CHAPITRE 12 Vecteurs

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Vecteurs Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé. Égalité de deux vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.	• Savoir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.	À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu.
Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Somme de deux vecteurs.	• Connaître les coordonnées $(x_B - x_A\ ;y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$. • Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.	La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
Produit d'un vecteur par un nombre réel.	• Utiliser la notation $\lambda\vec{u}$. • Établir la colinéarité de deux vecteurs.	Pour le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\ ; b)$ dans un repère, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a\ ; \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.
Relation de Chasles.	• Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. • Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	

B Notre point de vue

Les notions de translation et de vecteurs sont nouvelles. Pour aborder ce chapitre, il est nécessaire que les élèves aient revu les propriétés du parallélogramme (**Rappels du collège** et **Cours 3** du **chapitre 10**) et appris ce qu'est un repère du plan et comment calculer les coordonnées du milieu d'un segment et la distance de deux points (**Cours 1** du **chapitre 10**).

L'**activité 1** permet d'introduire la définition de la translation qui transforme un point A en un point B, ainsi que le vecteur associé à cette translation. Le tracé d'un quadrilatère et de son image par une translation permet d'évoquer (mais ce sera la seule fois dans ce chapitre) la direction, le sens et la longueur d'un vecteur.

Les coordonnées d'un vecteur dans un repère sont rapidement introduites, l'objectif étant essentiellement de travailler dans un repère, et d'utiliser les vecteurs pour démontrer certaines propriétés d'une figure.

L'**activité 3** permet d'introduire la somme de deux vecteurs ainsi que la relation de Chasles. Le calcul des coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ est admis dans le cours et démontré dans l'**exercice 65**.

L'**activité 4** introduit, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, la définition du produit d'un vecteur par un réel. Conformément au programme, le vecteur $k\vec{u}$ n'est défini que par ses coordonnées dans un repère. Aussi, il ne sera jamais demandé dans ce chapitre de représenter un vecteur de la forme $k\vec{u}$ sans avoir au préalable effectué le calcul de ses coordonnées (excepté pour les vecteurs $-\vec{u}$, $2\vec{u}$ et $3\vec{u}$). En ce qui concerne la colinéarité de deux vecteurs, nous n'avons utilisé, ni la proportionnalité des coordonnées, ni la condition de colinéarité, cette dernière n'étant qu'au programme de Première Scientifique.

Les exercices « **Pour démarrer** » et « **Pour s'entraîner** » sont progressifs et conformes à l'esprit du programme.
Les objectifs sont les suivants : utiliser les vecteurs pour déterminer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, qu'un point est le milieu d'un segment ; savoir utiliser la relation de Chasles ; dans un repère : calculer les coordonnées d'un vecteur, d'un point défini par une égalité vectorielle, étudier la colinéarité de deux vecteurs, déterminer un alignement de points ou le parallélisme de deux droites.
De nombreux exercices de logique sont également proposés.
Dans les **TP** ainsi que les exercices d'**approfondissement**, sont utilisés des repères liés à une figure (**TP2** et **exercices 104, 105 et 106**) et les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel (**TP1** et **exercices 101 et 102**).

Les notions abordées dans le chapitre 12

- Translation et vecteurs
- Vecteurs dans un repère
- Somme de vecteurs
- Produit d'un vecteur par un nombre réel
- Vecteurs colinéaires
- Parallélisme de droites et alignement de points

C Réactiver les savoirs

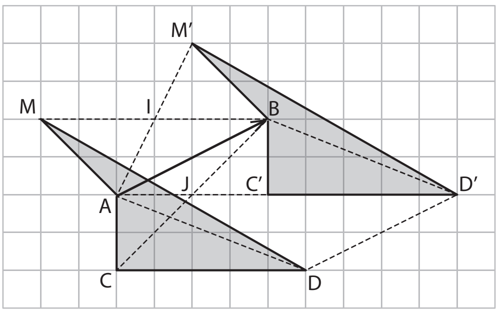
Voir manuel pages 334 et 335 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

Activité 1 Des points glissants

Cette activité a pour objectif d'introduire la définition d'image d'un point par une translation et d'amener les élèves à bien faire le rapprochement entre la construction d'un point tel que deux segments aient le même milieu et la construction d'un parallélogramme.
Le tracé du quadrilatère M′BC′D′, image du quadrilatère MACD par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, permet de visualiser comment on peut tracer l'image d'une figure par une translation. C'est l'occasion d'évoquer la direction, le sens et la longueur d'un vecteur.

1. a et b. Voir la figure ci-après.
2. a. On construit C′ de telle sorte que J soit le milieu de [AC′].
b. ABM′M et ABC′C sont des parallélogrammes.
3. a. Voir la figure ci-après.
b. Le milieu de [BD] et le milieu de [AD′] sont confondus.
c. L'image de D par la translation qui transforme A en B est le point D′.
4.



Activité 2 Dans un funiculaire

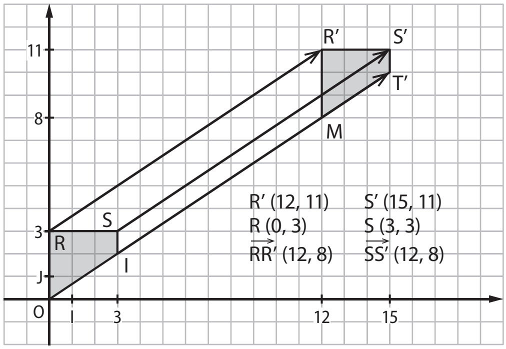
Dans cette activité, les élèves découvrent la définition de coordonnées d'un vecteur dans un repère et sont amenés à faire une conjecture sur la formule permettant de calculer ces coordonnées.
L'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de confirmer cette conjecture.
Fichiers associés :* 12_seconde_activite2.url (GeoGebraTube) *sur www.bordas-indice.fr et* 12_seconde_activite2.ggb (GeoGebra) *sur le manuel numérique premium.

1. R′, S′ et T′ sont les images respectives de R, S et T par la translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{OM}$ et par suite $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{TT'}$.
2. a. M a pour coordonnées (9 ; 6).
b. $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées (9 ; 6).
3. a. Le représentant d'origine O de $\overrightarrow{RR'}$ est $\overrightarrow{OM}$.
b. Les coordonnées de $\overrightarrow{RR'}$ sont les coordonnées du point M, soit (9 ; 6).
4. a.

Coordonnées du vecteur	$\overrightarrow{OM}$ (9 ; 6)	$\overrightarrow{RR'}$ (9 ; 6)	$\overrightarrow{SS'}$ (9 ; 6)	$\overrightarrow{TT'}$ (9 ; 6)
Coordonnées de l'extrémité	M(9 ; 6)	R′(9 ; 9)	S′(12 ; 9)	T′(12 ; 8)
Coordonnées de l'origine	O(0 ; 0)	R(0 ; 3)	S(3 ; 3)	T(3 ; 2)

b. On peut conjecturer que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$.
5. Ouvrir le fichier **12_seconde_activite2**.

