CHAPITRE 10

Repérage et configurations du plan

A Le programme

L'objectif de l'enseignement de la géométrie plane est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérée. Les configurations étudiées au collège, à base de triangles, quadrilatères, cercles, sont la source de problèmes pour lesquels la géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et performants.
En fin de compte, l'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs.
Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par les élèves leur donne une plus grande autonomie et encourage leur prise d'initiative.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Coordonnées d'un point du plan Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Distance de deux points du plan. Milieu d'un segment.	– Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées. – Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. – Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	Un repère orthonormé du plan est défini par trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O. À l'occasion de certains travaux, on pourra utiliser des repères non orthonormés.
Configurations du plan Triangles, quadrilatères, cercles.	Pour résoudre des problèmes : – Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles. – Utiliser les propriétés des symétries axiale ou centrale.	Les activités des élèves prennent appui sur les propriétés étudiées au collège et peuvent s'enrichir des apports de la géométrie repérée. Le cadre de la géométrie repérée offre la possibilité de traduire numériquement des propriétés géométriques et permet de résoudre certains problèmes par la mise en œuvre d'algorithmes simples.

B Notre point de vue

Ce chapitre traite la partie **Coordonnées d'un point du plan** et **Configurations du plan** du thème « Géométrie » du programme de la classe de Seconde. L'objectif est de reprendre certaines notions fondamentales en géométrie vues au collège (à réactiver grâce aux notions abordées dans les exercices de début **pour réactiver les savoirs**), de les approfondir et de les retravailler à l'aide d'un nouvel outil : la géométrie repérée. En effet, les formules donnant les coordonnées du milieu d'un segment, ainsi que la distance de deux points dans un repère orthonormé, permettent de résoudre de nombreux problèmes sur les quadrilatères usuels, les cercles ou les symétries.
Les séquences 2 et 3 du cours mettent l'accent sur des notions essentielles en géométrie, notions connues, mais qui sont revisitées en utilisant en particulier les notions de logique au programme de la classe : l'accent est mis sur la différence

entre une proposition et sa réciproque (dans le cas du théorème de Pythagore et du théorème de Thalès), on découvre la notion de contraposée à l'occasion du théorème de Pythagore et on travaille sur la notion de condition nécessaire et suffisante à l'occasion de la caractérisation des quadrilatères remarquables.
Les divers types de raisonnement sont particulièrement mis en avant dans ce chapitre, aussi bien dans les activités (par exemple, l'**activité 3**), que dans le cours et les savoir-faire (**SF 5** : « démontrer avec un raisonnement par contraposée »), ou bien dans les exercices.

Les notions abordées dans le chapitre 10

- Repérage dans le plan
- Propriétés des triangles et des cercles
- Propriétés des quadrilatères
- Symétrie axiale et symétrie centrale
- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

C Réactiver les savoirs

Voir manuel page 333 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

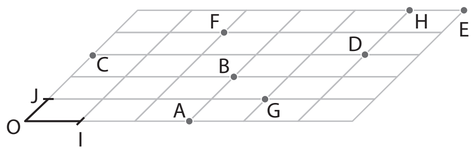
Activité 1 Pavages et repérages du plan

Cette activité revient dans un premier temps sur les repères orthonormés, déjà utilisés au collège. On découvre ensuite un nouveau type de repère, toujours à partir d'une situation concrète : les pavages.

1. On définit un repère du plan en choisissant un point O, l'origine : c'est un sommet d'un des carrés du pavage. Puis, on choisit un autre sommet I de ce carré et le sommet J opposé à I : (O, I, J) est alors un repère du plan.

2. a. Coordonnées des points : B(4 ; 3), C(6 ; 5), D(3 ; 0), E(0 ; 3).

b. Figure avec les points F, G, H.



Activité 2 Distance de deux points

Cette activité permet de découvrir la formule donnant la distance de deux points A et B dans un repère orthonormé. Pour cela, on fait d'abord un calcul de distance à vol d'oiseau sur une carte munie d'un quadrillage GPS, ce qui donne la méthode de la démonstration dans un cadre plus général. On s'intéresse ensuite à un cas plus général, mais avec quelques conditions sur la position des points A et B : on remarque enfin que la position des points n'a pas d'influence sur la formule générale.

***Fichier associé sur le site* www.bordas-indice.fr :**
10_seconde_activite2.url *(fichier élève, GeoGebraTube) ;*
sur le manuel numérique premium :
10_seconde_activite2.ggb *(fichier élève, GeoGebra).*

1. Le quadrillage permet de considérer un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 4 km et 1 km. L'hypoténuse a donc pour longueur, en km :

$$\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}\approx 4{,}1.$$

La distance à vol d'oiseau entre la Croix de Dormiaz et le refuge des Arolles est environ 4,1 km.

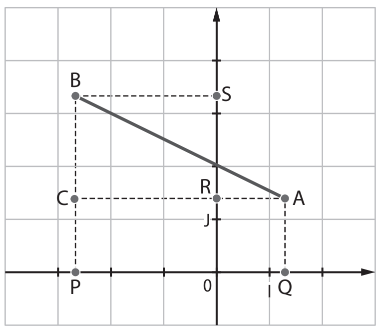
2. a. C a pour coordonnées $(x_B ; y_A)$.

b. (BC) et (AC) sont respectivement parallèles à (OJ) et (OI). Puisque (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, (BC) et (AC) le sont aussi, donc le triangle ABC est rectangle en C.

c. AC = PQ = PO + OQ.
PO $= -x_A$ et OQ $= x_B$ donc AC $= x_B - x_A$.
De la même façon : BC = SR = SO – OR $= y_B - y_A$.

d. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$, soit $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
d'où : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

3. a.



b. AC $= x_A - x_B$.

c. La formule n'est pas modifiée car $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$.

Activité 3 Une figure trompeuse !

Cette activité permet de découvrir plusieurs types de raisonnement à partir d'une situation géométrique dans laquelle la perception est mise en défaut par la démonstration. Cette activité offre la possibilité de revenir sur les thèmes essentiels vus au collège en géométrie : théorème de Thalès, théorème de Pythagore, cas particulier de l'inégalité triangulaire, calculs d'aires.

***Fichier associé sur le site* www.bordas-indice.fr :**
10_seconde_activite3.url *(fichier élève, GeoGebraTube) ;*
sur le manuel numérique premium :
10_seconde_activite3.ggb *(fichier élève, GeoGebra).*

1. a. On applique le théorème de Thalès aux parallèles (BC) et (AF) dans le triangle AEF.

b. $\frac{EB}{EA} = \frac{13}{21}$ et $\frac{BC}{AF} = \frac{8}{13}$.

c. Ces deux rapports sont différents puisque $\frac{13}{21} = \frac{169}{273}$ et $\frac{8}{13} = \frac{168}{273}$. Donc, l'hypothèse faite au départ est fausse : les points C, E, F ne sont pas alignés.

2. a. Avec le théorème de Pythagore dans les triangles BCE, CDF et AEF, on trouve :
CE = $\sqrt{233}$; CF = $\sqrt{89}$; EF = $\sqrt{610}$.

b. CE + CF = $\sqrt{233} + \sqrt{89}$.
CE + CF ≠ EF, donc les points C, E, F ne sont pas alignés.
En effet, E, C, F alignés dans cet ordre implique l'égalité EC + CF = EF.
La contraposée de cette implication est : EC + CF ≠ EF implique E, C, F non alignés dans cet ordre.

3. L'aire du carré ABCD est 64. L'aire de BCE est 52, celle de CDF est 20, celle de AEF est 136,5. La somme des aires du carré et des triangles BCE et CDF est 136 : elle est inférieure à l'aire du triangle AEF. Donc les points E, C, F ne sont pas alignés.

4. a. Coordonnées des points : C(8 ; 8), E(21 ; 0) et F(0 ; 13).

