Chapitre 3

Les Vecteurs

1. Notion de Vecteur

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'une unité de longueur

a. Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Définition

Soient deux points A et B du plan.

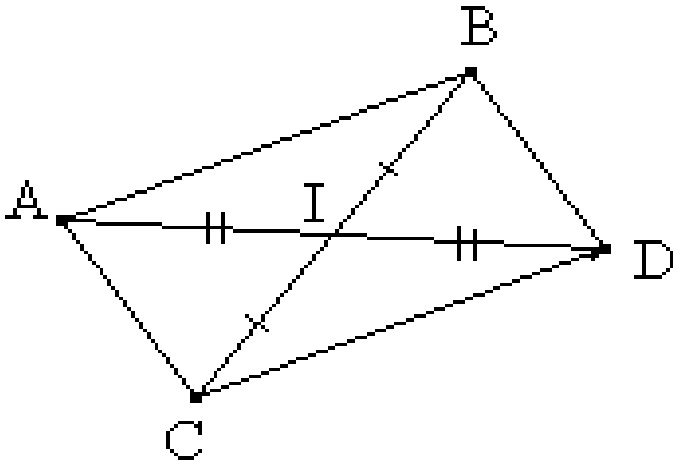
La **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ permet d'associer à tout point C du plan l'unique point D tel que (**ABDC**) soit un parallélogramme.

C'est-à-dire que les segments [BC] et [AD] ont le même milieu.

1. Notion de Vecteur

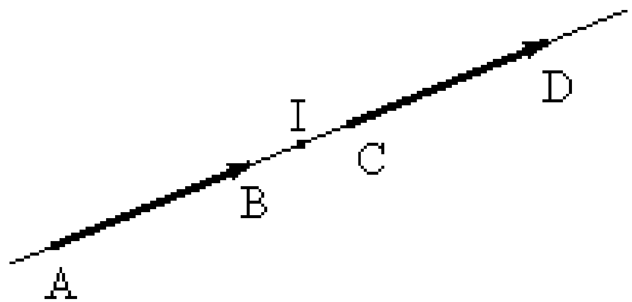
<u>1</u>

$\underline{1^{er}\text{ cas}}$: C ∉ (AB)



ABDC est un parallélogramme

$\underline{2^{eme}\text{ cas}}$: C ∈ (AB)



ABDC parallélogramme aplati

Note : B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Si A ≠ B, $\overrightarrow{AB}$ définit une direction, un sens et une longueur

(même direction, même sens, même longueur pour $\overrightarrow{CD}$)

1. Notion de Vecteur

b. **Vecteurs égaux**

Théorème

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à dire que

- D est l'image de C par la translation qui transforme A en B
- ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati)
- [AD] et [BC] ont même milieu

Exercice 1 : voir fiche TD3-1

1. Notion de Vecteur

c. **Représentants d'un vecteur**

A partir d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ on peut donc définir une infinité de vecteurs, tous égaux à $\overrightarrow{AB}$.

On peut donner un nom générique à tous ces vecteurs égaux par exemple : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

On dira que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$ (et $\overrightarrow{CD}$ un autre)

Exercice 2 : voir fiche TD3-1

1. Notion de Vecteur

d. **Vecteurs particuliers**

►**Le vecteur nul** $\vec{0}$: pour tout point M, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

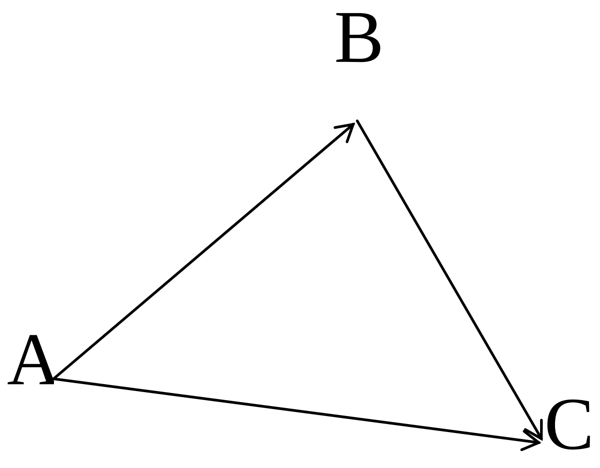
►**Le vecteur** $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur **opposé à** $\overrightarrow{AB}$; on le note $\overrightarrow{BA}$ = **-** $\overrightarrow{AB}$

Exercice 3 : voir fiche TD3-1

2. Somme de deux Vecteurs

B est l'image de A par la translation, de vecteur $\overrightarrow{AB}$
C est l'image de B par la translation, de vecteur $\overrightarrow{BC}$

Effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
revient à effectuer la translation
qui transforme directement A en C
c'est à dire la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



On note : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

Cette égalité s'appelle la **Relation de Chasles**.