Utiliser Déplacer. Cliquer sur , puis sur le point M pour le déplacer.



On observe que les coordonnées de $\overrightarrow{RR'}$ sont $(x_{R'} - x_R\ ;\ y_{R'} - y_R)$ et que celles de $\overrightarrow{SS'}$ sont $(x_{S'} - x_S\ ;\ y_{S'} - y_S)$.
Cela confirme la conjecture faite dans la question **4. b.**

Activité 3 Croisières aux îles d'Hyères

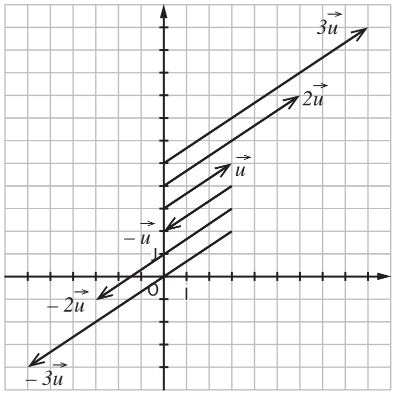
Cette activité permet d'introduire la notion de somme de deux vecteurs ainsi que la relation de Chasles.

1. a. La *croisière* est : « H vers P, puis P vers C ».
b. Les trois *croisières* sont :
« P vers H, puis H vers C » ;
« P vers M, puis M vers C » ;
« P vers L, puis L vers C ».
2. a. Le point de départ est L ; le point d'arrivée est P.
b. Le vecteur $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CP}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{LP}$.
3. a. La somme de vecteurs est $\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{PC}$.
b. Cette somme est égale au vecteur $\overrightarrow{HC}$.
4. $\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{PC}$
$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PC}$
$\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{PC}$.

Activité 4 Un nouveau produit

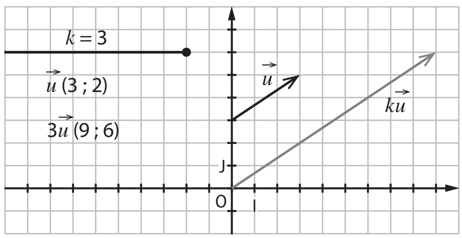
Cette activité a pour objectif d'introduire la définition du produit d'un vecteur par un réel à l'aide du logiciel GeoGebra. Après avoir calculé les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $-\vec{u}$… les élèves peuvent constater, à partir des coordonnées des vecteurs $k\vec{u}$ affichées par le logiciel, que $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$; $\vec{u} = 1\vec{u}$; $-\vec{u} = -1\vec{u}$… L'affichage des coordonnées des vecteurs $k\vec{u}$ avec k variant avec un pas de 0,5, permet de faire une conjecture sur l'expression des coordonnées de $k\vec{u}$ en fonction de celles de $\vec{u}$.
***Fichiers associés :* 12_seconde_activite4.url (GeoGebraTube) *sur* www.bordas-indice.fr *et* 12_seconde_activite4.ggb (GeoGebra) *sur le manuel numérique premium*.**

1. a. $\vec{u} + \vec{u}$ a pour coordonnées (6 ; 4).
$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$ a pour coordonnées (9 ; 6).
b. Voir la figure ci-après.
2. a. $-\vec{u}$ a pour coordonnées (–3 ; –2).
$-\vec{u} - \vec{u}$ a pour coordonnées (–6 ; –4).
$-\vec{u} - \vec{u} - \vec{u}$ a pour coordonnées (–9 ; –6).
b.



3. Ouvrir le fichier **12_seconde_activite4**.

a. Utiliser Déplacer. Cliquer sur , puis sur le curseur k pour lui faire prendre les valeurs 3, 2, 1, –1, –2 et –3.



$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$; $\vec{u} = 1\vec{u}$; $-\vec{u} = -1\vec{u}$;
$-\vec{u} - \vec{u} = -2\,\vec{u}$; $-\vec{u} - \vec{u} - \vec{u} = -3\vec{u}$.
b. Déplacer le curseur k pour lui faire prendre des valeurs de –3 à 3 avec un pas de 0,5.
Conjecture : les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(3k\ ;\ 2k)$.

E Exercices

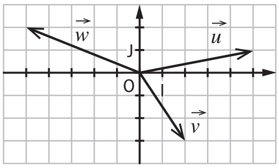
Pour démarrer

1 **1. Vrai.** ABCD et DCFE sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$: l'image de E par la translation qui transforme A en B est F.
2. Vrai, car ABCD est un parallélogramme.
3. Faux, car FCED n'est pas un parallélogramme.
4. Faux, car DBAC n'est pas un parallélogramme.

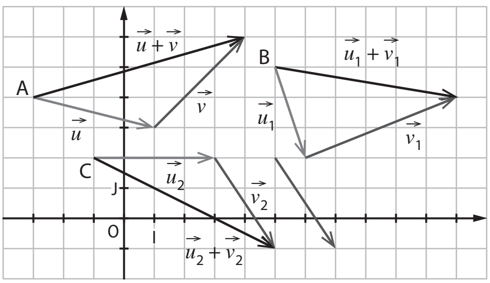
2 **1.** [AB] et [MN] sont des diamètres du cercle de centre K donc [AB] et [MN] ont pour milieu le point K.
2. a. L'image de M est B.
b. Un vecteur égal à $\overrightarrow{AN}$ est $\overrightarrow{MB}$.

3 **1.** Vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BE}$.
2. a. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ **b.** $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BD}$
c. $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BA}$ **d.** $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CA}$

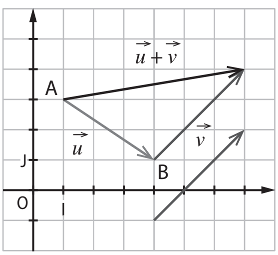
4 **1. a.** Les coordonnées de M sont (4 ; 2).
b. Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont (4 ; 2).
c. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont (6 ; 1).
2. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
5 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**
6 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**
7 **1.** Les représentants de $\vec{u}$ sont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.
2. Les représentants de $\vec{v}$ sont $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{KL}$.
8



9 **a.** $x_A = 4$; $y_A = 3$; $x_B = 5$ et $y_B = 9$.
$x_B - x_A = 1$; $y_B - y_A = 6$ et $\overrightarrow{AB}$ (1 ; 6).
b. $x_A = 10$; $y_A = 1$; $x_B = 0$ et $y_B = 6$.
$x_B - x_A = -10$; $y_B - y_A = 5$ et $\overrightarrow{AB}$ (–10 ; 5).
c. $x_A = 2$; $y_A = 1$; $x_B = 6$ et $y_B = 0$.
$x_B - x_A = 4$; $y_B - y_A = -1$ et $\overrightarrow{AB}$ (4 ; –1).
d. $x_A = -7$; $y_A = 1$; $x_B = 2$ et $y_B = -1$.
$x_B - x_A = 9$; $y_B - y_A = -2$ et $\overrightarrow{AB}$ (9 ; –2).
10 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**
11 **1.** $\overrightarrow{EK}$ (–1 ; –2) et $\overrightarrow{KH}$ (–1 ; –2).
$\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{KH}$ ont les mêmes coordonnées donc ils sont égaux.
2. K est le milieu du segment [EH].
12 **1.** Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est égal à $\vec{c}$.
2. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (5 ; –1).
Ce sont bien les coordonnées du vecteur $\vec{c}$.
13 **1. et 2.**