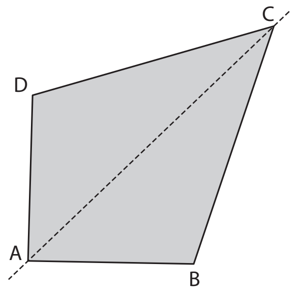
b. On pose $f(x) = ax + b$, avec a et b réels. On a : $f(21) = 0$ et $f(0) = 13$.
D'où : $21a + b = 0$ et $b = 13$.
On en déduit : $a = -\frac{13}{21}$. Ainsi : $f(x) = -\frac{13}{21}x + 13$.
$f(8) = \frac{169}{21}$: puisque $f(8) \neq 8$, le point C n'appartient pas à la droite (EF), donc E, C et F ne sont pas alignés.

Activité 4 Un isocerfvolant

Cette activité permet de travailler sur les quadrilatères classiques de la géométrie et leurs propriétés : parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés. Elle est aussi l'occasion de réaliser des constructions géométriques avec les outils du collège.

***Fichier associé sur le site* www.bordas-indice.fr :**
10_seconde_activite4.url *(fichier élève, GeoGebraTube) ;*
sur le manuel numérique premium :
10_seconde_activite4.ggb *(fichier élève, GeoGebra).*

1. a. Isocerfvolant en A :



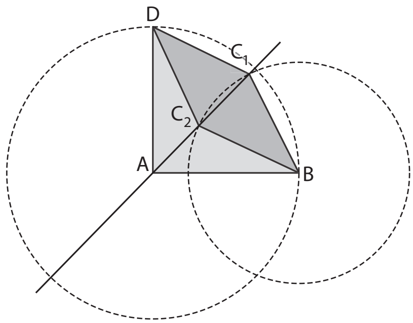
b. Quadrilatère ayant un axe de symétrie et qui n'est pas un isocerfvolant : il suffit de construire un losange qui n'est pas un carré.

2. a. Vrai.

b. Faux : en effet, la diagonale [AC] d'un rectangle n'est pas un axe de symétrie d'un rectangle non carré.

c. Vrai : un isocerfvolant dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme ; c'est un rectangle car il a un angle droit, et c'est un carré car c'est un rectangle dont une diagonale est un axe de symétrie.

3. a. On construit d'abord le segment [AB], puis la perpendiculaire à (AB) en A : le cercle de centre A et de rayon 4 coupe cette perpendiculaire en deux points, soit D l'un d'eux. On trace ensuite la médiatrice (d) de [BD] et le cercle (C) de centre B et de rayon 3 : (d) et (C) se coupent en deux points C_1 et C_2. On obtient ainsi deux isocerfvolants différents : l'un est convexe, l'autre pas.



b. On calcule BD dans le triangle rectangle ABD : BD = $4\sqrt{2}$.

c. L'aire de ABD est 8.
On calcule ensuite CI, où I est le milieu de [BD] :

$$CI^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 9, \text{ soit } CI = 1.$$

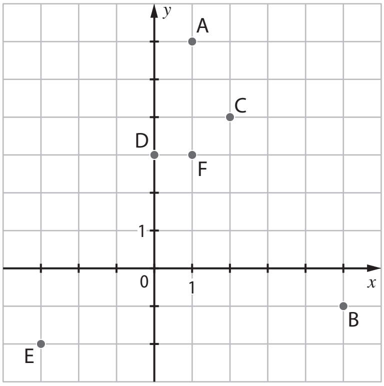
L'aire de BCD est $2\sqrt{2}$.

d. L'aire de l'isocerfvolant convexe ABC_1D est égale à $8 + 2\sqrt{2}$.
L'aire de l'isocerfvolant non convexe ABC_2D est égale à $8 - 2\sqrt{2}$.

E Exercices

Pour démarrer

1 **1.** $x_I = 1$; $x_J = 0$.
2. O (0 ; 0).
3. (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.
2 A(3 ; 2), B(0 ; 2), C(–2 ; –1), D (–1 ; 0), E (2 ; –2).
3 P(3 ; 2), Q(–1 ; 3), R(–2 ; –2), S(1 ; –1), T(–3 ; 0).
4 On obtient la représentation graphique suivante :



5 C'est l'axe des abscisses.
6 C'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
7 **1.** Formule **a**.
2. Formule **b**.
8 **1.** $\sqrt{5}$; **2.** $\sqrt{5}$; **3.** $\sqrt{5}$; **4.** $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
9 **1.** $\sqrt{37}$; **2.** $\sqrt{65}$; **3.** $\sqrt{58}$; **4.** $\sqrt{41}$.
10 $EF = \sqrt{13}$; $EG = 1$; $FG = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
11 **1.** AK = 5 ; BK = 5.
2. K est équidistant de A et B.
12 **1.** Milieu de [AB] : (3 ; 3).
2. Milieu de [AB] : $\left(\frac{3}{2} ; 6\right)$.
13 **1.** Milieu de [AB] : $\left(\frac{9}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$.
2. Milieu de [AB] : (28 ; 5).
14 **Exercice corrigé, voir page 333 du manuel.**
15 Centre du cercle : $\Omega(2 ; 4)$.
16 $AB = \sqrt{61}$; $AC = \sqrt{58}$; $BC = \sqrt{65}$.
Ce sont B et C les plus éloignés.
17 **2.** $AB = \sqrt{2}$; $AC = \sqrt{8}$; $BC = \sqrt{10}$.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc ABC est un triangle rectangle en A.
18 **2.** $OB = AB = \sqrt{13}$, donc le triangle OAB est isocèle en B.
19 Les deux phrases complétées sont :
x prend la valeur $(x_A + x_B)/2$
y prend la valeur $(y_A + y_B)/2$.
20 **1.** Non, car OI = 1.
2. Oui, car OA = 2.
21 Son rayon est : $AB = \sqrt{5}$.
22 Le symétrique de A est A′(4 ; –3) et le symétrique de B est B.

23 **1.** La hauteur et la médiatrice.
2. On trace deux médiatrices du triangle : leur point d'intersection donne le centre du cercle.
24 **1.** Le troisième côté peut être l'hypoténuse ou non.
2. Si c'est l'hypoténuse, alors le troisième côté a pour longueur $\sqrt{544}$ cm $= 4\sqrt{34}$ cm.
Sinon, il a pour longueur 16 cm.
25 $AB^2 = BC^2 + CA^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.
26 **1.** Oui ; **2.** Non ; **3.** Non ; **4.** Oui.
27 **1.** Il est rectangle en H.
2. AH = 3.
28 **Exercice corrigé, voir page 333 du manuel.**
29 Avec le théorème des milieux, on trouve :
$$AB = 6 ; AC = 8 ; BC = 2.$$
30 D'après le théorème des milieux, (IJ) est parallèle à (BC). Puisque la médiatrice de [BC] est perpendiculaire à (BC), on en déduit que (IJ) est perpendiculaire à cette médiatrice.
31 On a : $\frac{AB'}{AB} = \frac{5}{6}$ et $\frac{AC'}{AC} = \frac{5}{6}$.
Puisque $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ avec A, B′, B alignés et A, C′, C alignés dans le même ordre, la réciproque du théorème de Thalès prouve que (BC) et (B′C′) sont parallèles.
32 **1.** O est le milieu de [AC], donc d'après le théorème des milieux dans ACD, M est le milieu de [AD].
2. (CM) et (OD) sont deux médianes du triangle ACD, donc R est le centre de gravité de ce triangle.
33 **1.** C'est le milieu de l'hypoténuse.
2. L'hypoténuse a pour longueur 17, donc le rayon du cercle est $\frac{17}{2}$.
34 **1.** OAT et OAT′ sont rectangles, respectivement en T et T′.
2. $AT^2 + OT^2 = OA^2$ et $AT'^2 + OT'^2 = OA^2$.
Puisque OT = OT′, alors AT = AT′.
35 Le cercle passant par A, B, H a pour diamètre [AB]. Puisque (AC) est perpendiculaire à (AB) en A, la droite (AC) est la tangente à ce cercle en A.
36 **1.** Non : ce peut être par exemple un trapèze rectangle.
2. Oui, ce sont tous les carrés.
37 **1.** (BC) et (BD) sont sécantes, donc toute parallèle à l'une des droites est sécante à l'autre.
2. (AD) est parallèle à (BC), donc à (BM), et (BD) est parallèle à (AM), donc ADBM est un parallélogramme.
38 **1.** Les centres de ces parallélogrammes semblent confondus.
2. Comme ABCD est un parallélogramme, [AC] et [BD] ont même milieu O ; de même, [BD] et [EF] ont même milieu : ce milieu est O, donc [AC] et [EF] ont même milieu.
Ainsi, AECF est un parallélogramme.