2. Somme de deux Vecteurs

2.1. Définition

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

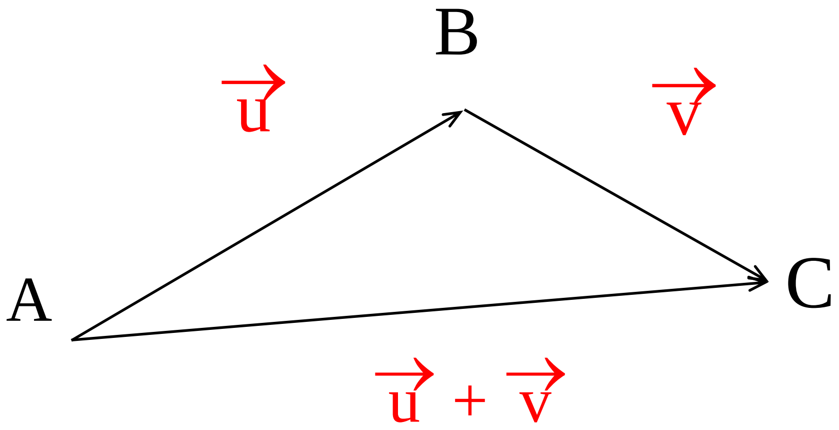
La **somme de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

On note ce vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

La relation de Chasles permet de transformer une somme de deux vecteurs en un seul vecteur, et réciproquement.

2. Somme de deux Vecteurs

2.2. Constructions



Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant donnés,
pour construire le vecteur somme
de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} + \vec{v}$:

- on choisit un point A.
- on construit le point B dans la translation de vecteur $\vec{u}$: on a $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$
- on construit le point C dans la translation de vecteur $\vec{v}$: on a $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

Exercice 4 : voir fiche TD3-1

2. Somme de deux Vecteurs

2.3. Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

- $\vec{u} + \overrightarrow{0} = \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

3. Produit d'un Vecteur par un nombre réel

a. Définition

Le produit d'un vecteur non nul $\vec{u}$
par un nombre réel positif non nul k est un vecteur noté $k\vec{u}$
de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{u}$,
mais dont la longueur est multipliée par k.

Si k est négatif, $k\vec{u}$ sera l'opposé de $(-k)\vec{u}$ (sens contraire)

Enfin si k = 0 ou si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ alors $k\vec{u} = \overrightarrow{0}$.

3. Produit d'un vecteur par un réel

b. **Propriétés**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k'

- $k\,\vec{u} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \overrightarrow{0}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$ et $(-1)\,\vec{u} = -\overrightarrow{u}$
- $k\,(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k\,(k'\,\vec{u}) = (k\,k')\,\vec{u}$
- $(k + k')\,\vec{u} = k\overrightarrow{u} + k'\,\vec{u}$

3. Produit d'un vecteur par un réel

c. **Définition**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si
il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Ex : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tels que $\vec{v} = 3\,\vec{u}$ et $\vec{w} = -6\,\vec{u}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ; $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires ;
enfin $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont aussi colinéaires car $\vec{w} = -2\,\vec{v}$

Deux possibilités :
si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction
si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} = k\vec{v}$ est possible pour $k = 0$ (quel que soit $\vec{v}$)
le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur

3. Produit d'un vecteur par un réel

d. **Théorème**

Soient A, B, C, D quatre points tels que $A \neq B \text{ et } C \neq D$

Les droites **(AB)** et **(CD)** sont parallèles équivaut à

les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ sont colinéaires.

$$\boxed{(\boldsymbol{AB}) \,//\, (\boldsymbol{CD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \,//\, \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}}$$

Attention :

Parallèle

Colinéaire

3. Produit d'un vecteur par un réel

Théorème (corollaire)

Trois points A, B, C sont alignés équivaut à

les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ sont colinéaires.

$$\boxed{\boldsymbol{A, B, C} \textbf{ sont alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \textbf{ sont colinéaires}}$$