14



15 **a.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
c. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ **d.** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$
16 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**
17 **1. Faux**. Le vecteur $2\vec{u}$ a pour coordonnées (4 ; 6).
2. Vrai, par définition de la colinéarité de deux vecteurs.
3. Faux. Les vecteurs $3\vec{w}$ et $\vec{u}$ n'ont pas les mêmes coordonnées puisque $3\vec{w}$ (18 ; 27) et $\vec{u}$ (2 ; 3).
4. Faux. Il n'existe pas de réel k tel que $5 = 2k$ et $6 = 3k$.
18 **a.** $2\vec{u}$ a pour coordonnées (8 ; 2).
b. $3\vec{u}$ a pour coordonnées (12 ; 3).
c. $0{,}5\vec{u}$ a pour coordonnées (2 ; 0,5).
d. $-\vec{u}$ a pour coordonnées (–4 ; –1).
e. $-4\vec{u}$ a pour coordonnées (–16 ; –4).
19 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**
20 **1. a.** $10 = 5 \times 2$ **b.** $15 = 5 \times 3$
2. $k = 5$
3. a. $6 = 3 \times 2$ **b.** $12 = 4 \times 3$
4. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
21 **1. a.** $\overrightarrow{AB}$ (2 – (–1) ; 7 – 1), soit $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 6).
b. $\overrightarrow{AC}$ (1 ; 2).
2. a. $3\overrightarrow{AC}$ (3 ; 6) et $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 6) donc $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
b. Les points A, B et C sont alignés.
22 **1. a.** $2 = 0{,}5 \times 4$ **b.** $16 = 2 \times 8$
2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
b. Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Pour s'entraîner

23 **1.** A est le milieu de [BF] donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}$.
ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
2. a. Les segments [CE] et [BF] ont le même milieu donc EFCB est un parallélogramme.
b. ABCD et EFCB sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$.
24 **1.** P est le milieu du segment [AC] donc $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$.
2. a. La droite (MN) passe par M et N, milieux respectifs des segments [BA] et [BC], donc (MN) est parallèle à (AC).
b. De même, (NP) est parallèle à (AB). MNPA a ses côtés deux à deux parallèles donc MNPA est un parallélogramme.
3. MNPA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP}$.
D'après la question **1**, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$. Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PC}$.
25 **1.** $\widehat{APD} = \widehat{APB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPD} = 180°$ donc P est sur le segment [AD].
De plus, PA = PD donc P est le milieu de [AD].
De même, P est le milieu de [CF].
Les diagonales du quadrilatère ACDF se coupent en leur milieu P : ACDF est un parallélogramme.
2. a. ACDF, AFEP et AFPB sont des parallélogrammes donc : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BP}$.
b. P est le milieu de [AD] donc $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{DP}$.
AFEP et ABCP sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CB}$.
3. a. Le représentant d'origine P de $\overrightarrow{CD}$ est $\overrightarrow{PE}$.
b. Le représentant d'origine P de $\overrightarrow{FP}$ est $\overrightarrow{PC}$.
4. a. Le représentant d'extrémité P de $\overrightarrow{FE}$ est $\overrightarrow{AP}$.
b. Le représentant d'extrémité P de $\overrightarrow{PE}$ est $\overrightarrow{BP}$.
26 **1.** L'image du point P par la translation qui transforme D en C est le point B.

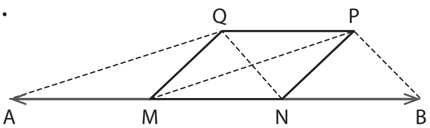
2. L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point D.
3. Le point B est l'image du point P par la translation de vecteur $\overrightarrow{FA}$.

27 **Exercice résolu, voir page 268 du manuel.**

28 **1. a.** M est le symétrique de B par rapport à A donc A est le milieu de [MB] et $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$.
b. CABN est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$.
$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ donc $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CN}$.
Par conséquent, CMAN est un parallélogramme.
2. a. ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CN}$.
b. C est le milieu de [DN].

29 **1. a.** AEBC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$.
b. ACDF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$.
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$ donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF}$ et EBDF est un parallélogramme.
2. ACDF et ABCD sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Par conséquent, $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB}$ et A est le milieu de [FB].
3. Le centre de EBDF est le point d'intersection de ses diagonales, c'est-à-dire le milieu de la diagonale [FB] : A est le centre de EBDF.

30 **1.**



2. MNPQ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{QP}$ donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$: N est le milieu de [MB].
3. MNPQ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$.
$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MA}$: M est le milieu de [AN].

31 **1.** Cette proposition est vraie.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors ABDC est un parallélogramme. Par conséquent AB = CD.
2. Réciproque : « Si AB = CD, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. »
Cette proposition est fausse.
Dans un rectangle ACBD, AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

32 **Faux**. Si E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BA}$.

33 **Vrai**. Par propriété.

34 **Faux**. Si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, alors ACDB est un parallélogramme, mais pas ACBD.

35 **Vrai**. Si $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, alors AECB est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$.

36 **Faux**. Lorsque A et D sont confondus et que B est distinct de A, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$ et B n'est pas le milieu de [AD].

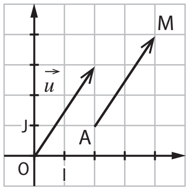
37 **1.** A (2 ; 1), B (4 ; –1), C (–1 ; 3), D (2 ; 4) et E (6 ; 1).
2. a. $\overrightarrow{AB}$ (4 – 2 ; –1 – 1), soit $\overrightarrow{AB}$ (2 ; –2).
$\overrightarrow{AC}$ (–1 – 2 ; 3 – 1), soit $\overrightarrow{AC}$ (–3 ; 2).
$\overrightarrow{AD}$ (2 – 2 ; 4 – 1), soit $\overrightarrow{AD}$ (0 ; 3).
$\overrightarrow{AE}$ (6 – 2 ; 1 – 1), soit $\overrightarrow{AE}$ (4 ; 0).
b. On retrouve ces coordonnées par lecture graphique.

38 **1.** A (2 ; 1), B (5 ; –1), C (2 ; 0), D (–1 ; –1), E (5 ; 3), F (2 ; 3), G (–1 ; 1) et H (–1 ; 4).
2. a. $\overrightarrow{AB}$ (5 – 2 ; –1 – 1), soit $\overrightarrow{AB}$ (3 ; –2).
$\overrightarrow{CD}$ (–1 – 2 ; –1 – 0), soit $\overrightarrow{CD}$ (–3 ; –1).
$\overrightarrow{EF}$ (2 – 5 ; 3 – 3), soit $\overrightarrow{EF}$ (–3 ; 0).
$\overrightarrow{GH}$ (–1 – (–1) ; 4 – 1), soit $\overrightarrow{GH}$ (0 ; 3).
b. On retrouve ces coordonnées par lecture graphique.