39 ABCD est un parallélogramme, car ses diagonales se coupent en leur milieu. Et c'est un losange car elles sont perpendiculaires.

40 EAFO est un rectangle.

41 MP = $5\sqrt{2}$ cm.

42 Son côté mesure $\frac{8}{\sqrt{2}}$ cm = $4\sqrt{2}$ cm.

43 **Exercice corrigé, voir page 333 du manuel.**

44 **1.** Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et ont même longueur.

2. Un rectangle a un cercle circonscrit car son centre est à égale distance des quatre sommets (ceci parce que les demi-diagonales ont même longueur).

3. Son rayon est $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

45 **1.** Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

2. On construit le segment [AC], puis le milieu O de [AC]. On trace alors la droite (BO) qui n'est autre que (BD).

46 **1. Vrai**.

2. Réciproque : « si ABCD a quatre côtés égaux, alors c'est un carré ». Elle est fausse : il suffit pour cela de considérer un losange non carré.

47 **1.** C'est A lui-même.

2. OA = OA'

3. L'image de O par la symétrie de centre O est le point O.

48 **1.** L'image de A est B ; celle de E est F.

2. AE = BF, car une symétrie centrale conserve les longueurs.

49 A, I, B sont alignés, donc leurs points images A, K, E par la symétrie d'axe (AC) sont aussi alignés.

50 IA = IB, car I et B sont respectivement les symétriques de I et A par rapport à (d). De même, IB = IC car I et C sont respectivement les symétriques de I et B par rapport à (d').

51 **1.** OK = OI = 1, donc K appartient au cercle C. Ainsi, [IK] est un diamètre du cercle C car I et K sont sur le cercle et O appartient à [IK].

2. AIK est un triangle rectangle en A.

52 AOBE est un losange.

Pour s'entraîner

53 **1.** Coordonnées des points :
A(1 ; 0,5), B(–0,5 ; 1), C(0,5 ; 1,5), D(–1 ; –1), E(1,5 ; –1).

54 **1.** AB = $\sqrt{20}$; AC = $\sqrt{65}$; BC = $\sqrt{45}$.

2. ABC est rectangle en B.

55 AE = $\sqrt{13}$; BE = $\sqrt{13}$; CE = $\sqrt{13}$.
Puisque AE = BE= CE, E est le centre du cercle circonscrit à ABC ; son rayon est $\sqrt{13}$.

56 **1.** AC = BC = $\sqrt{5}$, donc C est sur la médiatrice de [AB].

2. AD = BD = $\sqrt{29}$, donc D est sur la médiatrice de [AB].
Ainsi, (CD) est la médiatrice de [AB] : elle coupe donc [AB] en son milieu.

57 **1.** Avec A(1 ; 2) : NON ; avec A(0 ; –1) : OUI.

2. A doit appartenir au cercle de centre O et de rayon 1.

58 **1.** E$\left(2 ; -\frac{1}{2}\right)$ et F$\left(2 ; -\frac{1}{2}\right)$.

2. Oui, car [AC] et [BD] ont même milieu.

59 On résout $\frac{5+x}{2} = -3$ et $\frac{2+y}{2} = 7$.
C a pour coordonnées (–11 ; 12).

60 Le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{7}{2} ; 2\right)$. On résout $\frac{x-4}{2} = \frac{7}{2}$ et $\frac{y+3}{2} = 2$.
Donc, D a pour coordonnées (11 ; 1).

61 **Exercice résolu, voir page 220 du manuel.**

62 **Exercice corrigé, voir page 333 du manuel.**

63 **1.** B(0,5 ; 0) ; D(1 ; 1), F(0 ; –1) ; G(0,5 ; –1) ; H(0 ; 2) ; K(–1 ; 2) ; J(–1 ; 0).

2. A(0 ; 2) ; B(–0,5 ; 2) ; C(–1 ; 2) ; D(–1 ; 1) ; F(0 ; 3).

64 **Vrai**, car AE = BE = $\sqrt{80}$.

65 **Faux**, car $x^2 + y^2 = 4$.

66 **1.** AKB est rectangle en K car K appartient au cercle de diamètre [AB]. ALB est rectangle en L car L appartient au cercle de diamètre [AB].

2. (AL) et (BK) sont deux hauteurs du triangle ABC : H est l'orthocentre de ce triangle, donc la droite (CH) est la 3^{e} hauteur du triangle ABC. On en déduit que (CH) est perpendiculaire à (AB).

67 Dans le triangle ACF, (AB) et (EF) sont des hauteurs. Elles se coupent en E, donc E est l'orthocentre de ce triangle : la 3^{e} hauteur de ce triangle est (CE), donc (CE) est perpendiculaire à (AF).

68 Dans le triangle BCG, (AC) et (AD) sont des hauteurs : elles se coupent en F, donc (FG) est la 3^{e} hauteur de ce triangle. Celle-ci est perpendiculaire à (BC) et passe par F, c'est donc aussi la droite (EF). Ainsi, E, F, G sont alignés.

69 **Exercice corrigé, voir page 333 du manuel.**

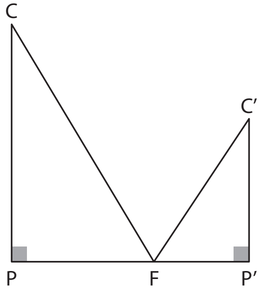
70 (AJ) est la bissectrice issue de O dans le triangle OAB. La droite (OI) est une médiane du triangle OAB : elle est aussi bissectrice car OAB est isocèle en O (car OA = OB). Ces deux bissectrices se coupent en J, donc la troisième bissectrice de ce triangle passe aussi par J : (BJ) est bien bissectrice de $\widehat{ABO}$.

71 ***Fichier associé sur le manuel numérique premium : 10_seconde_ ex71.ggb (fichier corrigé enseignant, GeoGebra).***
Avec le logiciel, en modifiant le triangle ABC, on conjecture que le triangle BCE est isocèle.
La droite (EI) passe par le milieu I de [BC] et elle est perpendiculaire à (BC) (car parallèle à (AH) qui est perpendiculaire à (BC)), donc c'est la médiatrice de [BC]. On en déduit : EB = EC, donc BCE est isocèle en E.

72 **1.** $\widehat{BCA} = \widehat{CAI}$ car ces angles sont alternes-internes. On a aussi : $\widehat{CBA} = \widehat{IAD}$, car ces angles sont correspondants. Le triangle ABC est isocèle en A, donc $\widehat{CBA} = \widehat{BCA}$. On en déduit : $\widehat{CAI} = \widehat{IAD}$, donc la droite (d) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$.

2. Le point I appartient à deux bissectrices du triangle ACD, c'est donc le point de concours des bissectrices de ce triangle. Ainsi, (DI) est la troisième bissectrice de ce triangle.

73 Soit P et P′ les deux palmiers, C et C′ les cimes des arbres et F la position du poisson.



On note PF = x, et le théorème de Pythagore appliqué dans les triangles rectangles CFP et C′FP′ donne : $9^2 + x^2 = FC^2$ et $6^2 + (15 - x)^2 = FC'^2$.
On a FC = FC′ car les oiseaux ont même vitesse et même temps de vol, d'où :

$$81 + x^2 = 36 + 225 - 30x + x^2, \text{ soit } x = 6.$$

Le poisson est à 6 m du grand palmier.