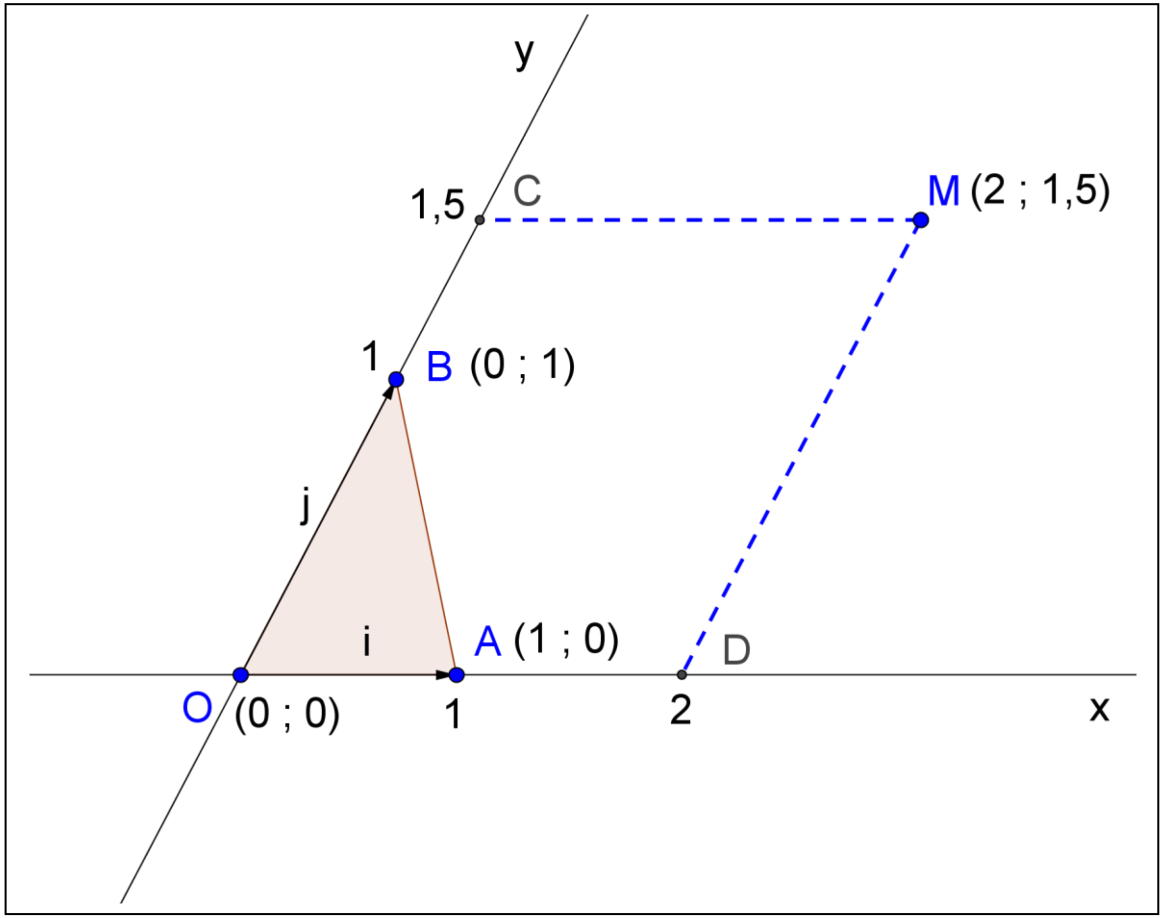
4. Vecteurs dans un repère

a. **Définition** : On définit un repère par un triangle **(AOB).**

O est l'origine du repère,

les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ donnent :

- les directions des axes,
- le sens des axes et
- les unités sur ces axes.



4. Vecteur dans un repère

Remarques :

OA et OB sont les unités de longueurs sur les axes.
On peut ainsi repérer tout point M à l'aide de ses coordonnées x et y.
x est l'abscisse de M ; y est l'ordonnée de M.
Dans l'exemple ci-dessus x = 2 et y = 1,5.

Le repère est orthogonal si le triangle (AOB) est rectangle en O.
Le repère est orthonormal si (AOB) est rectangle-isocèle en O.