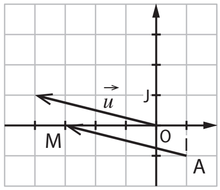
39 **1.** A (0 ; 2), B (2 ; 3), C (2 ; 0), D (–1 ; 1), E (1 ; 1), F (3 ; 1), G (5 ; 0) et H (4 ; 2).
2. a. $\overrightarrow{AB}$ (2 – 0 ; 3 – 2), soit $\overrightarrow{AB}$ (2 ; 1).
$\overrightarrow{CD}$ (–1 – 2 ; 1 – 0), soit $\overrightarrow{CD}$ (–3 ; 1).
$\overrightarrow{EF}$ (3 – 1 ; 1 – 1), soit $\overrightarrow{EF}$ (2 ; 0).
$\overrightarrow{GH}$ (4 – 5 ; 2 – 0), soit $\overrightarrow{GH}$ (–1 ; 2).
b. On retrouve ces coordonnées par lecture graphique.

40

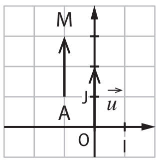
a.



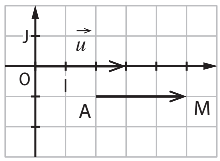
b.



c.



d.

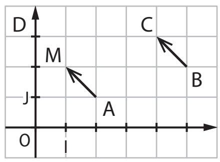


41 **1.** $\overrightarrow{EF}$ (11 ; –9) et $\overrightarrow{HG}$ (11 ; –9).
Donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et EFGH est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{EG}$ (16 ; –7) et $\overrightarrow{FK}$ (–16 ; 7)
$\overrightarrow{EG} \neq \overrightarrow{FK}$ donc EGKF n'est pas un parallélogramme.

42 E a pour coordonnées (6 ; –2).

43 **1.** $\overrightarrow{AB}$ (–3 ; –2) et $\overrightarrow{DC}$ (–3 ; –2).
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
2. G a pour coordonnées (1 ; –3).

44 **1. a.**



b. M a pour coordonnées (1 ; 2).
2. $\overrightarrow{AM}$ (–1 ; 1) et $\overrightarrow{MD}$ (–1 ; 1).
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MD}$ donc M est le milieu de [AD].

45 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

46 **Exercice résolu, voir page 270 du manuel.**

47 **1.** $AB^2 = 52$, $BC^2 = 13$ et $AC^2 = 65$.
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en B.
2. D a pour coordonnées (1 ; 7).

48

Variables x_A, y_A, x_B, y_B , C et D sont des réels
Entrées Saisir x_A, y_A, x_B, y_B
Traitement C prend la valeur x_B - x_A
D prend la valeur y_B - y_A
Sorties Afficher C et D

49 **1. Vrai**. Pour $x = 13$, $\vec{u} = \vec{v}$.

2. Vrai. Pour $x = 1$, $\vec{u} \neq \vec{v}$.

3. Faux. Pour $x = 1$, $\vec{u} \neq \vec{v}$.

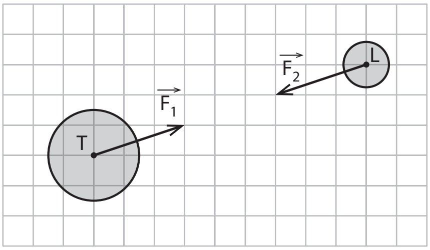
4. Faux. Pour $x = 13$, $\vec{u} = \vec{v}$.

50 **Faux**. $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (7 ; –6).

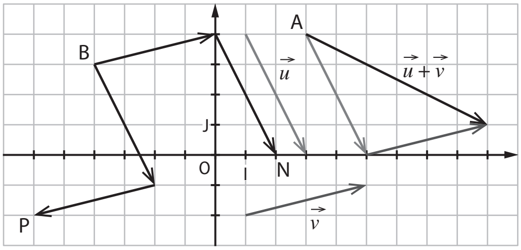
51 **Vrai**. $\overrightarrow{AC}$ (7 ; –6) et $\overrightarrow{BD}$ (7 ; –6).

52 **Vrai**, car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

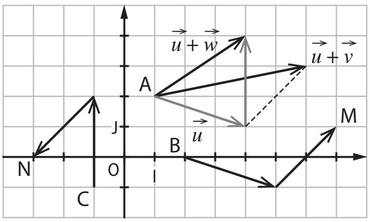
53



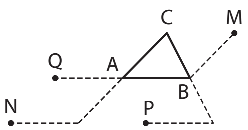
54 **1. et 2.**



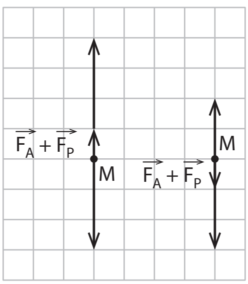
55 **1. et 2.**



56



57



Dans le cas **a**, la montgolfière prend de l'altitude.

Dans le cas **b.** $\vec{F}_A + \vec{F}_P = \vec{0}$: la montgolfière reste à la même altitude.

Dans le cas **c**, la montgolfière descend.

58 **a.** $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE}$ **b.** $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$

c. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF}$ **d.** $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$

59 **a.** $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ **b.** $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{EF}$

c. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF}$ **d.** $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FB}$

60 **Exercice résolu, voir page 271 du manuel.**

61 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

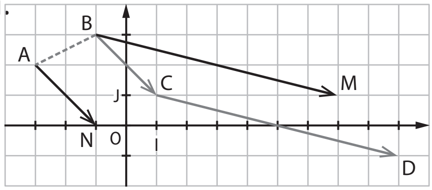
62 **1.** $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (3 ; 3).

2. E (4 ; 5) et F (6 ; 1).

63 **1.** $\overrightarrow{AC}$ (3 ; 0) et $\overrightarrow{BC}$ (–2 ; 4).

2. M a pour coordonnées (–2 ; 5).

64 **1.**



2. M (7 ; 1) et N (–1 ; 0).

3. $\overrightarrow{AN}$ (2 ; –2) et $\overrightarrow{MD}$ (2 ; –2).

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MD}$ donc ANDM est un parallélogramme.

65 **1.** Les coordonnées de M sont $(x ; y)$.

2. $x_N = x' + x$ et $y_N = y' + y$.

3. a. $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$.

Or $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ donc $\overrightarrow{ON} = \vec{u} + \vec{v}$.

b. Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont celles du point N donc $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$.

66 **Vrai**. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (3 + (–2) ; –11 + 5), soit (1 ; –6).

67 **Vrai**. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées :

(3 + (–2) + (–1) ; –11 + 5 + 6), soit (0 ; 0).

