

Chapitre 2

Les Fonctions

1. Notion de Fonction

Définition

Lorsque l'on associe à tout nombre x d'un ensemble de réels D un autre nombre **unique**, noté $f(x)$, on définit une fonction f sur D

Notation : $f : x \mapsto f(x)$ pour $x \in D$

On lit « f est la fonction qui à tout réel x de D associe le réel $f(x)$ »

1. Notion de Fonction

Vocabulaire

- D est **l'ensemble de définition** de la fonction f . On le note D_f
On dit aussi que la fonction f est définie sur l'ensemble D_f
- x est **la variable**
- le réel $f(x)$ est appelé **l'image de x** par la fonction f
- Si y est l'image de x par f alors x est **un antécédent** de y
par la fonction f

1. Notion de Fonction

Exemple

Dans l'activité 2-1 précédente (températures dans une journée) :

- la variable x représente le temps
- son image $f(x)$ représente la température associée à chaque instant
- $D_f = [0 ; 24]$
- L'image de 3 est -5 noté aussi $f(3) = -5$
- 8 et 20 sont des antécédents de 2 par f

1. Notion de Fonction

POINT METHODE

- ▶ pour trouver l'image de 9 sur le graphique

Placer 9 sur (Ox) ; tracer la droite verticale passant par 9.
et lire l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 9

- ▶ pour déterminer le(s) antécédents de 11 par f sur le graphique

Placer 11 sur (Oy) ; tracer la droite horizontale passant par 11.
et lire l'abscisse du (ou des) point(s) de la courbe d'ordonnée 11

1. Notion de Fonction

Remarques :

Chaque réel x de D a une et une seule image

Chaque réel y de \mathbb{R} peut avoir plusieurs antécédents ou ... aucun.

2. Comment définir une Fonction ?

Une fonction peut être définie sur D de trois manières différentes :

2. Comment définir une Fonction ?

2.1. Fonction donnée par une expression algébrique

Exemple

Soit g la fonction qui à tout réel x appartenant à $[-3 ; 5]$ associe le réel
 $-2x^2 + 4x + 5$

On note alors la fonction :

$g : x \mapsto -2x^2 + 4x + 5 ; \text{ pour } x \in [-3 ; 5]$
soit $g : x \mapsto g(x) ; \text{ pour } x \in [-3 ; 5]$

2. Comment définir une Fonction ? Par une formule.

L'image de x est $g(x) = -2x^2 + 4x + 5$

► Pour calculer l'image du réel 3 on remplace x par 3 soit

$$g(3) = -2 \times 3^2 + 4 \times 3 + 5 = -2 \times 9 + 12 + 5 = -18 + 17 = -1$$

$g(3) = -1$ donc 3 est un antécédent de -1 par g

► Pour chercher les antécédents éventuels de 5,
on résout l'équation $g(x) = 5$

2. Comment définir une Fonction ?

2.2. Fonction donnée par une courbe

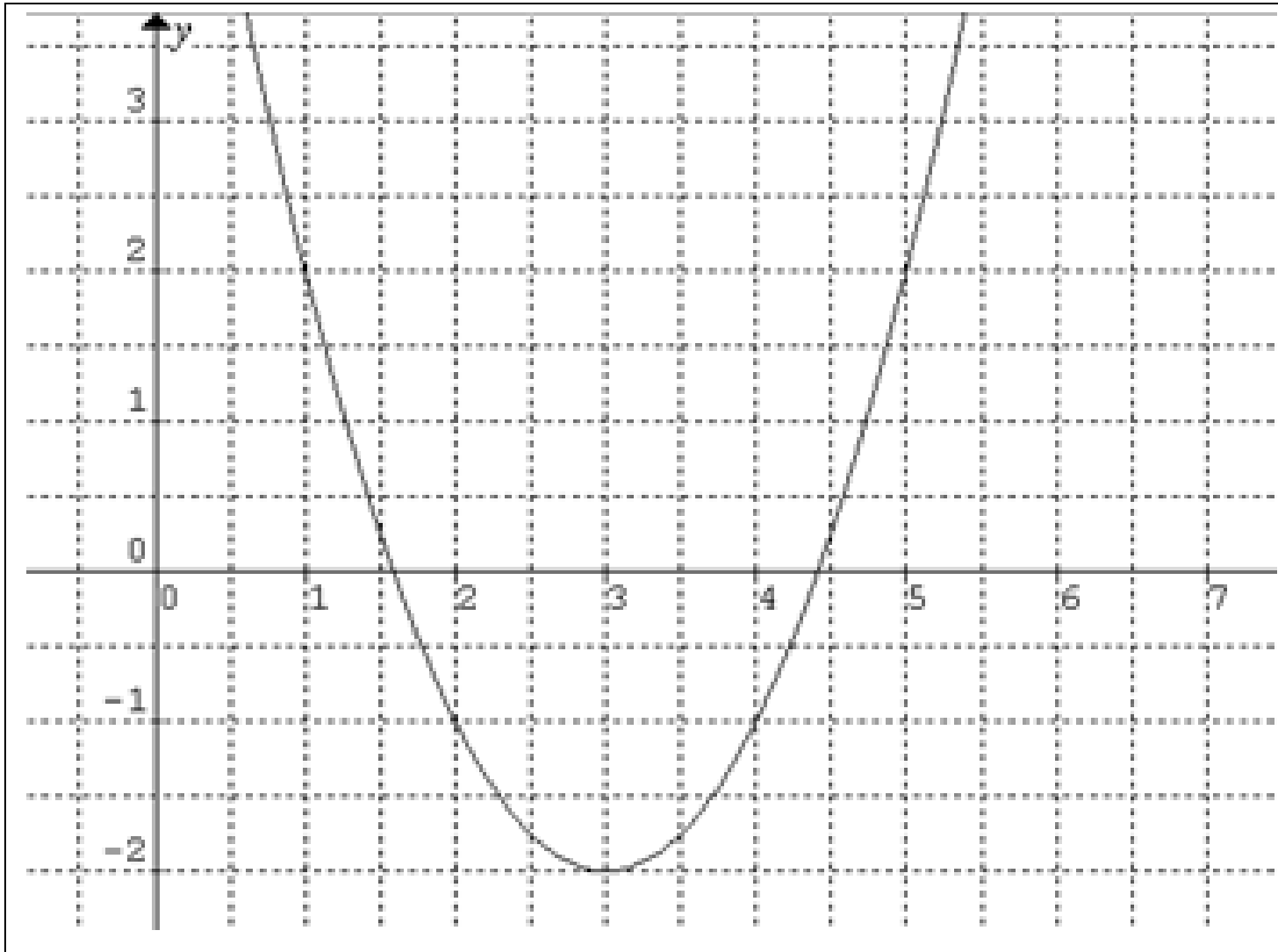
Un repère (O, I, J) du plan étant fixé

Définition

La **courbe représentative** d'une fonction f , notée C_f ,
est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y)
tels que x appartienne à l'ensemble de définition D_f
et y soit l'image de x par la fonction f

$$\mathbf{x \in D_f \text{ et } y = f(x)}$$

2. Comment définir une Fonction ? Par une courbe



Remarque :

une courbe représente
une fonction quand
aucune parallèle à l'axe
des ordonnées (Oy)
ne coupe la courbe
plus d'une fois

← Axe des abscisses.
Axe des antécédents

$$D_f = [0,6 ; 5,4]$$

2. Comment définir une Fonction ? Par une courbe.

Propriété

Un point de coordonnées (a , b) appartient à C_f
si et seulement si le réel a appartient à D_f **et** $b = f(a)$

$$\mathbf{a \in D_f \text{ et } b = f(a)}$$

Exemple :

La courbe précédente représente la fonction $f : x \mapsto x^2 - 6x + 7$
définie sur $] 0,6 ; 5,4 [$

Le point $(1 ; 2)$ appartient à C_f car $1 \in] 0,6 ; 5,4 [$ et $f (1) = 2$

2. Comment définir une Fonction ?

2.3. Fonction donnée par un tableau de valeurs

On donne un tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	11	4	-1	-4	-5	-4	-1	4

1ere ligne : ligne des antécédents, des abscisses.

