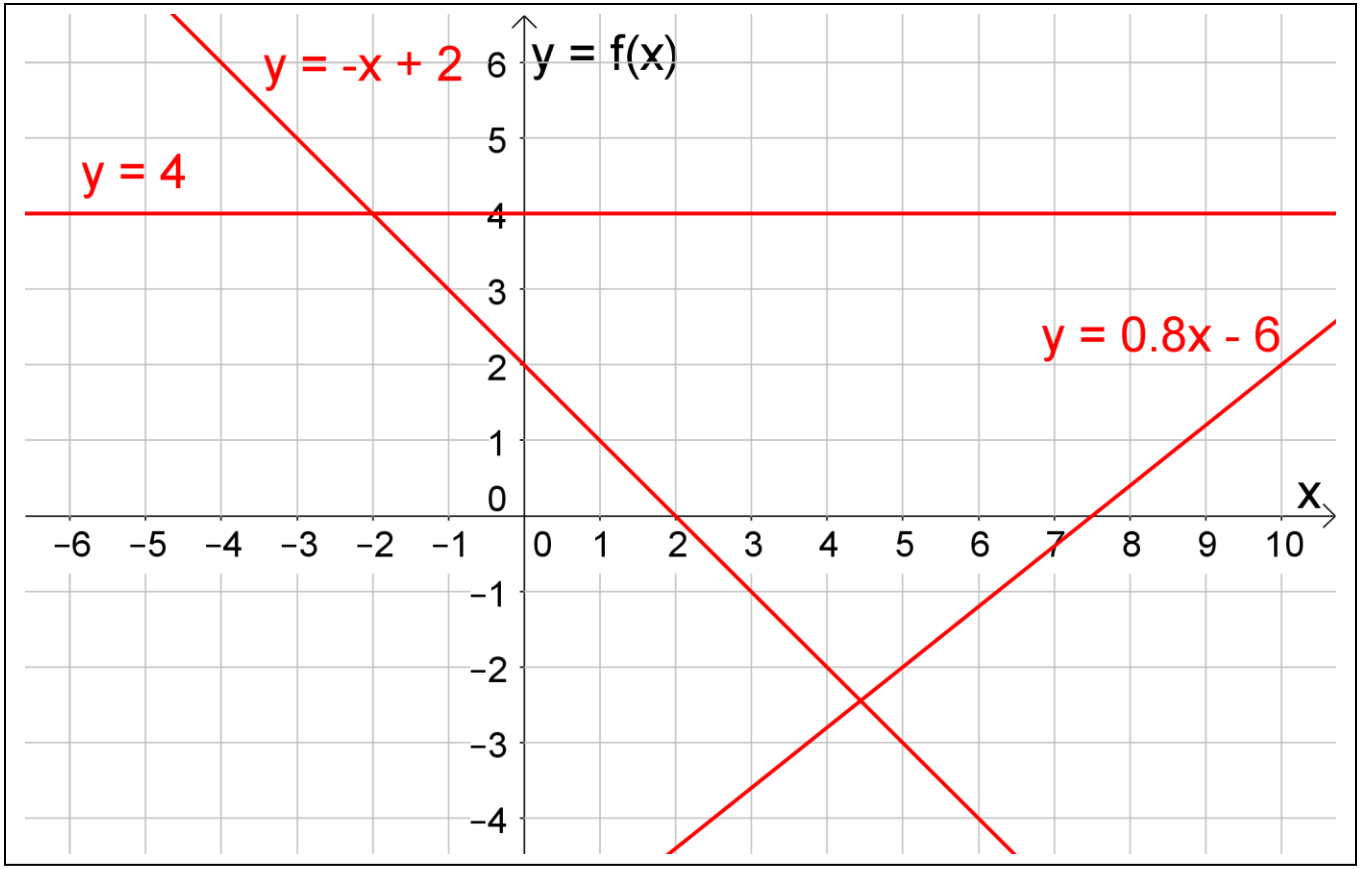
Ex1 : $f(x) = 4x + 9$; $g(x) = -3x - 7$; $h(x) = \pi x + 8$; $k(x) = 7 - x$

Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$; f est appelée fonction linéaire.
Si $m = 0$, alors $f(x) = p$; f est appelée fonction constante.

1. Fonctions affines

Théorème : Dans un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), la fonction affine f, définie par **f(x) = mx + p**, est représentée par une droite.