68 **Faux**. Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{w}$ a pour coordonnées : (3 ; –3).

69 $3\vec{u}$ a pour coordonnées (9 ; 3).

$-5\vec{v}$ a pour coordonnées (–5 ; 10).

$\vec{w}$ a pour coordonnées (4 ; 13).

70 A (2 ; 4), B (3 ; –6), C (5 ; –2) et D (–6 ; 8).

71 **1.** P (6 ; 2), Q (–4 ; 2), R (–6 ; –2) et S (4 ; –2).

2. $\overrightarrow{PQ}$ (–10 ; 0) et $\overrightarrow{SR}$ (–10 ; 0).

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme.

72 **1.** $\overrightarrow{AB}$ (1 ; 8), $\overrightarrow{BC}$ (–8 ; –6) et $-\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (–17 ; –20).

2. V a pour coordonnées (–14 ; –13).

3. $\overrightarrow{CU}$ (16 ; 12) et $\overrightarrow{VA}$ (16 ; 12).

$\overrightarrow{CU} = \overrightarrow{VA}$ donc CUAV est un parallélogramme.

73 **1.** Par lecture graphique, les vecteurs $\overrightarrow{NP} + 3\,\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP} + 2\,\overrightarrow{MN}$ sont égaux au vecteur nul : leurs coordonnées sont (0 ; 0).

2. $\overrightarrow{NP}$ (–9 ; –3) et $\overrightarrow{MN}$ (3 ; 1).

$\overrightarrow{NP} + 3\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées (0 ; 0).

$\overrightarrow{MP}$ (–6 ; –2) et $\overrightarrow{MN}$ (3 ; 1).

$\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées (0 ; 0).

74 **a.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

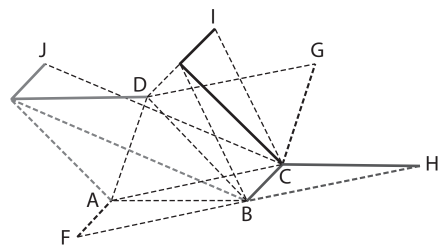
75 **a.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
76 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**
77 **Exercice résolu, voir page 272 du manuel.**
78 **a.** $z = -\dfrac{3}{2}$ **b.** $z = \dfrac{2}{5}$
79 **1.** $\overrightarrow{EF}(6-1\,;4-1)$, soit $\overrightarrow{EF}(5\,;3)$. **2.** $y = \dfrac{14}{5}$.
80 $x = 3$.
81 **Vrai**. Le vecteur $2\vec{u} - 5\vec{v}$ a pour coordonnées $(2\times21 - 5\times7\,; 2\times6 - 5\times2)$, soit $(7\,;2)$.
82 **Vrai**. Si $7y = 6$, alors $\vec{w}\left(3\,;\dfrac{6}{7}\right)$ et $7\,\vec{w} = \vec{u}$.
83 **Faux**. Pour $y = \dfrac{6}{7}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.
84 **a.** $\overrightarrow{AB}(-25\,;-5)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;1)$.
Les points A, B et C ne sont pas alignés.
b. $\overrightarrow{AB}(-20\,;40)$ et $\overrightarrow{AC}(40\,;-80)$.
Les points A, B et C sont alignés.
85 **a.** $\overrightarrow{AB}(-14\,;14)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;3)$.
Le point C appartient à la droite (AB).
b. $\overrightarrow{AB}(-4\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;4)$.
Le point C n'appartient pas à la droite (AB).
86 **a.** $\overrightarrow{AB}(2\,;10)$ et $\overrightarrow{CD}(-1\,;-6)$.
Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
b. $\overrightarrow{AB}(-3\,;-15)$ et $\overrightarrow{CD}(9\,;45)$.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
87 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**
88 **1.** $P\left(\dfrac{13}{2}\,;\dfrac{13}{2}\right)$ et $R\left(\dfrac{21}{2}\,;-\dfrac{21}{2}\right)$.
2. $\overrightarrow{PR}(4\,;-17)$ et $\overrightarrow{PS}\left(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{13}{2}\right)$.
$\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ ne sont pas colinéaires donc S n'est pas sur la droite (PR).
89 **1.** D(5 ; 1) et E(7 ; 0).
2. S a pour coordonnées (3 ; –1).
3. $\overrightarrow{EC}(-3\,;-3)$ et $\overrightarrow{DS}(-2\,;-2)$
$\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont colinéaires donc les droites (EC) et (DS) sont parallèles.
90 **1.** P a pour coordonnées $\left(2\,;\dfrac{3}{2}\right)$.
2. Q(2 ; 9) et R(2 ; –3).
3. $\overrightarrow{PQ}\left(0\,;\dfrac{15}{2}\right)$ et $\overrightarrow{PR}\left(0\,;-\dfrac{9}{2}\right)$.
$\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires donc P est sur la droite (QR).
91 **1. Faux**. Soit A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, mais ABDC n'est pas un parallélogramme.
2. Vrai. Si ABDC est un trapèze de base [AB], alors (AB) et (CD) sont parallèles. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
3. Faux. Soit les points A, B, C et D tels que ABDC est un parallélogramme non aplati. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires mais les points A, B, C et D ne sont pas alignés.
92 **Vrai**. Si $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{AC}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points A, B et C sont alignés.
93 **Faux**, car les vecteurs $\overrightarrow{OP}(5\,;3)$ et $\overrightarrow{OQ}(3\,;5)$ ne sont pas colinéaires.
94 **Vrai**. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}(4\,;2)$ et $\overrightarrow{OT}(-2\,;1)$ ne sont pas colinéaires : les droites (RS) et (OT) sont sécantes.
95 **1.** $\overrightarrow{AD}(6\,;-4)$ et $\overrightarrow{BC}(6\,;-4)$.
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc ADCB est un parallélogramme.
2. N a pour coordonnées (0 ; –4).
3. $\overrightarrow{DC}(-4\,;-2)$ et $\overrightarrow{CN}(-4\,;-2)$.
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CN}$ donc C est le milieu de [DN].
96 **1.** M a pour coordonnées (–1 ; 2).
M est le milieu de [AD].
2. a. P a pour coordonnées (3 ; 4).
b. $\overrightarrow{AM}(2\,;-1)$ et $\overrightarrow{BP}(2\,;-1)$.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BP}$ donc AMPB est un parallélogramme.
97 **1.** $\overrightarrow{AB}(3\,;9)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;-3)$.
Les points A, B et C sont alignés.
2. $\overrightarrow{AB}(3\,;9)$ et $\overrightarrow{DE}(6\,;17)$.
Les droites (AB) et (DE) sont sécantes.

Faire le point

Voir livre page 335.
Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr.

Revoir des points essentiels

98



99 **a.** M(0 ; –5). **b.** N(–4 ; –2).
c. P(2 ; 8). **d.** Q(–3 ; 2). **e.** R(1 ; 4).