74 ***Fichier associé sur le manuel numérique premium : 10_ seconde_ ex74.ggb (fichier corrigé enseignant, GeoGebra).***
1. On conjecture que le point D doit être tel que AD = 3,75.
2. On pose : AD = x, d'où DE = x (car ADEF est un carré) et on applique le théorème de Thalès dans le triangle ABC :
$\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB}$, soit $\frac{10 - x}{10} = \frac{x}{6}$.
D'où : $60 - 6x = 10x$ et $x = \frac{15}{4} = 3{,}75$.

75 **1.** L'aire de IAB est $\frac{1}{2}\, c \times r$.
2. L'aire du triangle ABC est la somme des aires des triangles IAB, IAC et IBC, soit :

$$\frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = S.$$

Soit $\frac{1}{2}pr = S$ et $r = \frac{2S}{p}$.
3. Pour ce triangle rectangle, $S = \frac{1}{2}bc$, soit : $r = \frac{bc}{a+b+c}$.

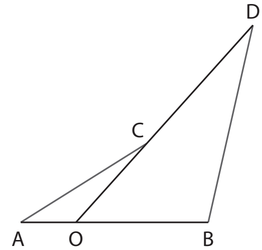
76 $CD^2 = 26$; $CF^2 = 18{,}25$; $FD^2 = 7{,}25$.
$CF^2 + FD^2 = 25{,}5$. Puisque $CF^2 + FD^2$ est différent de CD^2, le triangle FDC n'est pas rectangle, d'après la contraposée du théorème de Pythagore.

77 $\frac{AB}{AM} = \frac{1{,}000\,002}{1{,}000\,001}$ et $\frac{AC}{AN} = 1{,}000\,001$.
Si on avait $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$, alors on aurait
$\frac{1{,}000\,002}{1{,}000\,001} = 1{,}000\,001$ et ainsi : $1{,}000\,001^2 = 1{,}000\,002$
soit $1 + 0{,}000\,002 + 10^{-12} = 1 + 0{,}000\,002$
et $10^{-12} = 0$, ce qui est faux.
Ainsi : $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$, et d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

78 **Exercice résolu, voir page 221 du manuel.**

79 *Correctif : il se peut que dans certains manuels il y ait une erreur dans l'énoncé. Il faut lire : « (…) elle obtient une aire de 61 ou de 59 ».*
Étude de la figure de gauche : on suppose les points A, B, D alignés. La somme des aires des triangles colorés en bleu et rouge et des aires des parties de rectangles jaune et orange est égale à : 10,5 + 5 + 10 + 4 = 29,5. Or, l'aire du triangle ADH, où H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ADE est égale à 30.
Ces deux aires devraient être égales, donc A, B, D ne sont pas alignés et B est à « l'intérieur » du triangle ADE.
Étude de la figure de droite : on suppose les points A, B, D alignés. La somme des aires des triangles colorés en bleu et rouge et des aires des parties de rectangles jaune et orange est égale à : 10,5 + 5 + 12 + 2 + 1= 30,5.
Or, l'aire du triangle ADH, où H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ADE est égale à 30. Ces deux aires devraient être égales, donc A, B, D ne sont pas alignés et B est à « l'extérieur » du triangle ADE. Dans les deux cas, la figure est trompeuse : on n'a pas un triangle.

80 Non, cela dépend de la position des points A, B, C, D.
C'est **faux** en particulier si A et B sont de part et d'autre de O, et C et D du même côté par rapport à O.



81 C'est **faux** : ils sont égaux à $\sqrt{2}$.

82 C'est **faux** : il est bien tangent aux trois côtés du triangle, mais pas nécessairement en leurs milieux.

83 M appartient au cercle de diamètre [AB], donc (AM) et (BM) sont perpendiculaires.
K appartient au cercle de diamètre [AE], donc (AK) et (EK) sont perpendiculaires, et aussi (AM) et (EK). On en déduit que (BM) et (EK) sont parallèles.

84 Supposons que (AB) soit la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A. Alors, le triangle OAB est rectangle en A et le théorème de Pythagore donne : $OB^2 = OA^2 + AB^2$, soit $7^2 = 5^2 + 5^2$, ce qui est faux. Donc, (AB) n'est pas la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

85 **Exercice corrigé, voir page 334 du manuel.**

86 **1.** L'orthocentre du triangle ABH est le point C.
2. Le point M appartient au cercle de diamètre [CH] car le triangle CHM est rectangle en M. De même pour le point N, car le triangle CHN est rectangle en N.

87 La diagonale du carré a pour longueur $2R$, et le côté du carré a pour longueur $R + r$.
On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle d'hypoténuse la diagonale du carré et de côtés les côtés du carré.
On a : $2(R + r)^2 = (2R)^2$, soit $\sqrt{2}(R + r) = 2R$.
D'où : $R + r = \sqrt{2}R$, et $r = (\sqrt{2} - 1)R$.
Ainsi : $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.

88 CH = $\sqrt{3}$ et AC = 2.

89 **1.** Les points A, P, R, H sont sur le cercle de diamètre [PR] : P et R de façon évidente, A et H car les triangles APR et HPR sont respectivement rectangles en A et H.
Le centre O de ce cercle est le milieu de [PR].
2. Le cercle Γ contient A, A′ et H. Mais le triangle AHA′ est rectangle en H, donc [AA′] est un diamètre de Γ : on en déduit que O est le milieu de [AA′], donc O, A et A′ sont alignés.

3. APA'R est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu : c'est de plus un rectangle, car il a un angle droit en A.

90 **Vrai.** Dans le triangle rectangle OAM, on a :
$OM^2 = OA^2 + AM^2$, soit $AM^2 = 25 - 9 = 16$, ce qui donne AM = 4.

91 **Vrai.** On note O et O' les centres de ces deux cercles. Les tangentes en A sont perpendiculaires si et seulement si le triangle AOO' est rectangle en A, ce qui équivaut à $OO'^2 = OA^2 + O'A^2$, soit $OO'^2 = 2r^2$, ce qui équivaut à $OO' = r\sqrt{2}$.

92 **1.** ABED est un rectangle (c'est un parallélogramme avec un angle droit en A).

2. AIDJ est un losange car c'est un parallélogramme dont les diagonales [AD] et [IJ] sont perpendiculaires.

93 $\frac{OC}{OA} = 3 = \frac{OD}{OA}$ avec A, O, C et B, O, D alignés dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, (AB) est parallèle à (CD). Ainsi, ABCD est un trapèze.
Ce n'est pas un parallélogramme, car $\frac{CD}{AB} = 3$, donc CD n'est pas égal à AB.

94 **1. Vrai :** si on note ABCD ce quadrilatère dont les angles droits sont en A et C, alors A, B, C et D sont sur le cercle de diamètre [BD].

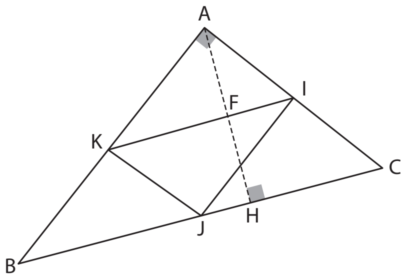
2. Réciproque : « si les quatre sommets d'un quadrilatère sont sur un même cercle, alors deux angles opposés de ce quadrilatère sont des angles droits. »
Faux : si on note ABCD ce quadrilatère, ceci ne serait vrai que si [AC] ou [BD] était un diamètre de ce cercle.

95 **Exercice corrigé, voir page 334 du manuel.**

96 **1.** On a bien : $480^2 + 360^2 = 600^2$, donc le triangle ABC est rectangle en A.

2. J est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC : c'est le milieu de [BC].

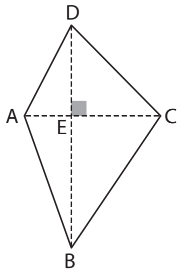
3. a. En utilisant le théorème des milieux, on montre que (AI) est parallèle à (KJ) et que (AK) est parallèle à (IJ), donc AKJI est un parallélogramme. Il a un angle droit en A, donc c'est un rectangle.



b. (IK) est parallèle à (BC), donc (IK) est perpendiculaire à (AH) : soit E le point d'intersection de ces droites. Alors, le théorème des milieux dans le triangle ACH montre que F est le milieu de [AH]. Ainsi, la droite (IK) est la médiatrice de [AH] car elle est perpendiculaire à (AH) en son milieu : on en déduit que tout point du segment (IK] est à égale distance des points A et H.