2eme ligne : ligne des images, des ordonnées.

3. Utilisation de la Calculatrice

Obtention d'un tableau de valeurs – Construction de la courbe

Représentation graphique de la fonction définie sur [-2 ; 5] par

$$f(x) = x^2 - 4x - 1$$

Attention : Une lecture graphique donne le plus souvent des valeurs approchées.

3. Utilisation de la Calculatrice

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 ; D_f = [-2 ; 5]$$

Action	TI 83 Premium CE	Remarques
Saisie de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x - 1$	touche f(x) puis ligne Y1= taper : $x^2 - 4x - 1$ ENTER	pour les variables utiliser la touche X,T,θ,n
Obtention d'un tableau de valeurs	touches 2nd + déf table : configurer Début table = donner la valeur initiale : -2 $\Delta Tbl =$ donner le pas : 1 touches 2 nd + table : afficher le tableau	Tester $\Delta Tbl = 0.1$
Tracé de la courbe représentative	touche fenêtre : donner les valeurs de $Xmin = -2, Xmax = 5, Xgrad = 1$ $Ymin = -6, Ymax = 11, Ygrad = 1$ touche graphe pour afficher la courbe	Tester $Xgrad = 0.5$ et $Ygrad = 2$

4. Résolution graphique d'équations

4.1. Résoudre une équation du type $f(x) = k$, (k nombre réel)

Résoudre l'équation $f(x) = k$, k réel,

c'est chercher les nombres x qui ont pour image k

Graphiquement, cela revient à trouver les abscisses des points de C_f qui ont k pour ordonnée

Ces points sont nécessairement sur la droite (d) d'équation $y = k$

donc le nombre de solution est égal

au nombre de points d'intersection de C_f et (d)

4. Résolution graphique d'équations : $f(x) = k$

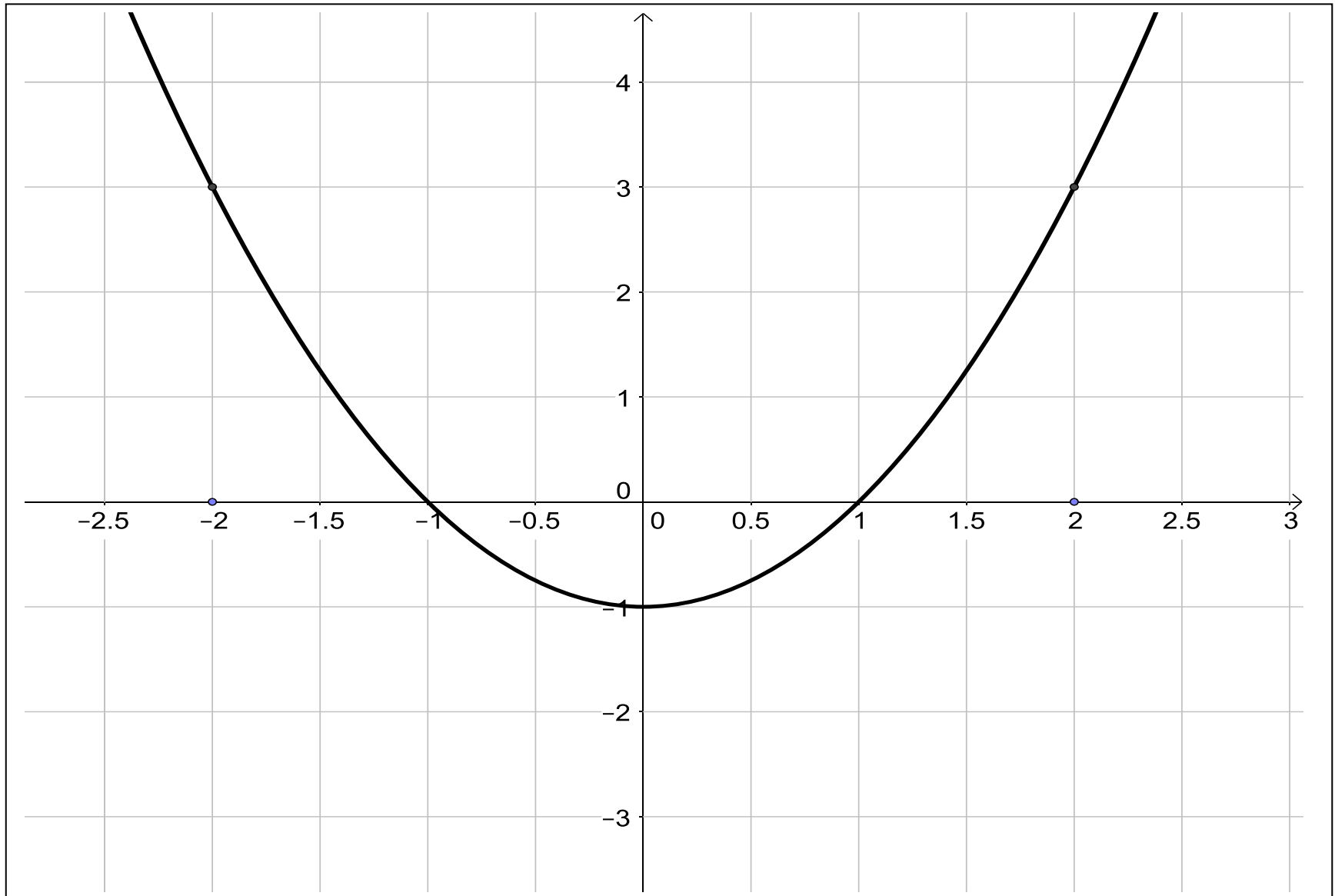
Exemple

$$f(x) = x^2 - 1$$

Résoudre

$$f(x) = 3$$

$$f(x) = -3$$



4. Résolution graphique d'équations : $f(x) = k$

Résoudre graphiquement $f(x) = 3$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points de C_f
d'ordonnée 3.

Donc les solutions sont -2 et 2.

On note $S = \{-2; 2\}$

(dessiner la droite (d) : $y=3$ et faire apparaître les solutions en pointillés)