Travaux pratiques

TP 1 La chasse aux trésors

***Fichiers associés sur le manuel numérique premium :* 12_seconde_TP1_A.ggb (GeoGebra), 12_seconde_TP1_A.g2w (Geoplan), 12_seconde_TP1_A_correction.ggb (GeoGebra), 12_seconde_TP1_A_correction.g2w (Geoplan), 12_seconde_TP1_C.ggb (GeoGebra) et 12_seconde_TP1_C.g2w (Geoplan) ; *sur le site* www.bordas-indice.fr : 12_seconde_TP1_A.url (GeoGebraTube), 12_seconde_TP1_A.g2w (Geoplan), 12_seconde_TP1_A_correction.g2w (Geoplan), 12_seconde_TP1_C.url (GeoGebraTube) et 12_seconde_TP1_C.g2w (Geoplan)**

A. 1. a., b. et c.

➔ Avec le logiciel GeoGebra

Ouvrir le fichier **12_seconde_TP1A.ggb** ou **.url**.

Utiliser Symétrie centrale. Cliquer sur , puis sur le point A et ensuite sur le point I.

Nommer B le point créé en cliquant droit sur ce point et en choisissant Renommer.

Utiliser de même Symétrie centrale pour construire les points C, D et E.

Utiliser Segment entre deux points. Cliquer sur , puis sur les extrémités de chacun des segments à créer.

➔ Avec le logiciel GeoPlan

Ouvrir le fichier **12_seconde_TP1A.g2w**.

Pour créer le point B :

Créer, puis Point puis Point image par puis Symétrie centrale :

Symétrie de centre : I

Points (de départ) : A

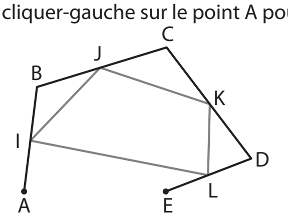
Images de ces points : B

Créer de même les points C, D et E. Pour créer les segments [AB], [BC], [CD] et [DE] : Créer, puis Ligne, puis Segment(s) puis Définis par 2 points : Noms des segments : AB BC CD DE

d. Le point E n'est pas confondu avec le point A : Bryan ne gagne pas.

2. Avec GeoGebra, utiliser Déplacer. Cliquer sur , puis sur le point A pour le déplacer.

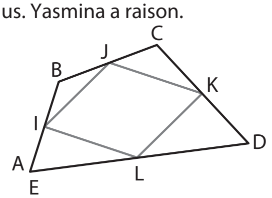
Avec GeoPlan, cliquer-gauche sur le point A pour le déplacer.



Il paraît impossible de trouver une position de A pour que les points A et E soient confondus. Bryan semble se tromper.

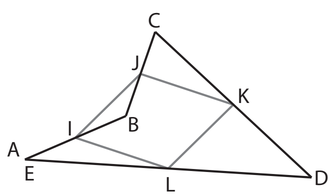
3. Cliquer sur le point L pour le déplacer.

On peut trouver une position de L, pour que les points A et E soient confondus. Yasmina a raison.



4. Cliquer sur le point A pour le déplacer.

Quelle que soit la position de A, les points A et E sont confondus. Bryan semble avoir raison.



B. 1. a. I est le milieu du segment [AB] donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}$.

b. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$.

c. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{IJ}$.

2. $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{KL}$.

3. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{KL}$.

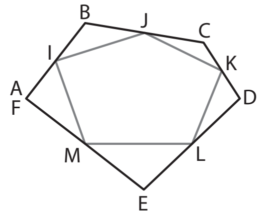
4. a. E est confondu avec A si et seulement si $\overrightarrow{AE} = \vec{0}$ et donc si et seulement si $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{KL} = \vec{0}$:

E est confondu avec A si et seulement si $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

b. Une condition nécessaire et suffisante pour que le candidat gagne est que le quadrilatère IJKL soit un parallélogramme.

C. Ouvrir le fichier **12_seconde_TP1C.ggb** (ou **.url**) ou **12_seconde_TP1C.g2w**.

En déplaçant les points I, J, K, L ou M, puis le point A, on peut observer qu'il existe à chaque fois une position de A telle que A et F sont confondus.



Le jeu semble donc plus équitable, puisque le candidat peut gagner et qu'il ne semble pas y avoir de position des trésors telle que le candidat gagne toujours ou ne gagne jamais.

Remarque : quels que soient les points I, J, K, L et M, il existe une et une seule position du point A telle que le candidat gagne. En effet, comme $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{KL} + 2\overrightarrow{MF}$, les points A et F sont confondus si et seulement si $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{JI}$.

Toutefois, certains points peuvent être confondus.

Par exemple, lorsque IJKL est un parallélogramme, le candidat gagne s'il part du point M et M, A, E et F sont confondus.

TP2 Des vecteurs avec GeoGebra

Fichier associé sur le manuel numérique premium :
12_seconde_TP2_correction.ggb (GeoGebra).

A. 1. a. Utiliser Nouveau point en cliquant sur pour construire trois points A, B et C non alignés.

b. Utiliser Vecteur. Cliquer sur , puis sur le point B et ensuite sur le point A.

Utiliser ensuite Représentant. Cliquer sur , puis sur le point C et ensuite sur le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Pour nommer D, l'extrémité de ce représentant, cliquer droit sur ce point puis choisir Renommer.

c. Utiliser Polygone. Cliquer sur puis sur les points A, B, C, D et A.

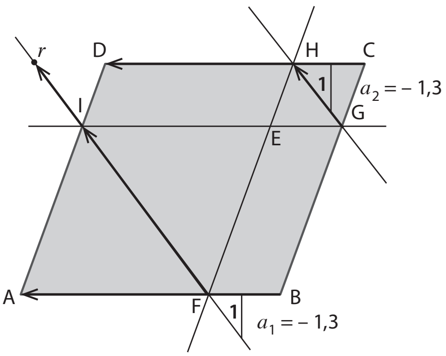
Utiliser Point sur Objet. Cliquer sur , puis sur un point à l'intérieur du polygone.

d. Utiliser Parallèle. Cliquer sur . Cliquer sur le point E puis sur le segment [AB], et ensuite sur le point E puis sur le segment [AD].

e. Utiliser Intersection entre deux objets. Cliquer sur , puis sur les points concernés.

2. a. Utiliser Vecteur. Cliquer sur . Cliquer sur le point F puis sur le point I pour construire $\overrightarrow{FI}$, et ensuite sur le point G puis sur le point H pour construire $\overrightarrow{GH}$.
b. Utiliser Représentant. Cliquer sur , puis sur le point I, puis sur le vecteur $\overrightarrow{GH}$.
Utiliser Vecteur. Cliquer sur , puis sur le point F et ensuite sur l'extrémité du représentant d'origine I de $\overrightarrow{GH}$ construit précédemment.
c. Utiliser Déplacer. Cliquer sur , puis sur le point E pour le déplacer.
Le vecteur $\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{GH}$ semble égal à $\overrightarrow{BD}$.
3. a. Utiliser Droite passant par deux points. Cliquer sur . Cliquer sur les points F et I pour créer la droite (FI), et ensuite sur les points G et H pour créer la droite (GH).