97 **Vrai.** On le démontre en utilisant la propriété des angles correspondants, et celle des angles alternes- internes.

98 **Faux.** On peut dessiner un quadrilatère de ce type faisant office de contre-exemple.



99 **1.** Dans le triangle ABC, le théorème des milieux permet de dire que (MQ) est parallèle à (BD). Dans le triangle BCD, le théorème des milieux permet de dire que (NP) est parallèle à (BD). On en déduit que (MQ) est parallèle à (NP).
On applique de la même façon le théorème des milieux dans les triangles ABC et ACD, et on en déduit que (MN) est parallèle à (PQ).
Ainsi, MNPQ est un parallélogramme.

2. MNPQ est un rectangle si et seulement si (MN) est perpendiculaire à (NP), ce qui équivaut à (AC) perpendiculaire à (BD).
MNPQ est un losange si et seulement si MN = NP, ce qui équivaut à AC = BD.
MNPQ est un carré si et seulement si AC = BD et (AC) perpendiculaire à (BD).

100 Par la symétrie de centre I, A et B se transforment en A' et C, donc AB = A'C.
Par la symétrie d'axe (BC), A' et C se transforment en E et C, donc A'C = EC.
On en déduit : AB = EC.

101 ABDC est un losange car c'est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs [AB] et [AC] sont de même longueur.

102 AB'C' a pour image le triangle A'B'C' par la symétrie de centre I, milieu de [B'C'] (qui est aussi le milieu de [AA']).

103 **Exercice résolu, voir page 224 du manuel.**

104 **Exercice corrigé, voir page 334 du manuel.**

105 D'après le théorème des milieux dans ABC, (IJ) est parallèle à (BC), donc (IJ) est perpendiculaire à (AH) en un point que l'on note K. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABH, le point K est le milieu de [AH].
Ainsi, (IJ) est perpendiculaire à [AH] en son milieu : il s'ensuit que H est le symétrique de A par rapport à (IJ).

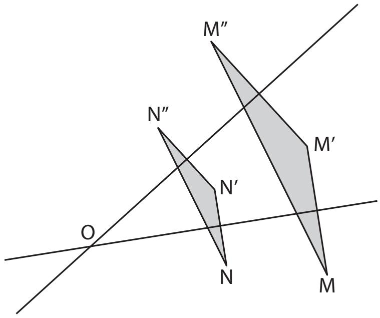
106 **1.** AOCE est un losange : c'est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu I, et il a deux côtés consécutifs de même longueur (OA = OC).

2. Le polygone ABCDE admet la droite (OE) comme axe de symétrie.
On calcule : $AC = 8^2 - 4^2 = 4\sqrt{3}$.
L'aire du polygone ABCDE est :

$$8 \times 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\ .$$

107 **Faux :** un rectangle n'a que deux axes de symétrie, les droites passant par son centre et perpendiculaires aux côtés.

108 **Faux :** dans cette figure, par exemple, les segments [MM''] et [NN''] n'ont pas le même milieu.



109 **1.** $AB^2 = 3^2 + 2^2 = 13$; $AD^2 = 4^2 + 6^2 = 52$; $BD^2 = 1^2 + 8^2 = 65$.
Puisque $AB^2 + AD^2 = BD^2$, le triangle ABD est rectangle en A, donc (AB) et (AD) sont perpendiculaires.
2. [BD] et [AC] ont même milieu, le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; 1\right)$, donc ABCD est un parallélogramme. Comme il possède un angle droit (en A), c'est un rectangle.
3. L'aire de ABCD est égale à 26.

110 **1.** $AB^2 = 45$; $AC^2 = 90$; $BC^2 = 45$.
Puisque $AB^2 + BC^2 = AB^2$, le triangle ABC est rectangle en B.
On a aussi : $AB = BC = \sqrt{45}$, donc ABC est isocèle : c'est bien un triangle rectangle isocèle.
2. ABCD est un parallélogramme car ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu E. C'est un carré car il a un angle droit (en B) et deux côtés consécutifs de même longueur (BA = BC).
3. Le périmètre de ABCD est égal à $12\sqrt{5}$.

111 On calcule : $MN^2 = 100$; $MH^2 = 4 + h^2$; $NH^2 = 64 + h^2$.
Le triangle MNH est rectangle en H, d'où :
$MN^2 = MH^2 + NH^2$, soit :
$100 = 4 + h^2 + 64 + h^2$.
D'où : $h^2 = 16$, soit $h = 4$.

112 **Exercice corrigé, voir page 334 du manuel.**

113 *Correctif : il se peut que dans certains manuels, l'énoncé demande de saisir (dans les entrées) une deuxième fois x_B ; il faut lire « x_C ».*
Algorithme complété :

Variables	x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, sont des réels
Entrée	Saisir x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C
Traitement et Sortie	**Si** $x_A + x_C = 2\ x_B$ et $y_A + y_C = 2\ y_B$ **Alors** afficher « OABC est un parallélogramme» **Sinon** afficher « OABC n'est pas un parallélogramme » **Fin Si**

114 $OA^2 = a^2 + a'^2$; $OB^2 = b^2 + b'^2$;
$AB^2 = (a - b)^2 + (a' - b')^2 = a^2 - 2ab + b^2 + a'^2 - 2a'b' + b'^2$
OAB est rectangle en O si et seulement si $AB^2 = OA^2 + OB^2$, ce qui équivaut à :
$a^2 - 2ab + b^2 + a'^2 - 2a'b' + b'^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2$,
soit $ab + a'b' = 0$.

115 **1.** $AB = \sqrt{18}$; $AC = \sqrt{32}$; $BC = \sqrt{50}$.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc le triangle ABC est rectangle en A.
2. Le périmètre de ABC est égal à $10\sqrt{2}$.
Son aire est égale à 6.
3. Le point K est le milieu de [BC] : ses coordonnées sont $\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$. Son rayon est égal à $\frac{1}{2}$BC, soit $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

116 **1.** $AB^2 = 20$; $AC^2 = 80$; $BC^2 = 100$.
Puisque $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est rectangle en A, et les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
2. Le point D a pour coordonnées (–1 ; –2).
3. ABDI est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. De plus, l'angle $\widehat{ABI}$ est droit puisque (AB) et (AI) sont perpendiculaires, donc c'est un rectangle.
Enfin, $AI = \sqrt{20} = AB$, donc c'est un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur : ABDI est donc un carré.
4. A, B, D, I sont sur le cercle circonscrit au carré : son centre est le centre Ω du carré, donc le point de coordonnées (–2 ; 1).
Son rayon est $\Omega A = \sqrt{10}$.

117 **1.** Coordonnées des points : A(5 ; 0), B(0 ; 5), C(–5 ; 0), D(0 ; –5), M(–3 ; 0).
2. $EM^2 = EO^2 - OM^2 = 25 - 9 = 16$, d'où EM = 4.
De même, on obtient : $EC = \sqrt{20}$; $EA = \sqrt{80}$.
3. AECF est un parallélogramme car ses diagonales [AC] et [EF] se coupent en leur milieu. Il a un angle droit en E, donc c'est un rectangle.

118 **Vrai.** M(x ; y) appartient à la médiatrice de [OI] si et seulement si OM = IM, ce qui équivaut à $OM^2 = IM^2$,
soit $x^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2$, soit $2x - 1 = 0$.

119 **Faux.** M appartient à la partie du plan comprise entre deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, l'une passant par I(1 ; 0), l'autre par I′(–1 ; 0).