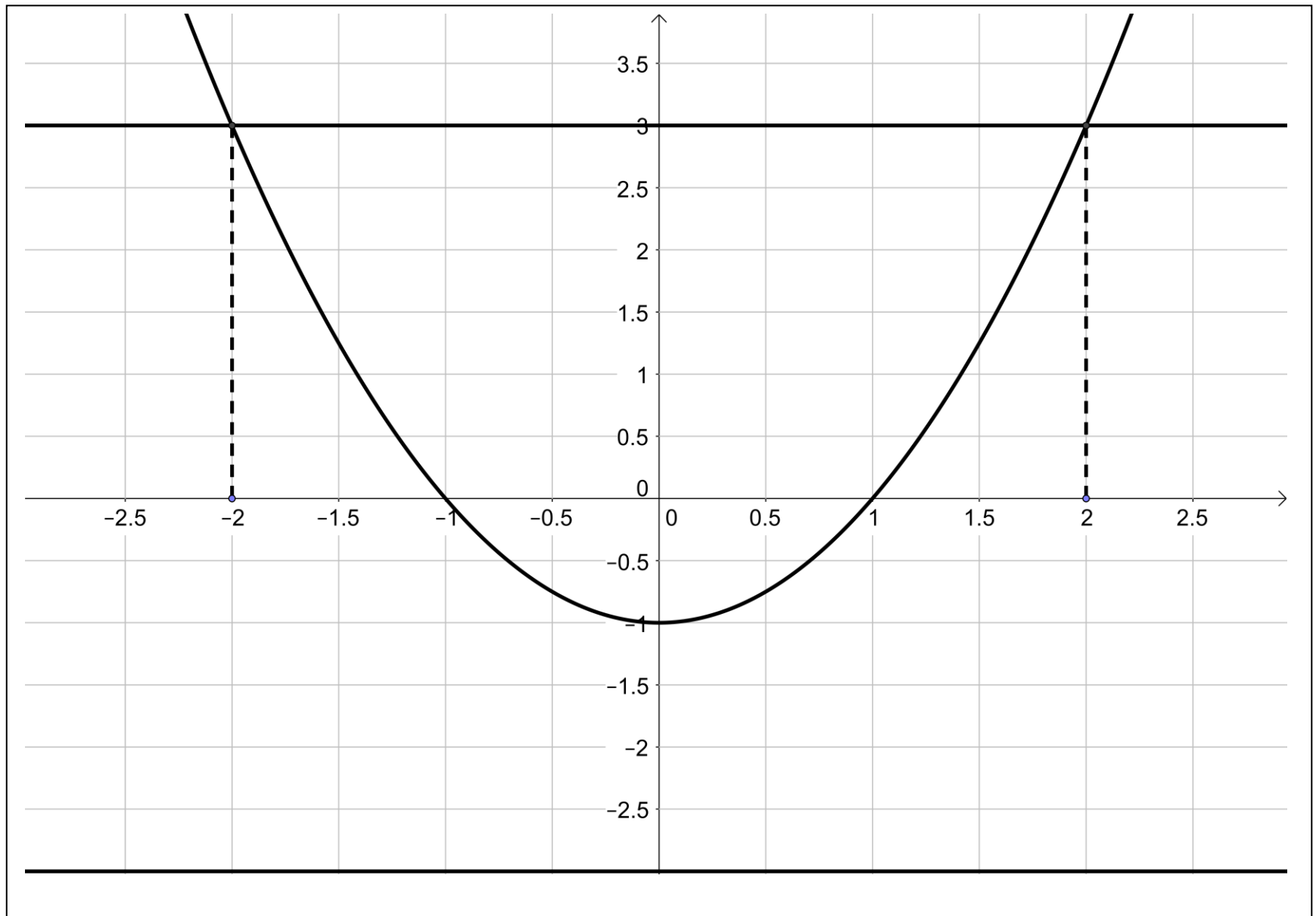
Résoudre graphiquement $f(x) = -3$

La droite d'équation $y = -3$ ne rencontre pas C_f .

Donc l'équation n'a pas de solution. On note $S = \emptyset$

4. Résolution graphique d'équations : $f(x) = k$

$f(x) = 3$



$f(x) = -3$

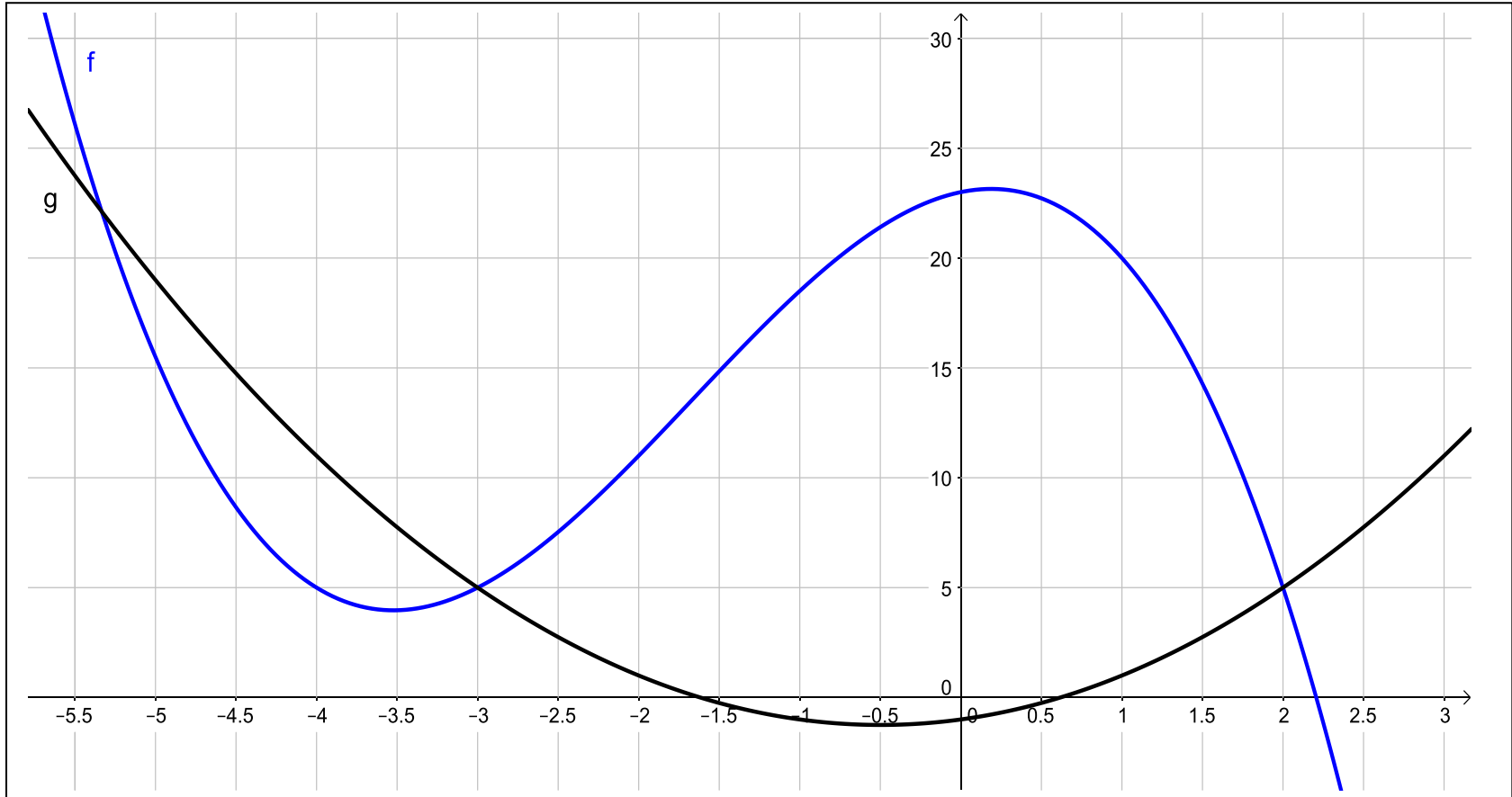
4.2. Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, c'est chercher les nombres x qui ont même image par f et par g

Graphiquement, cela revient à trouver les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g