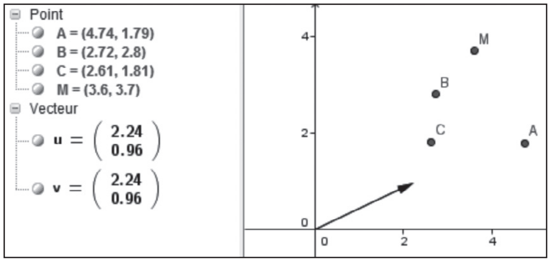
b. Utiliser Pente. Cliquer sur , puis sur la droite (FI) et ensuite sur la droite (GH).
Dans **Options**, choisir Arrondi à 1 décimale.
c. Déplacer le point E comme dans la question **2. c.** et repérer où doit être le point E pour que les pentes soient égales. On conjecture que E est sur le segment [AC].



B. 1. a. B (1 ; 0) et D (0 ; 1).
b. C a pour coordonnées (1 ; 1).
c. F (a ; 0), G (1 ; b), H (a ; 1) et I (0 ; b).
2. a $\overrightarrow{FI}$ (0 – a ; b –0), soit $\overrightarrow{FI}$ (–a ; b).
b. $\overrightarrow{GH}$ (a – 1 ; 1 – b)
$\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{GH}$ (–1 ; 1)
c. $\overrightarrow{BD}$ (–1 ; 1). Donc $\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BD}$.
3. a. On a : $\overrightarrow{FI}$ (–a ; b) et $\overrightarrow{GH}$ (a – 1 ; 1 – b).
Si les vecteurs non nuls $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel $\overrightarrow{GH} = k\overrightarrow{FI}$, et donc tel que
$a - 1 = -ka$ et $1 - b = kb$.
a étant non nul, $k = \dfrac{1-a}{a}$ et $1 - b = \dfrac{1-a}{a}b$.
Par conséquent, $a - ab = b - ab$, soit $a = b$.
Réciproquement, si $a = b$:
$\overrightarrow{FI}$ (–a ; a) et $\overrightarrow{GH}$ (a – 1 ; 1 – a).
$\overrightarrow{GH} = \dfrac{1-a}{a}\overrightarrow{FI}$ donc $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{FI}$ sont colinéaires.
b. Le point E doit se trouver sur le segment [AC] (en étant différent de A et C).

Pour approfondir

100 On peut remplacer la partie grisée par la partie **2**.
101 **1. a.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}$ car I est le milieu de [AB].
$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$ car J est le milieu de [BC].
b. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{IJ}$.
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{LD} + 2\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{LK}$
$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{LK}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.
Par conséquent, IJKL est un parallélogramme.
102 ***Fichier associé : 12_seconde_ex102.ggb (GeoGebra) sur le manuel numérique premium.***
1. a. Construire quatre points A, B, C et M en utilisant l'outil Nouveau point (icône).
Dans la ligne de saisie, écrire : **u=Vecteur[A,B]-2*Vecteur[A,C]**
puis : **v=Vecteur[M,A]+Vecteur[M,B]-2*Vecteur[M,C]**

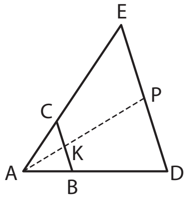


b. Utiliser Déplacer. Cliquer sur , puis cliquer sur le point M pour le déplacer.
On remarque que les vecteurs $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ sont égaux.
2. Pour tout point M,
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$
$= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
103 **1.** C_1 et C_2 ont le même rayon donc AB = BD = DC = AC : le quadrilatère ABDC est un losange et par suite un parallélogramme.
Les diagonales [BE] et [CF] du quadrilatère FBCE se coupent en leur milieu (car ce sont des diamètres de C_1) : FBCE est un parallélogramme.
De même, BGHC est un parallélogramme.
2. a. ABDC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
A est le milieu de [EB] donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA}$.
D'où $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EA}$: ADCE est un parallélogramme.
b. D est le milieu de [CG] donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DG}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DG}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG}$: ABGD est un parallélogramme.
c. ADCE et ABGD sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG}$. Par conséquent, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BG}$.
3. BGHC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CH}$.
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CH}$ donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CH}$: C est le milieu de [EH].
4. C est sur le cercle C_1 de diamètre [EB] et sur le cercle C_2 de diamètre [BH] donc $\widehat{ECB} = 90°$ et $\widehat{BCH} = 90°$.
On en déduit que $\widehat{ECH} = 180°$ donc C est sur le segment [EH].
Comme (BC) est perpendiculaire à (EH), (BC) est la hauteur du triangle BEH issue de B.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ayant le même rayon, BE = BH : le triangle BEH est isocèle en B. Donc la hauteur (BC) est également la médiane issue de B : C est le milieu de [EH].

104 **1. a. et b.**

On peut conjecturer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles et que les points A, K et P sont alignés.



2. a. D (3 ; 0) et E (0 ; 3).

b. $\overrightarrow{BC}$ (–1 ; 1) et $\overrightarrow{DE}$ (–3 ; 3).

$\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

c. K$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et P$\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AP}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AK}$ donc $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires et les points A, K et P sont alignés.

105 **1. a.** ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On pose C $(x ; y)$. $\overrightarrow{AB}$ (1 ; 0) et $\overrightarrow{DC}$ $(x ; y – 1)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $1 = x$ et $0 = y – 1$. Donc C (1 ; 1).

O est le milieu de [AC] donc O$\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$, soit O$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

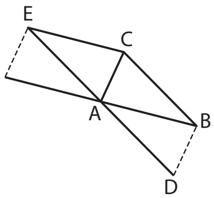
b. P$\left(\frac{3}{2};0\right)$, Q$\left(1;\frac{3}{2}\right)$, R$\left(-\frac{1}{2};1\right)$ et S$\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

2. $\overrightarrow{PQ}\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{SR}\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme.

Le milieu de la diagonale [PR] a les mêmes coordonnées que O : le centre de PQRS est O.

106 **A. 1.** Voir la figure ci-contre.



2. a. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

b. ADBC est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Donc ABCE est un parallélogramme.

4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD}$.

Par conséquent, A est le milieu de [ED].

5. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

B. 1. a. $\overrightarrow{AB}$ (1 ; 0) et $\overrightarrow{AC}$ (0 ; 1) donc $\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1 ; a)$. D'où D $(1 ; a)$.

b. E a pour coordonnées $(a ; 1)$.

2. $\overrightarrow{DE}$ $(a – 1 ; 1 – a)$ et $\overrightarrow{BC}$ (–1 ; 1).

$(1 – a)\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$ donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

3. a. K a pour coordonnées (1 ; 1).

b. $\overrightarrow{BK}$ (0 ; 1) et $\overrightarrow{BD}$ $(0 ; a)$.