120 **1.** $AB^2 = 72$; $AC^2 = 104$; $BC^2 = 32$.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc le triangle ABC est rectangle en A.
2. Les segments [AC] et [BD] ont même milieu, de coordonnées (2 ; –3), donc ABCD est un parallélogramme. Il a un angle droit en A, donc c'est un rectangle.
Le rayon du cercle circonscrit à ce rectangle est $\frac{1}{2}AC = \sqrt{26}$.

121 **1.** A′ a pour coordonnées (–2 ; –3) et B′(4 ; –5).
2. $AB = 2\sqrt{10}$ et $BA' = 2\sqrt{10}$.
3. ABA′B′ est un losange car c'est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.

122 **1.** $BJ = 2\sqrt{6}$; $BC = 4\sqrt{6}$.
2. $BJ = \frac{1}{2}BC$ et B, J, C sont alignés, donc J est le milieu de [BC].
D'après le théorème des milieux, les droites (AB) et (IJ) sont parallèles.

123 **1.** Le triangle MDI est isocèle car ID = IM = 4, donc la droite (IJ) qui est médiane du triangle MDI est aussi la médiatrice de [MD].
2. MDN est un triangle rectangle en D car D est un point du cercle de diamètre [MN].
3. MDNE est un rectangle.

Revoir des points essentiels

124 [AC] et [BD] ont même milieu, le point de coordonnées $\left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, donc ABCD est un parallélogramme.

125 [AC] et [BD] ont même milieu, de coordonnées (–1 ; –5), et AB = AD = $5\sqrt{2}$, donc ABCD est un losange.

126 [AC] et [BD] ont même milieu, le point de coordonnées (2 ; 2). De plus, AB = AD = $2\sqrt{5}$, donc ABCD est un losange.
Puisque $AB^2 + AD^2 = 20 + 20 = 40 = BD^2$, le triangle ABD est rectangle en A, et ce quadrilatère est un carré.

127 AI = $\sqrt{3}$ par le théorème de Pythagore.
IJ = $\frac{1}{2}$AB = 1, par le théorème des milieux.

128 BC = $\sqrt{5}$; AI = $\frac{1}{2}$BC = $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Le rayon du cercle circonscrit à ABC est $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

129 AH = $\sqrt{5}$. L'aire du triangle ABC est $2\sqrt{5}$. Elle est aussi égale à $\frac{1}{2}$BK × AC = $\frac{3}{2}$BK.
On en déduit : BK = $\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

Faire le point

Voir livre page 334. Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bords-indice.fr.

Travaux pratiques

TP1 Le trésor des pirates

Fichier associé sur le manuel numérique premium : 10_seconde_TP1_correction.ggb (fichier corrigé enseignant, GeoGebra).

L'objectif de ce TP est de trouver l'emplacement d'un trésor à partir de quelques indications laissées par le chef des pirates. Dans un premier temps, on utilise les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie pour y parvenir, puis on résout le problème en utilisant un repère du plan.

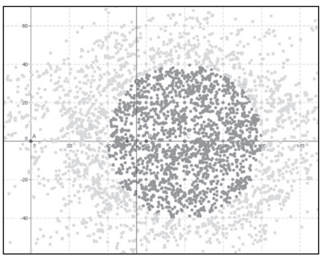
A. 1. P a pour coordonnées (50 ; 0).

2. On crée les points A, P et B en tapant dans la ligne de saisie successivement : **A=(0,0)**, **P=(50,0)**, **B=(60,0)**.

3. L'ensemble $\mathscr{D}$ est la médiatrice du segment [PB]. Pour représenter $\mathscr{D}$, on utilise l'outil Médiatrice (4e menu).

4. a. On suit les consignes de l'énoncé.

b. Faire prendre au point M un très grand nombre de positions : des points de couleur verte et des points de couleur rouge apparaissent à l'écran.



c. Les points rouge semblent appartenir au disque de centre le point de coordonnées (80 ; 0) et de rayon 40, alors que les points verts sont tous extérieurs à ce disque. On peut conjecturer que $\mathscr{S}$ est le cercle de centre C (80 ; 0) et de rayon 40.

d. Pour représenter $\mathscr{S}$, on définit d'abord le point C dans la barre de saisie, avec C = (80, 0), puis on utilise l'outil Cercle (centre – rayon) (6e menu).

e. On utilise l'outil Intersection entre deux objets (2e menu).
On peut lire les coordonnées de l'emplacement du trésor au décimètre près : (55 ; 31,2).

B. 1. L'abscisse des points de $\mathscr{D}$ est 55 puisque P et B ont respectivement pour abscisses 50 et 60.

2. a. M ∈ $\mathscr{S}$ si et seulement si MA = 2MB, ce qui équivaut à $MA^2 = 4MB^2$, en élevant au carré.

b. $MA^2 = x^2 + y^2$; $MB^2 = (x - 60)^2 + y^2$.

c. M ∈ $\mathscr{S}$ si et seulement si
$x^2 + y^2 = 4\,[(x - 60)^2 + y^2]$, ce qui équivaut à :
$x^2 + y^2 = 4x - 480x + 15\,200 + 4y^2$, soit
$3x^2 + 3y^2 - 480x + 15\,200 = 0$, soit
$x^2 + y^2 - 160x + 4\,800 = 0$.

d. $(x - 80)^2 = x^2 - 160x + 6\,400$, d'où :
$(x - 80)^2 + y^2 - 1\,600 = x^2 + y^2 - 160x + 4\,800$.

e. M ∈ $\mathscr{S}$ si et seulement si $(x - 80)^2 + y^2 = 1\,600$, c'est-à-dire $\sqrt{(x-80)^2 + y^2} = 40$, ce qui équivaut à CM = 40, où C est le point de coordonnées (80 ; 0).

3. a. Puisque $x = 55$, on en déduit :
$55^2 + y^2 - 8\,800 + 4\,800 = 0$, soit $y^2 = 975$.

b. Le trésor étant au nord du chemin reliant l'arbre mort au baril, y est positif, ce qui donne : $y = \sqrt{975} = 5\sqrt{39}$.
Le trésor a pour coordonnées (55 ; $5\sqrt{39}$).

TP2 La droite d'Euler

*F**ichier associé sur le site*** **www.bordas-indice.fr :**
10_seconde_TP2_correction.g2w ***(fichier corrigé enseignant, Geoplan) ; sur le manuel numérique premium :***
10_seconde_TP2_correction.ggb ***(fichier corrigé enseignant, GeoGebra) et*** **10_seconde_TP2_correction.g2w** ***(fichier corrigé enseignant, GeoGebra).***

L'objectif de ce TP est de découvrir expérimentalement une propriété des points remarquables d'un triangle, puis de démontrer cette propriété : ceci permet de découvrir la droite d'Euler d'un triangle.

A. Avec le logiciel GeoGebra

1. Utiliser l'outil Polygone (5e menu).

2. Utiliser l'outil Médiatrice, puis Intersection entre deux objets.

3. Construire d'abord les milieux de chaque côté du triangle avec l'outil Milieu ou centre (2e menu), puis tracer chaque médiane avec l'outil Droite passant par deux points (3e menu). On utilise enfin l'outil Intersection entre deux objets.

4. Pour construire la hauteur issue de A, on utilise l'outil Perpendiculaire (4e menu). On termine avec l'outil Intersection entre deux objets.

5. Utiliser l'outil Segment entre deux points (3e menu).

6. a. On conjecture que les points O, G, H sont alignés.

b. Dans la fenêtre **Algèbre**, on lit m = OG et p = OH. On peut conjecturer que OH = 3 OG.

7. Quand le triangle est isocèle en C, les points O, G, H sont alignés sur la hauteur issue de C. Quand il est équilatéral, les trois points O, G et H sont confondus.

Avec le logiciel Geoplan

1. On crée d'abord les points A, B, C avec le menu Créer, suivi de Point, Point libre et Dans le plan. Pour construire le triangle ABC : menu Créer, puis Ligne, Polygone et Polygone défini par ses sommets.

2. Dans le menu Créer, choisir Ligne, Droite, puis Médiatrice. Pour déterminer le point d'intersection, dans le menu Créer, sélectionner Point, puis Intersection 2 droites.