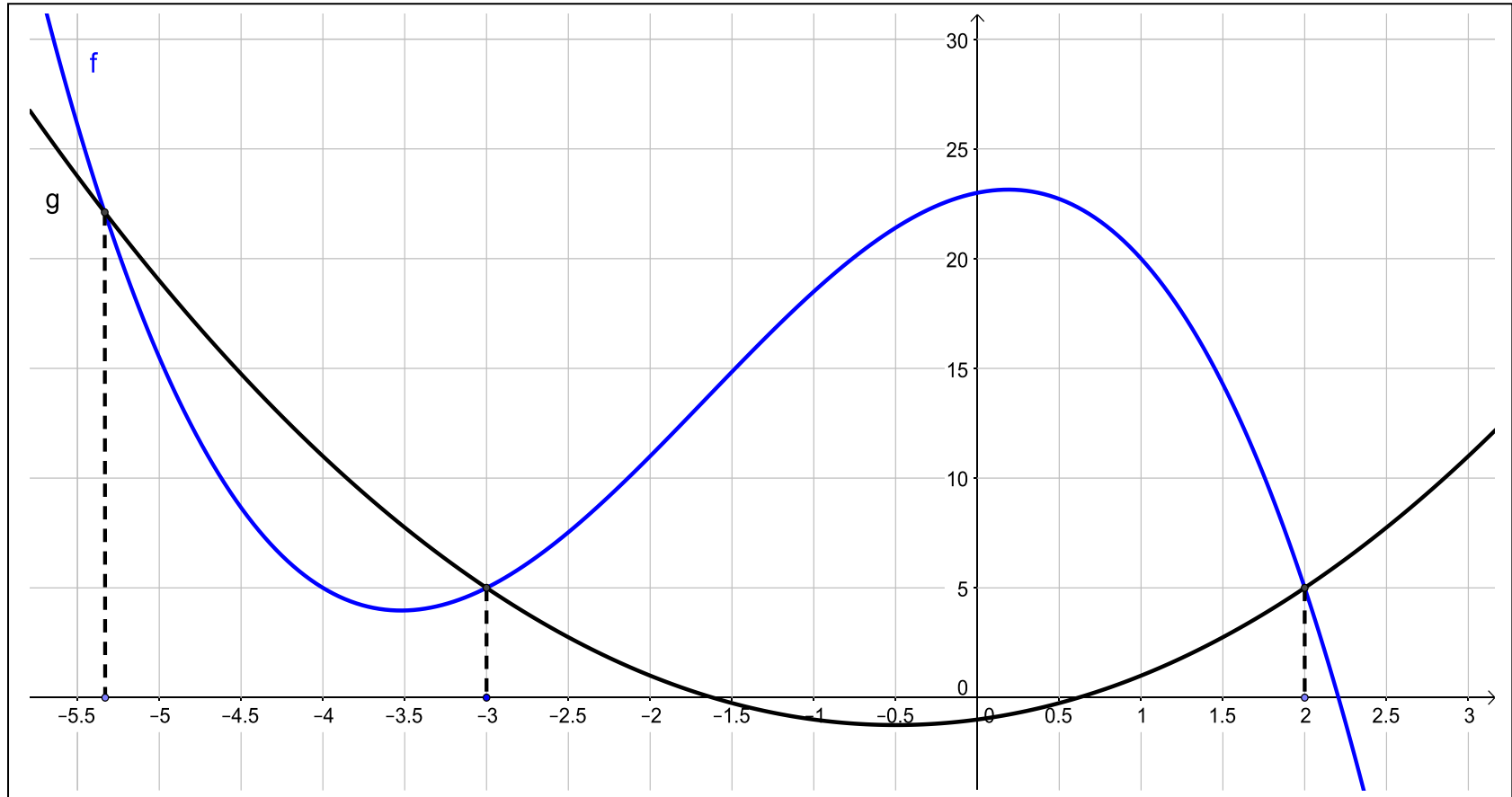
4. Résolution graphique d'équations : $f(x) = g(x)$

Exemple



4. Résolution graphique d'équations : $f(x) = g(x)$

Exemple



Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g . Donc les solutions sont $-5,3$, -3 et 2 : $S = \{-5,3 ; -3 ; 2\}$

5. Résolution graphique d'inéquations

5.1. Résoudre graphiquement $f(x) \geq k$ où k est un réel

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$, c'est chercher les nombres x qui ont une image supérieure ou égale à k

Graphiquement, cela revient à trouver les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à k

Ces points sont au dessus de la droite d'équation $y = k$

5. Résolution graphique d'inéquations : $f(x) \geq k$

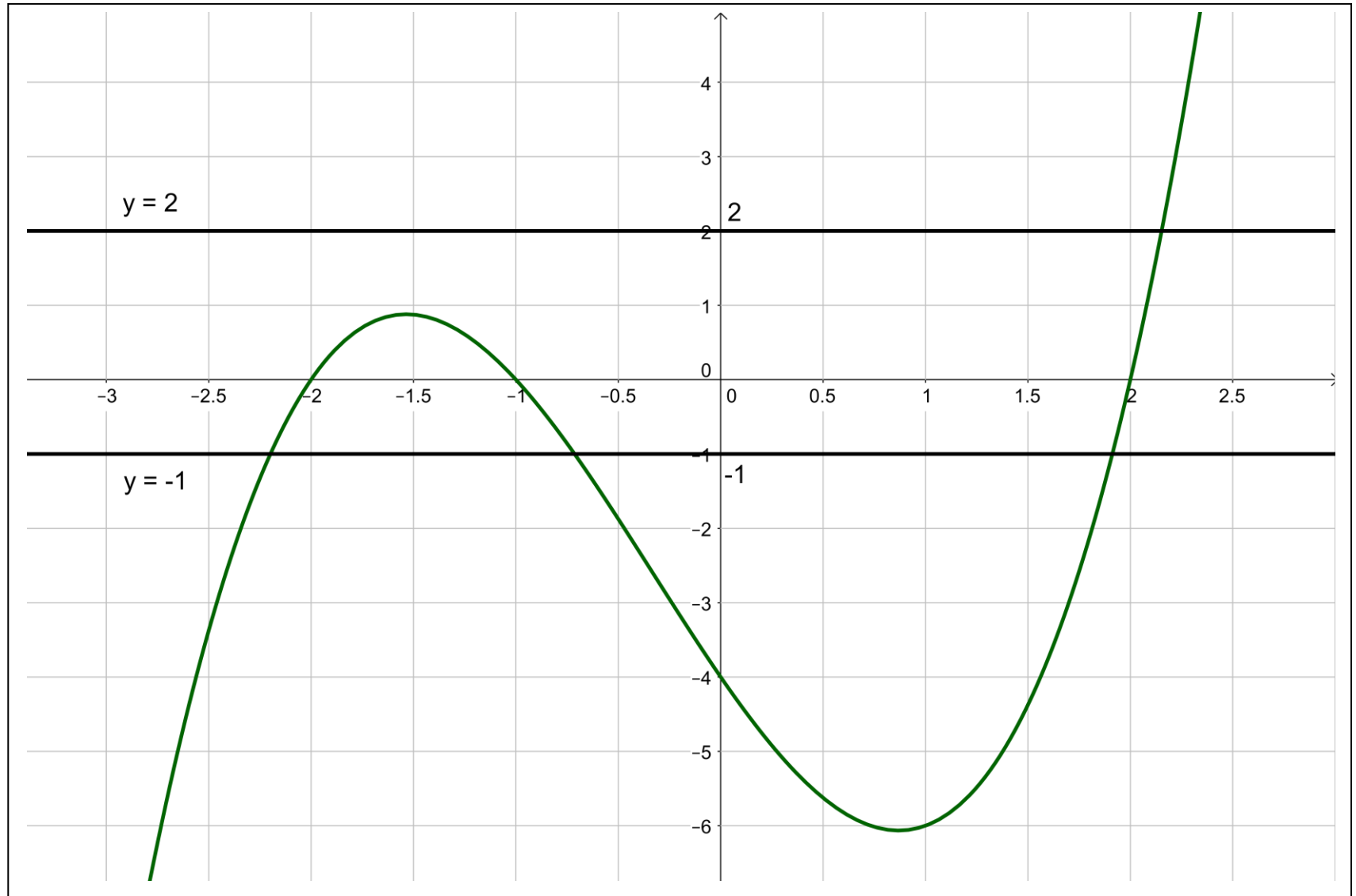
Exemple

Résoudre

$$f(x) \geq 2$$

et

$$f(x) < -1$$



5. Résolution graphique d'inéquations : $f(x) \geq k$

Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$

Je trace la droite (d) d'équation $y = 2$

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de C_f situés au dessus ou sur la droite (d)