$a\,\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et les points B, K et D sont alignés.

$\overrightarrow{CK}$ (1 ; 0) et $\overrightarrow{CE}$ $(a ; 0)$.

$a\,\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CE}$ donc $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et les points C, K et E sont alignés.

$\overrightarrow{BD}$ $(0 ; a)$ et $\overrightarrow{CE}$ $(a ; 0)$ ne sont pas colinéaires donc les droites (BD) et (CE) sont sécantes.

K est un point de (BD) et de (CE) donc K est le point d'intersection de ces deux droites.

107 ***Fichiers associés le manuel numérique premium :*** **12_seconde_ex107.ggb (GeoGebra), 12_seconde_ex107.g2w (Geoplan), 12_seconde_ex107_correction.ggb (GeoGebra), 12_seconde_ex107_correction.g2w (Geoplan) ; *sur* www.bordas-indice.fr *:* 12_seconde_ex107.url (GeoGebraTube), 12_seconde_ex107.g2w (Geoplan), 12_seconde_ex107_correction.g2w (Geoplan)**

A. 1. Ouvrir le fichier **12_seconde_ex107** (GeoGebra ou Geoplan).

2. a. et b.

➔ Avec le logiciel de géométrie dynamique.

Utiliser Cercle (centre-point) . Cliquer sur , puis sur le point O_4 et ensuite sur le point M.

Utiliser Intersection entre deux objets . Cliquer sur puis sur chacun des points d'intersection.

Nommer ces points M_3 et M_4, en cliquant droit sur chacun de ces points, puis sur Renommer .

Utiliser Segment entre deux points . Cliquer sur , puis sur les extrémités de chacun des segments à créer.

➔ Avec le logiciel Geoplan.

Créer puis Ligne puis Cercle puis Défini par centre et un point :

Nom du centre : O4

Point du cercle : M

Nom du cercle C4.

Créer puis Point puis Intersection 2 cercles puis Deuxième point .

Pour M_3 :

Premier cercle : C3

Deuxième cercle : C4

Point déjà connu : M

2e point d'intersection : M3.

Créer de même M_4.

Créer puis Ligne , puis Segment(s) puis Définis par 2 points :

Noms des segments : M1M2 M2M3 M3M4 M4M1.

3. a. Cliquer gauche sur les points O_1, O_2, O_3 ou O_4 pour les déplacer.

On conjecture que $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.

b. On peut commencer par placer O_1, O_2, O_3 et O_4 de telle sorte que $O_1\,O_2O_3\,O_4$ soit un carré. En créant les segments $[O_1O_3]$ et $[O_2O_4]$, on peut conjecturer que $\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{O_2O_4}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_3}$ et en déduire que l'on peut placer O_1, O_2, O_3 et O_4 de telle sorte que les segments $[O_1O_3]$ et $[O_2O_4]$ soient perpendiculaires et aient la même longueur.

B. 1. M et M_1 sont sur C_1 donc $O_1M = O_1M_1$.

M et M_1 sont sur C_2 donc $O_2M = O_2M_1$.

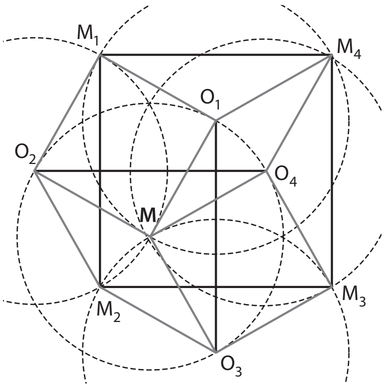
Comme C_1 et C_2 ont le même rayon, $O_1M = O_1M_1 = O_2M = O_2M_1$.

Le quadrilatère $M_1O_2MO_1$ est donc un losange et par conséquent un parallélogramme.

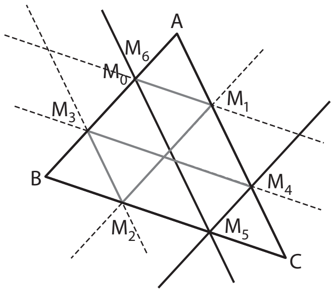
On démontrerait de même que $M_2O_3MO_2$, $M_3O_4MO_3$ et $M_4O_1MO_4$ sont des parallélogrammes.

2. $M_1O_2MO_1$ et $M_2O_3MO_2$ sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{M_1O_1} = \overrightarrow{O_2M}$ et $\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{M_2O_3}$.

D'où $\overrightarrow{M_1O_1} = \overrightarrow{M_2O_3}$.
On démontrerait de même que $\overrightarrow{O_1M_4} = \overrightarrow{O_3M_3}$.
$\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1M_4} = \overrightarrow{M_2O_3} + \overrightarrow{O_3M_3} = \overrightarrow{M_2M_3}$.
Donc $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.
3. $\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1M_4} = \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{MO_4} = \overrightarrow{O_2O_4}$
$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MO_3} = \overrightarrow{O_1O_3}$
Le parallélogramme $M_1M_2M_3M_4$ est un carré si et seulement si $M_1M_4 = M_1M_2$ et (M_1M_4) et (M_1M_2) sont perpendiculaires, et donc si et seulement si $O_2O_4 = O_1O_3$ et (O_2O_4) et (O_1O_3) sont perpendiculaires.



108



Conjecture : M_6 est confondu avec M_0, M_7 avec M_1…
Par construction, $AM_4M_5M_6$ et $BM_3M_4M_5$ sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{AM_6} = \overrightarrow{M_4M_5} = \overrightarrow{M_3B}$.
Or $\overrightarrow{M_3B} = \overrightarrow{M_3M_0} + \overrightarrow{M_0B}$.
Par construction, $BM_0M_1M_2$ et $AM_1M_2M_3$ sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AM_3}$.
On en déduit que $\overrightarrow{M_3B} = \overrightarrow{M_3M_0} + \overrightarrow{AM_3} = \overrightarrow{AM_0}$
Par conséquent, $\overrightarrow{AM_6} = \overrightarrow{AM_0}$ donc M_6 et M_0 sont confondus. Par suite, M_7 et M_1 sont confondus…

109 **1.** Il y a deux enchaînement de translations possibles :
de vecteurs $\overrightarrow{AM_2}$ puis $\overrightarrow{AM_1}$
ou de vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$.
2. Il y a six enchaînements de translations possibles :
de vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$ puis $\overrightarrow{AM_4}$;
de vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$ puis $\overrightarrow{AM_4}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$;
de vecteurs $\overrightarrow{AM_2}$ puis $\overrightarrow{AM_1}$ puis $\overrightarrow{AM_4}$;
de vecteurs $\overrightarrow{AM_2}$ puis $\overrightarrow{AM_4}$ puis $\overrightarrow{AM_1}$;
de vecteurs $\overrightarrow{AM_4}$ puis $\overrightarrow{AM_1}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$;
de vecteurs $\overrightarrow{AM_4}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$ puis $\overrightarrow{AM_1}$.