3. On construit d'abord les milieux de chaque côté du triangle avec le menu Créer, puis Point, puis Milieu.
Pour tracer chaque médiane : menu Créer, puis Ligne, puis Droite, et enfin Définies par 2 points.

4. Pour construire la hauteur issue de A, avec le menu Créer, choisir Ligne, puis Droite, puis Perpendiculaire.

5. Dans le menu Créer, utiliser Ligne, puis Segment, et Définis par 2 points.

6. a. On conjecture que les points O, G, H sont alignés.

b. Dans le menu Créer, puis Numérique, on choisit Calcul géométrique, et Longueur d'un segment. On appelle m la variable donnant la longueur de [OG] et p celle donnant la longueur de [OH]. On peut faire afficher les variables m et p avec le menu Créer, Affichage, puis Variable numérique déjà définie. On peut alors conjecturer que OH = 3OG.

7. Quand le triangle est isocèle en C, les points O, G, H sont alignés sur la hauteur issue de C. Quand il est équilatéral, les trois points O, G et H sont confondus.

B. 1. a. Le triangle ABD est rectangle en B car [AD] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

b. (CH) est la hauteur du triangle ABC issue de C, donc (CH) est perpendiculaire à (AB). Puisque (AB) et (BD) sont perpendiculaires, on en déduit que les droites (CH) et (BD) sont parallèles.

2. a. ADC est un triangle rectangle en C car [AD] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

b. (BH) est la hauteur du triangle ABC issue de B, donc (BH) est perpendiculaire à (AC). Puisque (DC) et (AC) sont perpendiculaires, on en déduit que les droites (DC) et (BH) sont parallèles.

3. Les droites (CH) et (BD) sont parallèles, ainsi que les droites (BH) et (DC), donc HBDC est un parallélogramme.

4. Puisque HBDC est un parallélogramme, le point A′, milieu de [BC], est aussi le milieu de [DH]. Donc, D est le symétrique de H par rapport à A′.

5. Dans le triangle ADH, (AA′) est une médiane, puisque A′ est le milieu de [DH] ; la droite (OH) est aussi une médiane de ce triangle, car O est le milieu de [AD].

6. Le point G est le point d'intersection de deux médianes du triangle ADH, donc c'est le centre de gravité du triangle ADH.

7. Puisque G appartient à la médiane (OH), les points O, G, H sont alignés.

D'après la propriété admise au début de la **partie B**, on en déduit que HG = $\frac{2}{3}$ HO, ce qui donne HO − OG = $\frac{2}{3}$ HO, donc $\frac{1}{3}$ HO = OG, et ainsi OH = 3OG.

Pour approfondir

130 ***Fichiers associés sur le manuel numérique premium :***
10_seconde_ex130_1.ggb, 10_seconde_ex130_2.ggb
(fichiers corrigés enseignant, GeoGebra).

1. a. Le théorème de Pythagore dans le triangle AEB donne : AB^2 = AE^2 + EB^2.
Or : AB = $R + r$, AE = AC − CE = AC − BD = $R - r$, et EB = CD = a, d'où : $(R + r)^2 = (R - r)^2 + a^2$.

b. On développe : $R^2 + 2rR + r^2 = R^2 - 2rR + r^2 + a^2$, soit $a^2 = 4rR$, et $a = \sqrt{4rR}$.

c. Dans ce cas : $a = \sqrt{144} = 12$.
On peut alors construire C et D, puis tous les autres points.

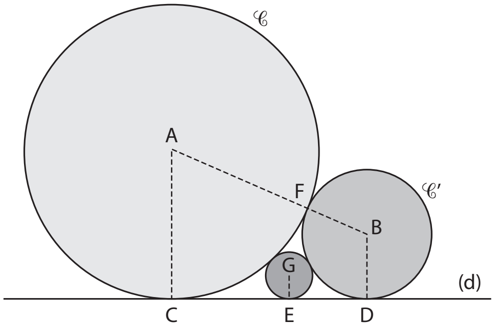
2. a. D'après la question **1. b**, on a :

$$\text{CI}^2 = 4 \times 9 \times c = 36c \text{ et DI}^2 = 4 \times 4 \times c = 16c.$$

b. $\frac{\text{CI}}{\text{DI}} = \frac{6\sqrt{c}}{16\sqrt{c}} = \frac{3}{2}$.
D'où : 2CI = 3DI = 3(CD − CI). Ainsi :
5CI = 3CD, et CI = $\frac{3}{5}$ CD = $\frac{3}{5} \times 12 = \frac{36}{5} = 7{,}2$.

c. On a alors : $\left(\frac{36}{5}\right)^2 = 36c$, soit : $c = \frac{36}{5} = 1{,}44$.

d. On construit alors C et D comme en 1°, puis le point I, puis les deux grands cercles et le cercle de rayon 1,44.



131 **1.** Les quadrilatères AGBQ et AGCP sont des parallélogrammes car leurs diagonales se coupent en leur milieu. Le quadrilatère BCPQ est un parallélogramme car il est non croisé et il a deux côtés parallèles et de même longueur.

2. G est le centre du parallélogramme BCPQ, donc G est milieu de [CQ]. Le théorème des milieux dans le triangle BCQ permet de dire que (IG) est parallèle à (BQ).

3. Puisque (IG) est parallèle à (BQ) et (BQ) parallèle à (AG), on en déduit que les droites (IG) et (AG) sont parallèles, donc les points A, I, G sont alignés.

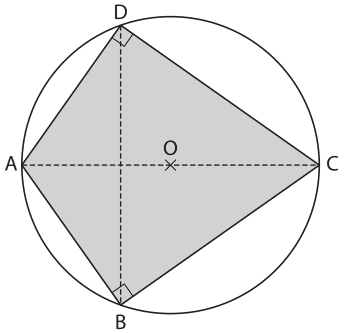
4. AG = BQ = 2IG = 2(AI – AG).
D'où : 3AG = 2AI et AG = $\frac{2}{3}$ AI.

132 **1. a. Vrai**.

b. Faux : deux angles opposés ne sont pas tous les deux droits en général.

c. Vrai : ce sont alors des carrés.

d. Faux : on peut trouver un contre-exemple en accolant deux triangles rectangles ayant une hauteur commune.



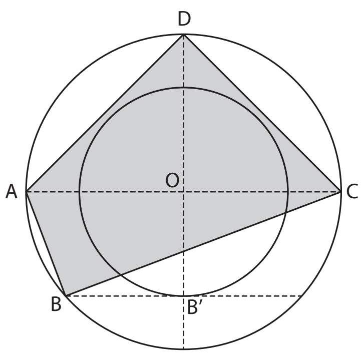
e. Vrai.

Soit ABCD un « amandin » avec les angles droits en A et en C. Alors, le triangle ABD est rectangle en A donc A, B et D sont sur le cercle de diamètre [BD]. De même, le triangle BCD est rectangle en C, donc C, B et D sont aussi sur le même cercle de diamètre [BD].

Comme A et C sont sur le cercle de diamètre [BD] et que AC = BD (par hypothèse), alors [AC] est un diamètre de ce cercle. Soit O le centre du cercle, O est donc le milieu de [AC] et de [BD]. Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu O et elles sont de même longueur, donc le quadrilatère ABCD est un rectangle.

2. a. On trace d'abord le segment [AC], puis le cercle de centre O, milieu de [AC]. La perpendiculaire (d) à [AC] en O coupe ce cercle en deux points : l'un des deux est noté D.

Pour placer B, on place le point B' sur (d) tel que OB' = 2 cm, de l'autre côté de O par rapport à D (afin que ABCD soit convexe) ; on trace ensuite la perpendiculaire à (d) passant par B' : celle-ci coupe le cercle en deux points, on note l'un d'eux B.



b. AD = $3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ cm.

c. L'aire de ABCD est, en cm^2 :

$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 15.$

133 **1.** D'après le théorème de Thalès :

$\frac{MH}{MK} = \frac{OH}{LK}$, soit $\frac{MH}{MH-3} = \frac{0{,}8}{0{,}76}$.