Donc l'ensemble des solutions est $[2,2 ; +\infty [$

Résoudre graphiquement $f(x) < -1$

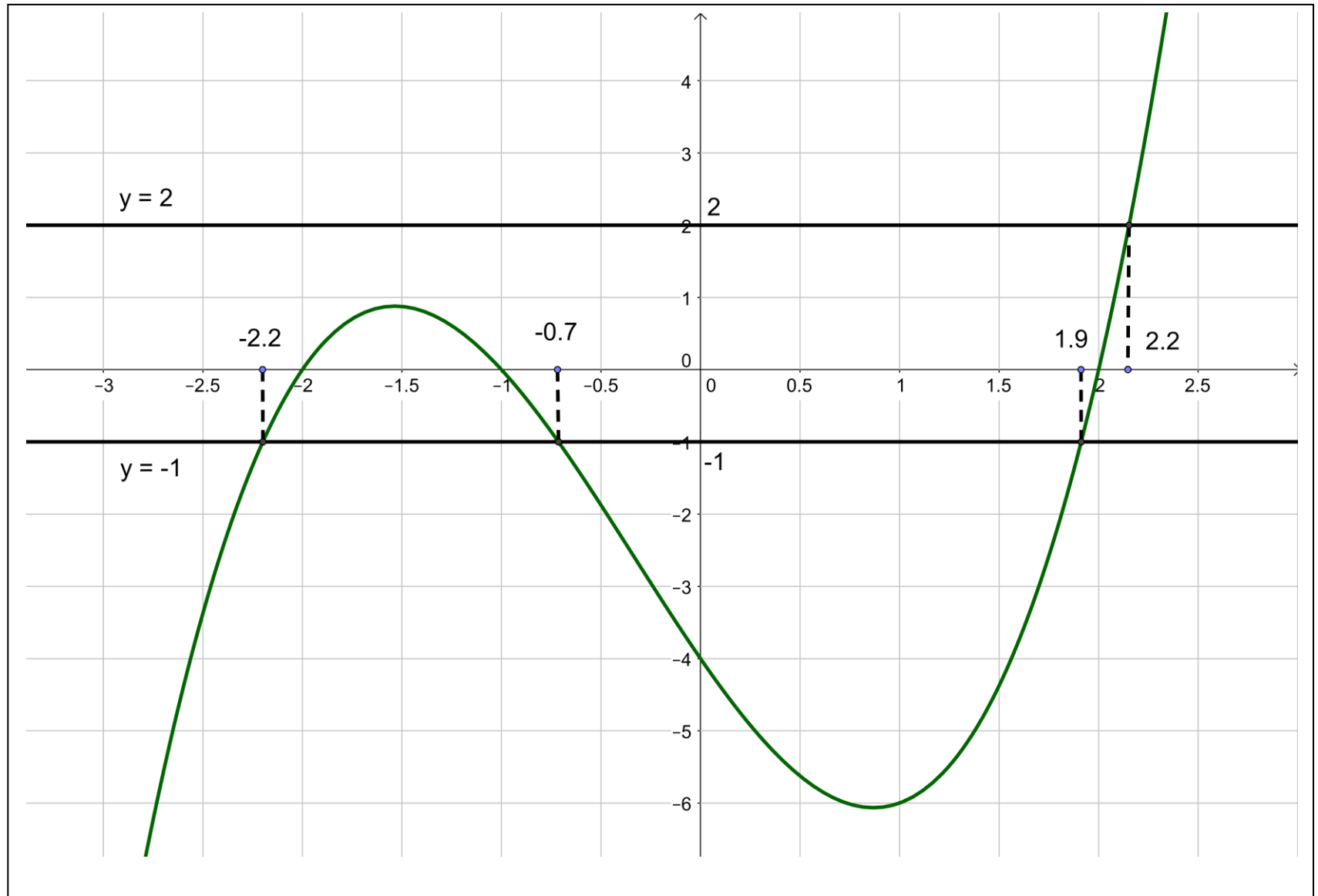
Je trace la droite (d) d'équation $y = -1$

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de C_f situés au dessous ou sur la droite (d)

Donc l'ensemble des solutions est $] -\infty ; -2,2 [\cup] -0,75 ; 1,9 [$

5. Résolution graphique d'inéquations : $f(x) \geq k$

Exemple



**5.2. Résoudre $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$,
c'est déterminer les signes d'une fonction**

Graphique ci-dessus

Résoudre graphiquement $f(x) > 0$

les solutions sont les abscisses des points de C_f situés au dessus de l'axe des abscisses,

$$S =] -2 ; -1 [\cup] 2 ; +\infty [$$

Résoudre graphiquement $f(x) < 0$

les solutions sont les abscisses des points de C_f situés au dessous de l'axe des abscisses,

$$S =] -\infty ; -2 [\cup] -1 ; 2 [$$

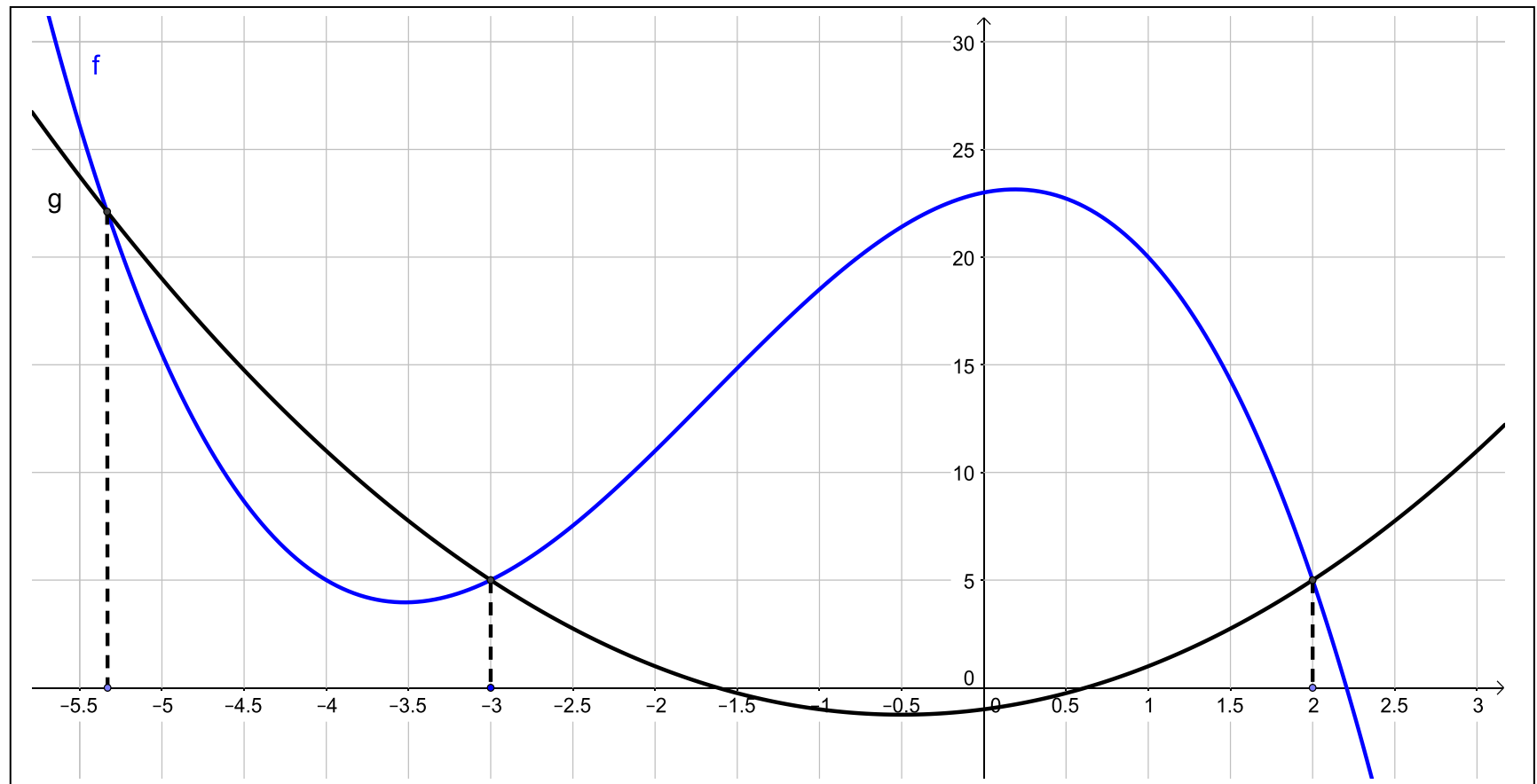
5.2. Résolution graphique d'une équation (signes d'une fonction)

On résume cette recherche dans un tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$		
Signe de f(x)	-	0	+	0	-	0	+

5.3. Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$.