On note en général $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}$ et le repère par **(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)**

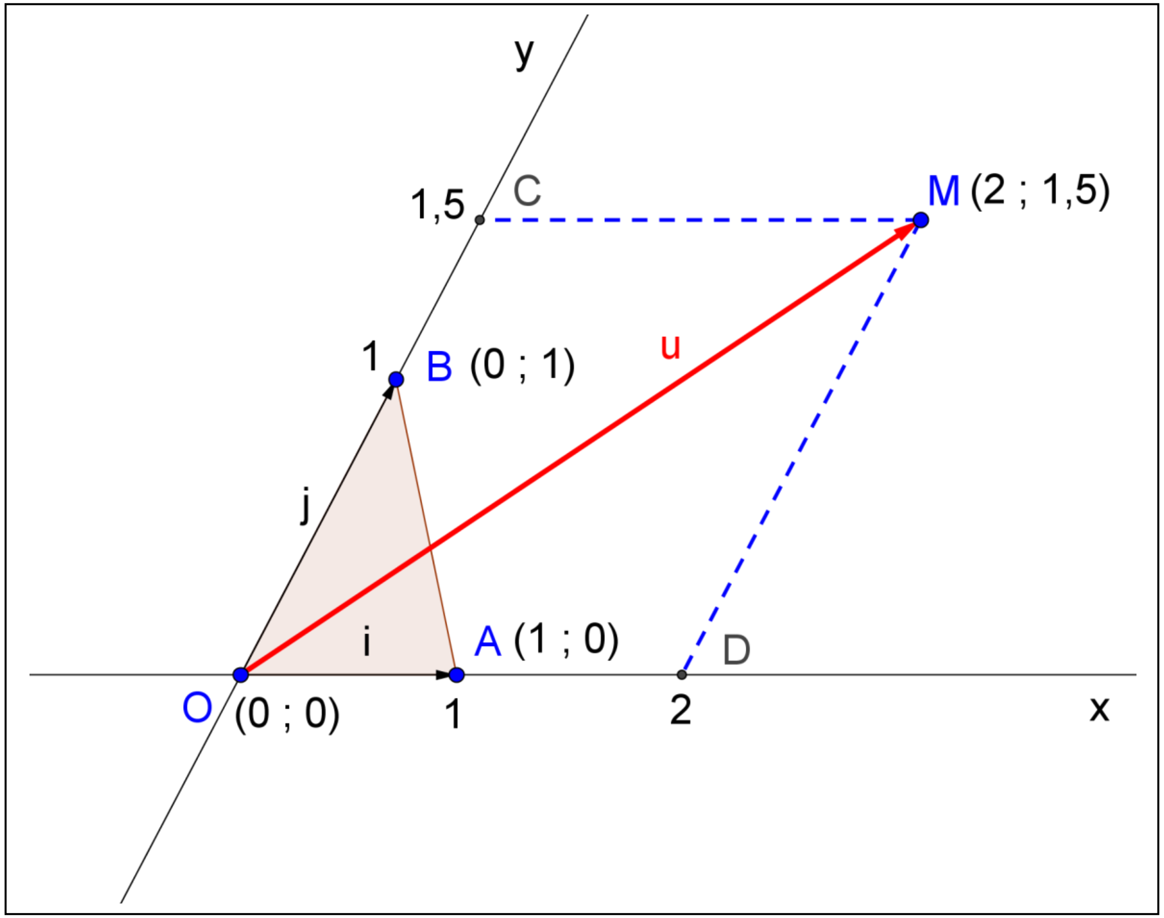
4. Vecteur dans un repère

4.2. Définition :

Soit un point M de coordonnées (x ; y) dans un repère **(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$),**
On dira que (x ; y) sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

Ex : M (2 ; 1,5)
donc $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ **(2 ; 1,5)**
et si $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ est noté $\vec{u}$.
$\vec{u}$ (2 ; 1,5)

Plus généralement,
tout vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$
a pour coordonnées (2 ; 1,5)
soit $\vec{v}$ (2 ; 1,5)



4. Vecteur dans un repère

4.3. Théorème :

Soit un point M de coordonnées (x ; y) dans un repère **(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$),**

Alors $\overrightarrow{OM}$ **= x $\vec{\imath}$ + y $\vec{\jmath}$** et réciproquement**.**

$$\boxed{M(x\,;\,y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\,(x\,;\,y)}$$

Ex : M (2 ; 1,5) équivaut à $\overrightarrow{OM} = 2\vec{\imath} + 1{,}5\vec{\jmath}$

Preuve par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = 2\vec{\imath} + 1{,}5\vec{\jmath}$$

4. Vecteur dans un repère

Théorème :

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si

ils ont mêmes coordonnées dans un repère **(O ; $\vec{\boldsymbol{i}}$; $\vec{\boldsymbol{j}}$),**