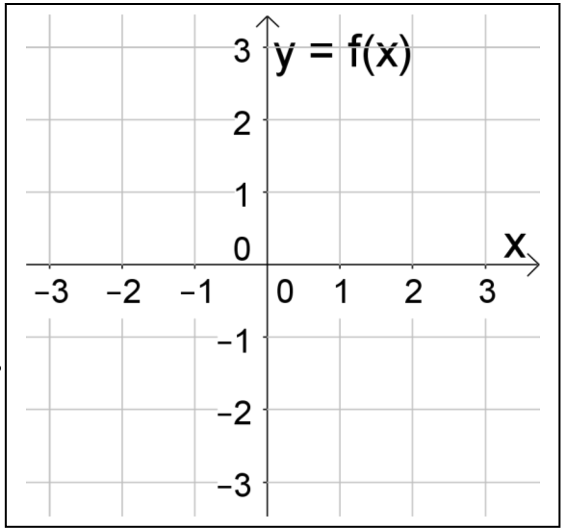
Ex2 :



1. Fonctions affines

Théorème : Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, la fonction affine définie par $\mathbf{f(x) = mx + p}$, est représentée par une droite.

Remarques : x se lit en abscisse,
f(x) se lit en ordonnée donc $y = f(x)$



Ainsi $y = mx + p$ est l'équation réduite de la droite.

m est le coefficient directeur de la droite.
p est son ordonnée à l'origine c'est à dire que $p = f(0)$, image de 0.
L'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $mx + p = 0$
a pour seule solution $x = \frac{-p}{m}$ (si $m \neq 0$), antécédent de 0.

1. Fonctions affines

Théorème : Soit la fonction affine définie par $\mathbf{f(x) = mx + p}$; les variations de f dépendent du signe de son coefficient directeur m.

Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur **R**.
Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur **R**.

1. Fonctions affines

Théorème : Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur **R**.
Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur **R**.

Preuve : soient deux réels quelconques a et b tels que $\mathbf{a < b}$.

Si $\mathbf{m > 0}$ alors $ma < mb$ donc $ma + p < mb + p$ soit $\mathbf{f(a) < f(b)}$
les images sont rangées dans le même sens que leurs antécédents,
donc f est strictement croissante sur **R**.

Si $\mathbf{m < 0}$ alors $ma > mb$ donc $ma + p > mb + p$ soit $\mathbf{f(a) > f(b)}$
les images sont rangées en sens contraire de leurs antécédents,
donc f est strictement décroissante sur **R**.

1. Fonctions affines

Si m > 0 alors f est strictement croissante sur **R**.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
f(x)		$\nearrow$ **0**	

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
f(x)		–	**0**	+	

L'inéquation mx + p > 0 a pour solution $]-\frac{p}{m}\ ;\ +\infty[$

L'inéquation mx + p < 0 a pour solution $]-\infty\ ;\ -\frac{p}{m}[$

1. Fonctions affines

Si m < 0 alors f est strictement décroissante sur **R**.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	**0**	$\searrow$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
f(x)		+	**0**	–	

L'inéquation mx + p > 0 a pour solution $]-\infty\ ;\ -\dfrac{p}{m}[$

L'inéquation mx + p < 0 a pour solution $]-\dfrac{p}{m}\ ;\ +\infty[$

2. Résolution de problèmes

Définition : Résoudre une équation (ou une inéquation) c'est trouver l'ensemble de toutes ses solutions.

Définition : Deux équations (ou inéquations) sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Méthode : on remplace l'équation (l'inéquation) de départ par une suite d'équations équivalentes jusqu'à obtenir une ou des équations simples du type $x = \text{constante}$.

2. Résolution de problèmes

Théorème : On obtient des équations équivalentes :
- en ajoutant ou retranchant un même nombre à ses deux membres.
- en multipliant ou divisant ses deux membres par un même nombre non nul.

Théorème de l'équation produit : l'équation $f(x) \times g(x) = 0$ est équivalente à $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$

Ex3 : $(4x - 20)\times(x + 3) = 0 \Leftrightarrow 4x - 20 = 0$ ou $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -3$

2. Résolution de problèmes

Théorème :

On obtient des inéquations équivalentes :

- en ajoutant ou retranchant un même nombre à ses deux membres.
- en multipliant ou divisant ses deux membres par un même nombre strictement positif.
- en multipliant ou divisant ses deux membres par un même nombre strictement **négatif** à condition de changer le sens de l'inéquation.

2. Résolution de problèmes

Ex3 : $4x + 12 > 0 \Leftrightarrow 4x > -12$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-12}{4}$$

$$\Leftrightarrow x > -3$$

Mais : $-6x + 30 > 0 \Leftrightarrow -6x > -30$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-30}{-6}$$

$$\Leftrightarrow x < 5$$

2. Résolution de problèmes

Théorème de l'inéquation produit :

l'inéquation $f(x) \times g(x) > 0$

est équivalente à $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

l'inéquation $f(x) \times g(x) < 0$

est équivalente à $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

2. Résolution de problèmes

Ex4 : $(4x - 20) \times (x + 3) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 20 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4x - 20 < 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x > 20 \\ x > -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4x < 20 \\ x < -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 5 \\ x < -3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x > 5$ ou $x < -3$

On résume ces calculs dans un tableau de signes

x		-3		5	
4x – 20	–		–	0	+
x + 3	–	0	+		+
P(x)	+	0	–	0	+

Réponse : S =]-∞ ; -3[∪]5 ; +∞[

FIN