On en déduit : 0,76MH = 0,8MH – 2,4 d'où : MH = 60.

Ce véhicule ne respecte pas la consigne de sécurité.

2. On a : $\frac{MH}{MH-3} = \frac{0{,}8}{LK}$, soit LK × MH = 0,8 MH – 2,4 et ainsi

$$MH = \frac{2{,}4}{0{,}8 - LK}.$$

MH ⩽ 45 équivaut à 2,4 ⩽ 45 (0,8 – LK)

soit 45LK ⩽ 33,6 et LK ⩽ $\frac{33{,}6}{45}$.

$\frac{33{,}6}{45} \approx 0{,}747$, donc la plus grande longueur, arrondie au cm, qui permet de respecter la consigne de sécurité, est 0,74 m.

134 **1.** $AB'^2 = AB^2 - BB'^2 = 2\,480^2 - 520^2$.

D'où : AB' ≈ 2424,87 m.

On en déduit la pente du câble : $\frac{520}{AB'} \approx 21{,}4$ %.

2. a. Le théorème de Thalès dans le triangle ABB' donne :

$$\frac{CC'}{520} = \frac{2\,000}{2\,480}$$

d'où : CC' ≈ 419 m.

b. L'altitude au point C est, au mètre près : 2 899 m.

3. a. AC = 2 000 m, donc EC = 1 000 m.

b. Soit t le temps de parcours, en secondes :

$$\frac{1000}{t} = 5, \text{ donc } t = 200 \text{ s} = 3 \text{ min } 20 \text{ s}.$$

135 **1.** AB = 2 sin 30° = 1.

$AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$\frac{CD}{AC} = \cos 30°$, d'où :

$CD = \sqrt{3}$ et $BD = BC - CD = 2 - \sqrt{3}$.

2. $\widehat{COE} = 60°$, donc $\widehat{CAE} = 30°$, d'après le théorème de l'angle inscrit.

Puisque $\widehat{CAD} = 60°$, on en déduit que la droite (AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$.

3. D'après le théorème de l'angle inscrit :

$\widehat{CAF} = \frac{1}{2}\widehat{COF} = 45°$. Ainsi, la droite (AF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$.

4. a. $\widehat{EAF} = 45° - 30° = 15°$.

Avec le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{EAF} = \frac{1}{2}\widehat{AOF} = 45°$.

On en déduit : $\widehat{AFE} = 120°$.

b. $AF = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$.

Soit E' le point d'intersection de (OF) et (BC). Dans le triangle rectangle OAE', on a :

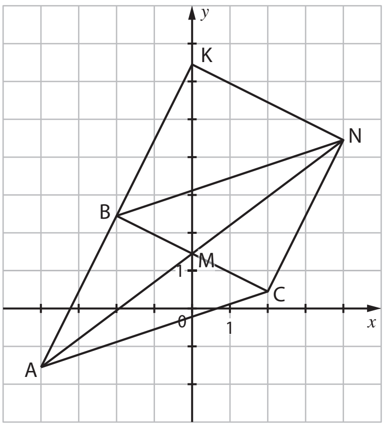
$\cos 30° = \frac{1}{AE'}$ soit $AE' = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Puis : EE' = OE', car le triangle OEE' est isocèle (deux angles de 30°), et :

$EE' = AE' \times \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d'où : $AE = AE' + EE' = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

136 **1.**



2. $AB^2 = 20$; $BM^2 = a^2 - 5a + \frac{41}{4}$; $AM^2 = a^2 + 3a + \frac{73}{4}$.

Avec le théorème de Pythagore dans ABM :

$a^2 + 3a + \frac{73}{4} = a^2 - 5a + \frac{41}{4} + 20$

soit $a = \frac{3}{2}$

3. Les points B, M et C sont alignés, car M est le milieu de [BC] : on le justifie en calculant les coordonnées du milieu de [BC] $\left(0 \,;\, \frac{3}{2}\right)$.

4. On cherche $N(x\,;y)$ tel que [AN] et [BC] aient même milieu M.

On obtient : $\frac{x-4}{2} = 0$ et $\frac{y - \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}$.

d'où $x = 4$ et $y = \frac{9}{2}$. N a pour coordonnées $\left(4 \,;\, \frac{9}{2}\right)$.

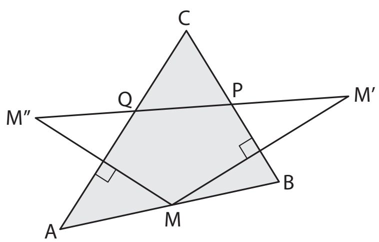
5. K a pour coordonnées $\left(0 \,;\, \frac{13}{2}\right)$.

6. $BK^2 = 20$; $KN^2 = 20$; $BN^2 = 40$.

Puisque $BN^2 = BK^2 + KN^2$, le triangle BKN est rectangle en K. Il est aussi isocèle car $BK = KN = \sqrt{20}$.

7. (AB) est parallèle à (CN), donc (BK) et (CN) aussi. (KN) est parallèle à (BC), car ces deux droites sont perpendiculaires à (BK). Donc, BCNK est un parallélogramme ; comme il a deux côtés consécutifs de même longueur et un angle droit, c'est un carré.

137 Soit M le point de départ de Boris sur [AB], M′ le symétrique de M par rapport à (BC) et M″ le symétrique de M par rapport à (AC). Soit P et Q des points respectivement sur (BC) et (AC).



On a : MP + PQ + QM = M′P + PQ + QM″ et ce trajet est minimal lorsque M′, P, Q et M″ sont alignés.

Le triangle CM′M″ est isocèle, car CM′ = CM = CM″. Donc, l'angle $\widehat{M'CM''}$ est constant, égal à $2\widehat{ACB}$.

Ainsi, M′M″ est minimal si et seulement si CM′ est minimal, ce qui équivaut à CM minimal, c'est-à-dire M pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

On démontre de même que P et Q sont les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement.

Conclusion : Boris doit partir du pied de la hauteur sur le premier côté, se rendre au pied de la hauteur sur le second côté, et se rendre ensuite au pied de la hauteur sur le 3e côté.

138 On s'intéresse aux points de l'axe des abscisses. Le point de coordonnées (1 ; 0) est atteint après une minute, celui de coordonnées (2 ; 0) au bout de 1 + 2 + 1 + 4, soit 8 minutes, celui de coordonnées (3 ; 0) au bout de 9 minutes, celui de coordonnées (4 ; 0) au bout de 9 + 6 + 1 + 8, soit 24 minutes, et donc celui de coordonnées (5 ; 0) au bout de 25 minutes.

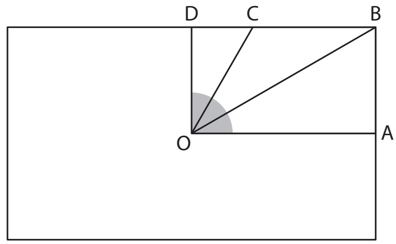
On atteindra ainsi (6 ; 0) après 48 minutes,

(7 ; 0) après 49 minutes, (8 ; 0) après 80 minutes, (9 ; 0) après 81 minutes et (10 ; 0) après 120 minutes.

L'escargot sera au point de coordonnées (10 ; 0) après 2 heures de déplacement.

139 Les trois angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$ sont égaux car l'aiguille avance à vitesse constante.

Ils sont donc égaux à 30°.



AB = 6 cm d'après l'énoncé.

Dans le triangle OAB : $\tan 30° = \frac{AB}{OA}$, d'où $OA = \frac{6}{\tan 30°} = 6\sqrt{3}$.

Dans le triangle OCD : $\tan 30° = \frac{CD}{OD}$, d'où $CD = 6 \tan 30° = 2\sqrt{3}$.

On en déduit : $BC = BD - CD = 4\sqrt{3}$.

La distance entre ces points est $4\sqrt{3}$ cm.