4. Vecteur dans un repère

4.4. Théorème :

Soit les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) dans un repère **(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$),**
le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$).

$$\boxed{\mathbf{A(x_A\ ;\ y_A)\ et\ B(x_B\ ;\ y_B)} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\ \mathbf{(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)}}$$

Ex : soit A(3 ; 2) et B(7 ; 1) alors $\overrightarrow{AB}$ **(4 ; -1)**

Preuve par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j}) - (x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j})$$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

4. Vecteur dans un repère

4.5. Théorème :

Les coordonnées de la somme de deux vecteurs sont égales
à la somme des coordonnées dans un repère **(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).**

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') dans un repère **(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$),**
et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors $\vec{w}$ (x + x' ; y + y')

Ex : $\vec{u}$ (4 ; 9) et $\vec{v}$ (7 ; -3) alors $\vec{w}$ **(11 ; 6)**

Preuve : $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y')
donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$
donc $\vec{u} + \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$

4. Vecteur dans un repère

Théorème :
Si on multiplie un vecteur par un réel k
ses coordonnées dans un repère **(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)** sont multipliées par k

Soit k un nombre réel et $\vec{u}$ (x ; y) dans un repère **(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$),**
et $\vec{w}$ = k $\vec{u}$ alors $\vec{w}$ (kx ; ky)

Ex : k = 5 et $\vec{u}$ (4 ; 9) alors $\vec{w}$ **(20 ; 45)**

Preuve : $\vec{u}$ (x ; y) donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
donc $k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) = kx\vec{i} + ky\vec{j}$

4. Vecteur dans un repère

4.6. Théorème :
Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées dans un repère **(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$),** sont proportionnelles.

Ex : $\vec{u}$ (8 ; 12) et $\vec{v}$ (2 ; 3) sont colinéaires (car $\frac{8}{2} = \frac{12}{3} = 4$: $\vec{u} = 4\vec{v}$)

$\vec{u}$ (4 ; 6) et $\vec{v}$ (2 ; -3) ne sont pas colinéaires ($\frac{4}{2} = 2 \neq \frac{6}{-3} = -2$)

4. Vecteur dans un repère

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') dans un repère **(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)** sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées vérifient la relation :

$$\boxed{\mathbf{xy' = yx' \quad ou \quad xy' - yx' = 0}}$$

Ex : $\vec{u}$ (8 ; 12) et $\vec{v}$ (2 ; 3) sont colinéaires

(car $8\times3 = 2\times12 = 24$ ou $8\times3 - 2\times12 = 0$)

$\vec{u}$ (4 ; -6) et $\vec{v}$ (2 ; 3) ne sont pas colinéaires

(car $4\times3 = 12 \neq -6\times2 = -12$ ou $4\times3 - (-6)\times2 = 24 \neq 0$)

5. Compléments

Théorème : dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$),

les coordonnées du milieu I du segments [AB] sont données par

$$\boxed{x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

ex : Soit A(4 ; 6) et B(8 ; 3) alors I(6 ; 4,5) est le milieu de [AB]

5. Compléments

Théorème : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

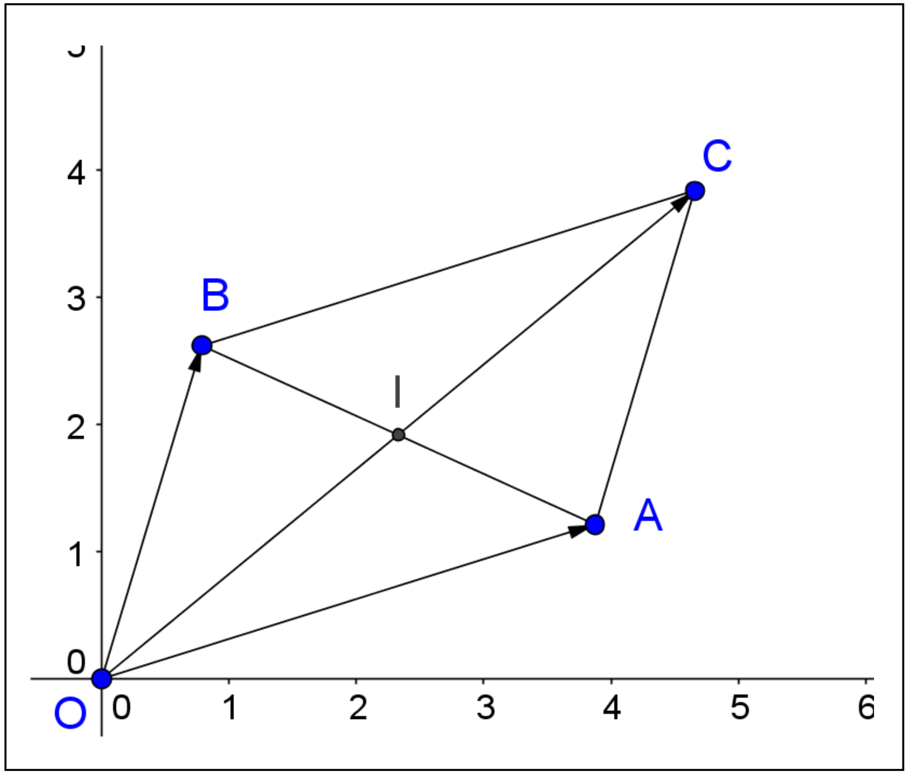
Preuve : on a : $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$