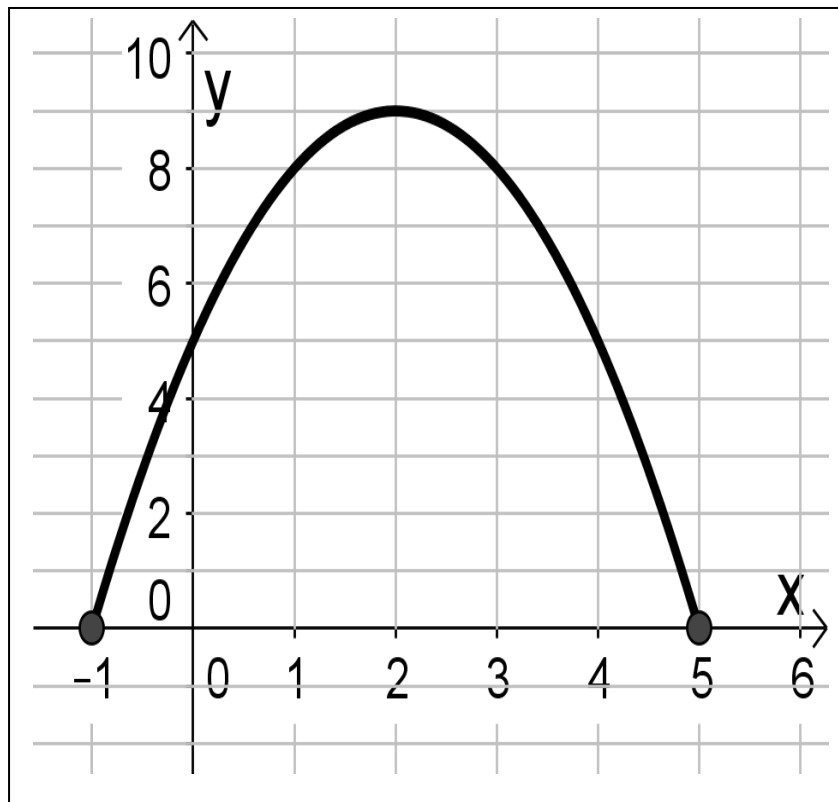
Les solutions sont les abscisses des points de C_f situés au dessus ou sur C_g



L'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -\infty ; -5,3] \cup [-3 ; 2]$

6. Variation de fonctions

6.1. Définition intuitive.



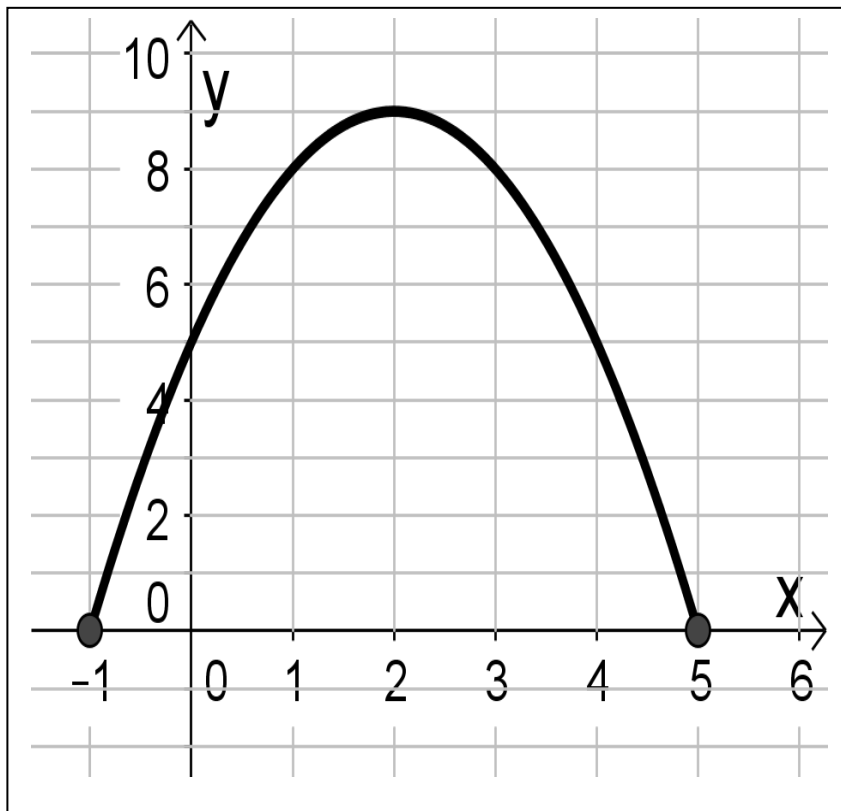
Observons la courbe :

Pour quelles valeurs de x
(sur quel intervalle)
la courbe "monte-t-elle" ?

Sur quel intervalle
la courbe "descend-elle" ?

6. Variation de fonctions

6.1. Définition intuitive.



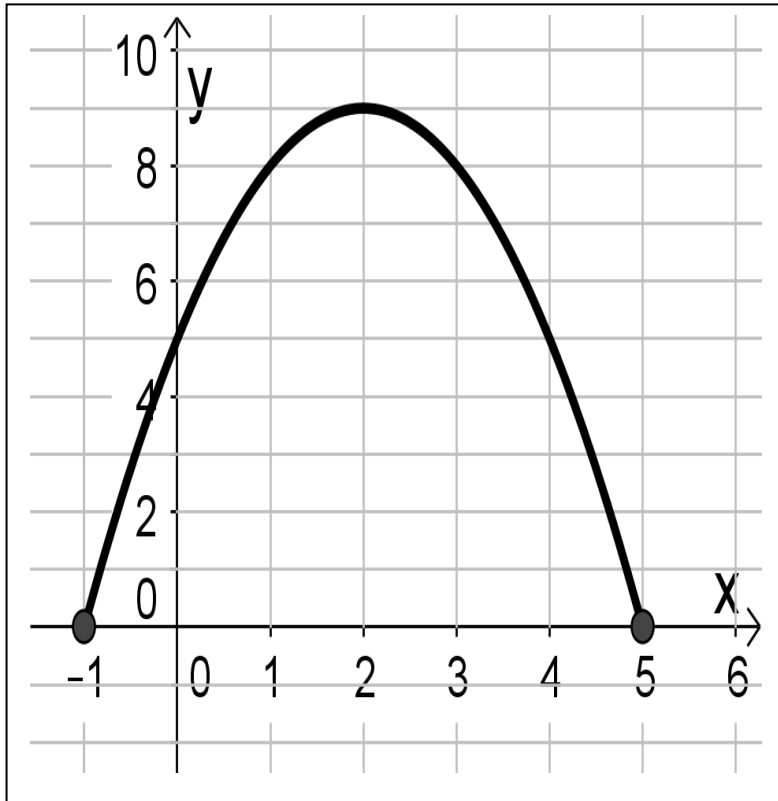
Observons les courbes :

La courbe "monte" sur $[-1 ; 2]$
c'est-à-dire pour $x \in [-1 ; 2]$

La courbe "descend" sur $[2 ; 5]$
c'est-à-dire pour $x \in [2 ; 5]$

6. Variation de fonctions

6.1. Définition intuitive.



La courbe "monte" pour $x \in [-1 ; 2]$
cela signifie que,
si on suit la courbe de gauche à droite,
x augmente entre -1 et 2
alors **y augmente** lui aussi

La courbe "descend" pour $x \in [2 ; 5]$
cela signifie que,
si on suit la courbe de gauche à droite,
x augmente entre 2 et 5
alors **y diminue**