donc $\mathbf{x_C = x_A + x_B}$ **et** $\mathbf{y_C = y_A + y_B}$

ABDC est un parallélogramme

donc $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \mathbf{2}\ \overrightarrow{\boldsymbol{OI}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$

d'où $\mathbf{2x_I = x_A + x_B}$ et $\mathbf{2y_I = y_A + y_B}$



5. Compléments

Théorème : la distance de deux points est donnée dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ par

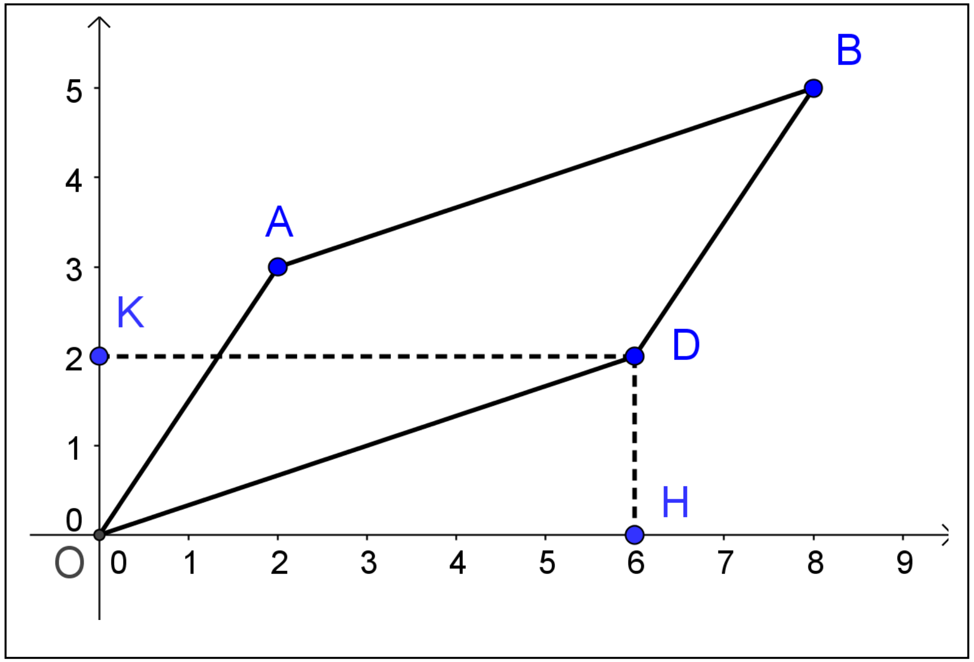
$$\boxed{\mathbf{AB} = \sqrt{(\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})^2 + (\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})^2}}$$

ex : A(4 ; 6) et B(8 ; 3) alors $AB = \sqrt{(8-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{25} = 5$

5. Compléments

Théorème : $\boxed{\mathbf{AB} = \sqrt{(\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})^2 + (\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})^2}}$

Preuve : D est tel que
OABD soit un parallélogramme



donc $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$ alors OD = AB
et $x_D = x_B - x_A$; $y_D = y_B - y_A$
or
$OD^2 = OH^2 + OK^2$ (Pythagore)
$OD^2 = x_D{}^2 + y_D{}^2$
d'où $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

5. Compléments

Formules à connaitre

Relation de Chasles : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\boxed{(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)}$

$\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\boxed{xy' = yx' \text{ ou } xy' - yx' = 0}$

I est Milieu de [AB] $\Leftrightarrow$ $\boxed{x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}}$

Distance AB : $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

FIN