6. Variation de fonctions

6.2. Définition rigoureuse.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , de courbe C_f .

Dire que la fonction f est strictement **croissante sur I** signifie que pour tous réels a et b de I , on a :

$$\text{si } a < b \text{ alors } f(a) < f(b)$$

Les nombres **$f(a)$ et $f(b)$** sont rangés dans le **même ordre** que **a et b** :
on dit que la fonction **f conserve l'ordre**

6. Variation de fonctions

Définition rigoureuse.

f est strictement **croissante sur I** : pour tous réels a et b de I , on a :

$$\text{si } a < b \text{ alors } f(a) < f(b)$$

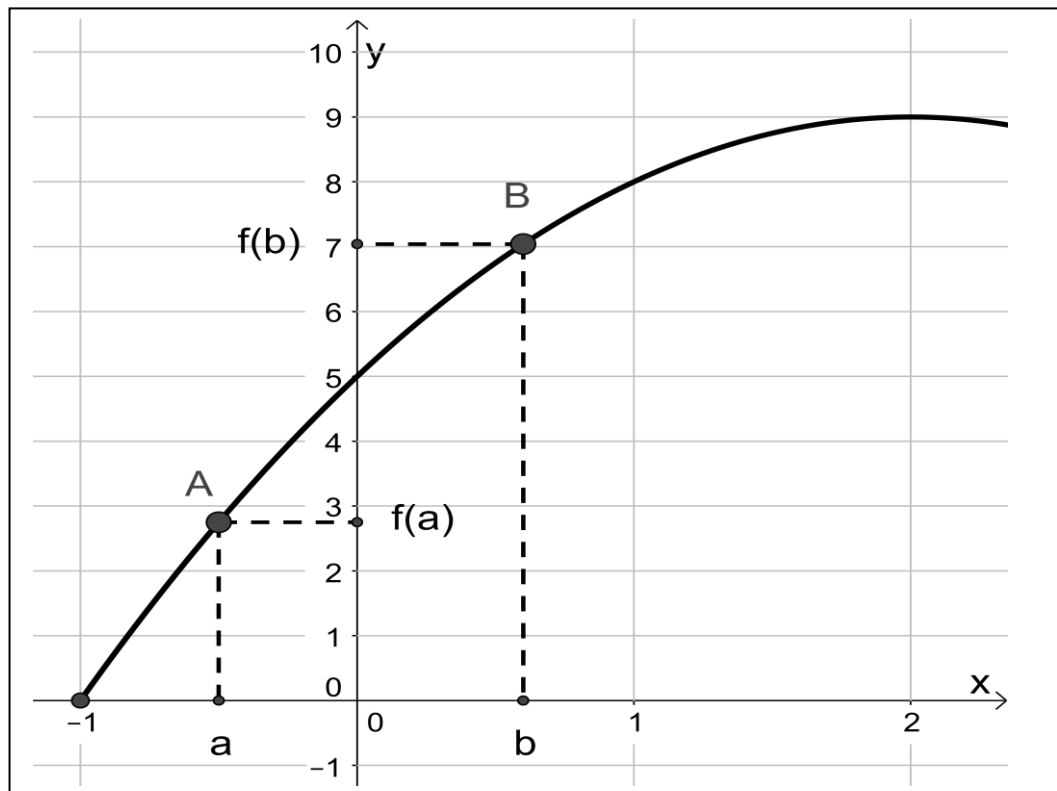


Illustration :

$f(a)$ et $f(b)$ sont rangés
dans le **même ordre**
que a et b :
la fonction f
conserve l'ordre

6. Variation de fonctions

Définition rigoureuse.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , de courbe C_f .

Dire que la fonction f est strictement **décroissante sur I** signifie que pour tous réels a et b de I , on a :

$$\text{si } a < b \text{ alors } f(a) > f(b)$$

Les nombres **$f(a)$ et $f(b)$** sont rangés dans l'**ordre** contraire de **a et b** :
on dit que la fonction **f change l'ordre**

6. Variation de fonctions

Définition rigoureuse.

f est strictement décroissante sur I : pour tous réels a et b de I , on a :

$$\text{si } a < b \text{ alors } f(a) > f(b)$$

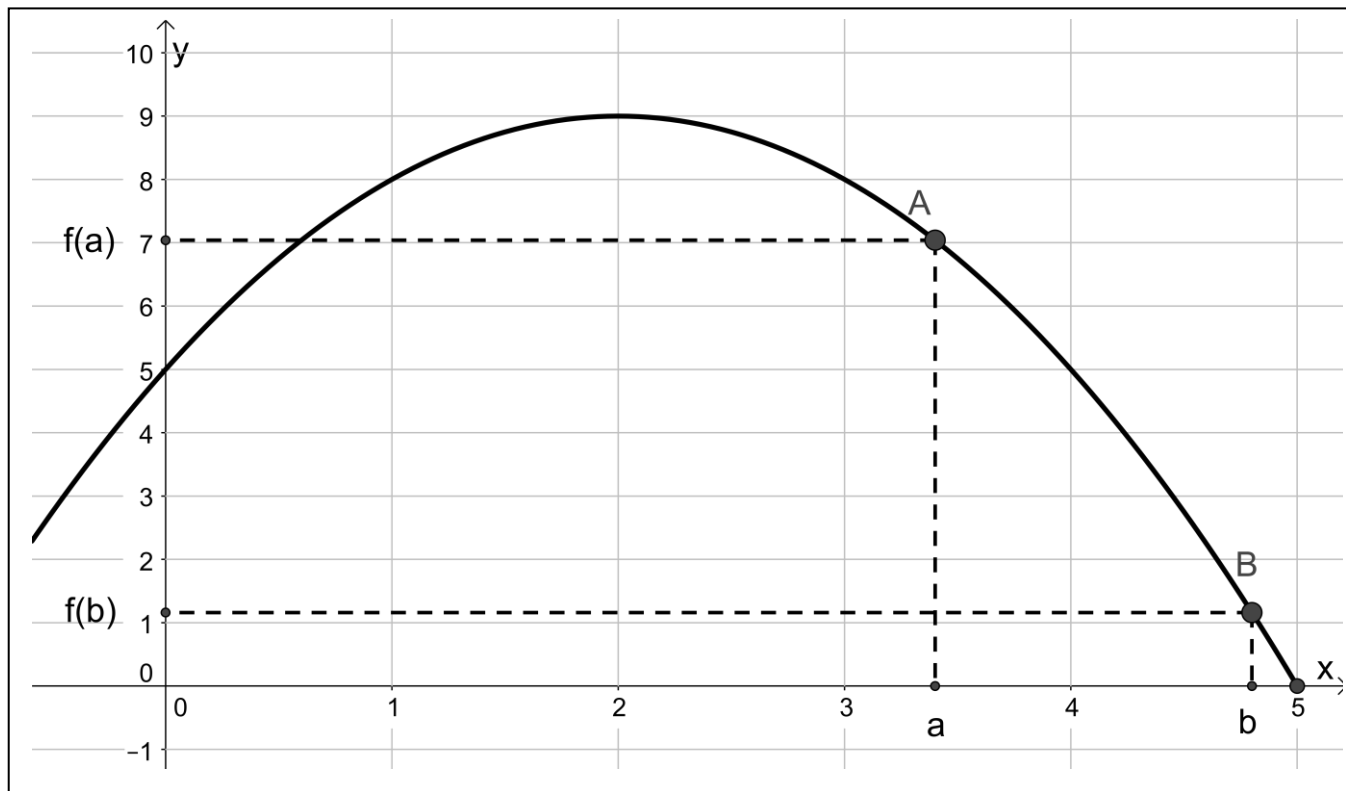


Illustration :

$f(a)$ et $f(b)$ sont rangés
dans l'**ordre contraire**

de a et b :

la fonction f
change l'ordre

6. Variation de fonctions

Définition rigoureuse.

Remarque :

f est constante **sur I** si pour tous réels a et b de I , on a : $\boxed{f(a) = f(b)}$

Remarque : Attention !!!



Pour prouver la croissance (resp décroissance) d'une fonction sur un intervalle I donné il faut prouver que les sens des inégalités est conservé (resp changé) pour tous les couples $(a ; b)$ de réels de I .

Un exemple ne suffit pas.

6. Variation de fonctions

6.3. Etude des variations d'une fonction f

c'est déterminer

les intervalles où la fonction est strictement croissante,

les intervalles où la fonction est strictement décroissante

les intervalles où la fonction est constante

On résume les résultats de l'étude des variations dans un


tableau de variations

6. Variation de fonctions

6.3. Etude des variations d'une fonction f

Exemple : tableau de variations de la fonction f étudiée en 6.2.

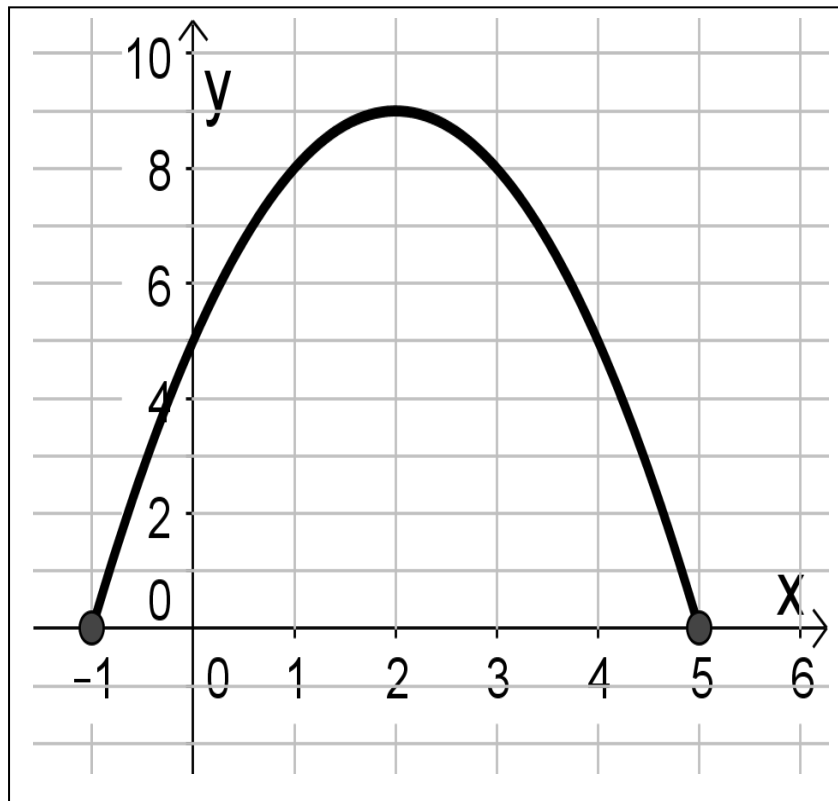
x	-1	2	5
f	0	9	0



Application : dresser les tableaux de variation des fonctions données par les courbes du polycopié.

7. Extremum d'une fonction

7.1. Définition intuitive.



Observons la courbe :

Quelle est l'abscisse, a
du point le plus haut ?

Quelle est son ordonnée $f(a)$?

Même question pour
le ou les points les plus bas.

7. Extremum d'une Fonction

7.2. Définition rigoureuse :

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I .

Le réel $f(a)$ est le maximum de f sur I si **pour tout x de I , $f(x) \leq f(a)$**

On dit que la fonction f admet un maximum en a sur I .

Exemple : pour la fonction précédente

9 est le maximum de f sur $[-1 ; 5]$;

il est atteint en 2 (c'est-à-dire pour $x = 2$)

7. Extremum d'une Fonction

De même :

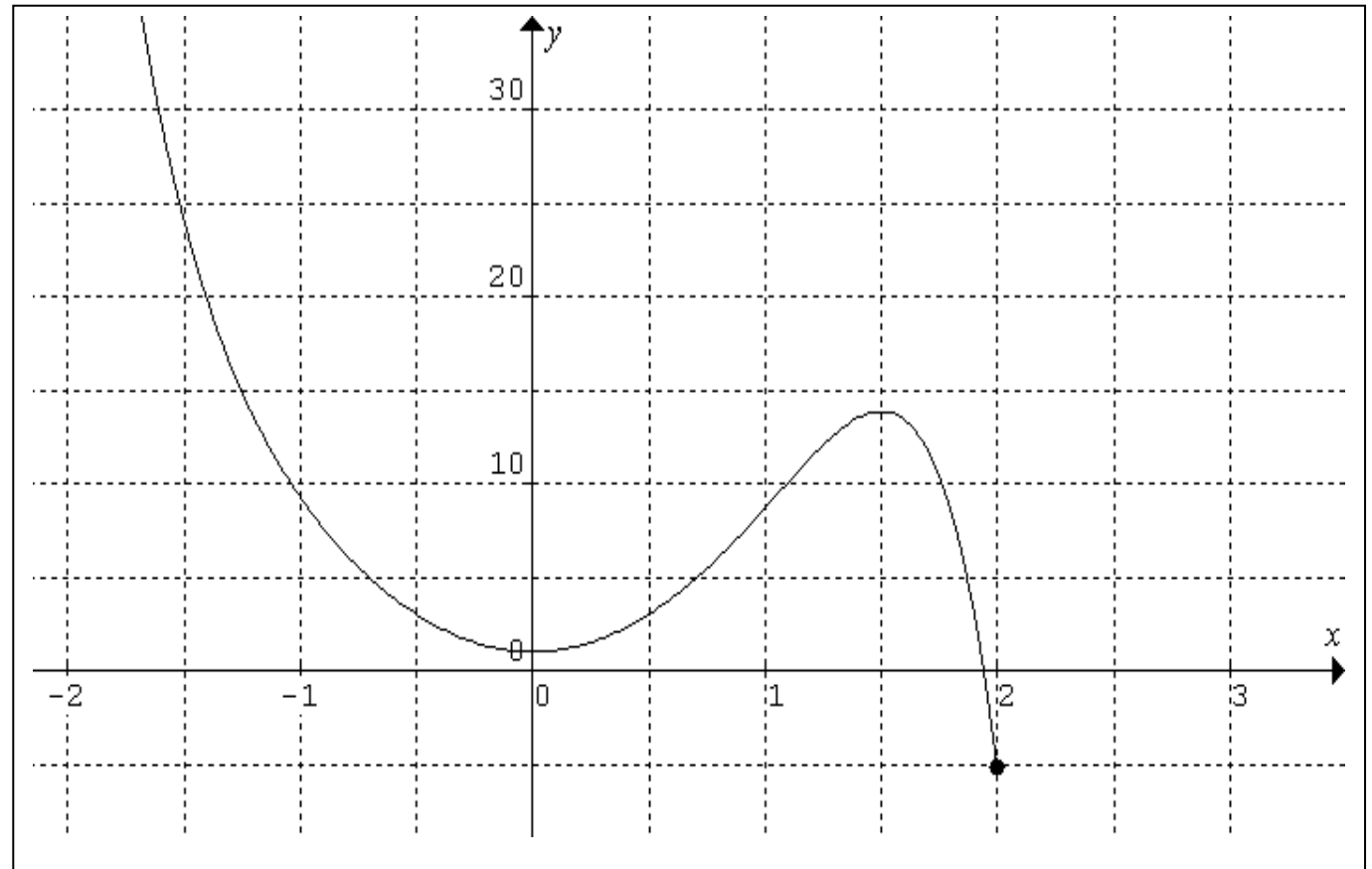
Le réel $f(a)$ est le minimum de f sur I si **pour tout x de I , $f(x) \geq f(a)$**

On dit que la fonction f admet un minimum en a sur I .

Exemples :

-5 est le minimum
de f sur $[-2 ; 2]$;
il est atteint en 2.

1 est le minimum
de f sur $[-1 ; 1]$;
il est atteint en 0.



7. Extremum d'une Fonction

Remarque : l'intervalle est essentiel.

Remarque : un extremum est soit un maximum soit un minimum.

FIN