CHAPITRE 6

Trigonométrie

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	– On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible.

B Notre point de vue

Nous avons choisi de présenter dans un premier temps l'enroulement de la droite numérique au travers de **l'activité 1** : « Un super entraînement ». Cette activité permet de bien ancrer cette transformation « un peu spéciale » dans les savoirs des élèves. Grâce à l'animation de **l'activité 2**, les élèves commencent à « voir » l'association entre un point de la droite numérique, un nombre réel donc, et un point sur le cercle trigonométrique. L'**activité 3**, plus classique, utilise la proportionnalité entre radians et degrés. Enfin, **l'activité 4** permet d'appréhender les calculs de cosinus et sinus d'angles remarquables.

Les notions abordées dans le chapitre 6

- Cercle trigonométrique
- Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique
- Cosinus et sinus d'un nombre réel

C Réactiver les savoirs

Voir manuel page 331 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

Activité 1 Un super entraînement

L'objectif de cette activité est d'associer à des distances parcourues sur une droite des distances parcourues sur un cercle.

1. $2\pi R = 14\pi \approx 44$ mètres au décimètre près.

2. Juste après le point K ($25 > 22$).

3. $\frac{400}{14\pi} \approx 9{,}1$, soit 9 tours complets.

4. $\frac{1000}{14\pi} \approx 22{,}7$, soit 22 tours complets et 0,7 tour.

Le point K correspond à un demi-tour, le point N à trois quarts de tours : Il va donc s'arrêter entre M et N.

5. $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ mètres ; mais aussi $\frac{7\pi}{6} + 2\pi$, $\frac{7\pi}{6} + 4\pi$ …

Activité 2 Animation d'un enroulement

Cette activité à laquelle est associée une animation doit permettre de visualiser l'enroulement de la droite numérique sur le cercle.

Fichier associé sur le manuel numérique Premium :

06_seconde_activite2.swf

1. Le point N se placera sur J car la longueur du quart de cercle de rayon 1 est $\frac{\pi}{2}$.

2. a. N se placera par symétrie sur J'.

b. Ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe (II').

3. Oui : $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$,… mais aussi $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$ …

Ils diffèrent tous d'un multiple de 2π.

4. Le point à mi-chemin entre J et I' sur le quart supérieur gauche. $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Activité 3 La Fête du chocolat

Cette activité permet d'associer des angles et des arcs de cercle.

1. 2π mètres.

2. a. π mètres. $\widehat{IOM} = 180°$.

b. $\frac{\pi}{2}$ mètres. $\widehat{IOM} = 90°$.

3. On multiplie la mesure de l'angle par $\frac{\pi}{180}$ pour obtenir la longueur d'arc.

4.

Mesure	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Longueur	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

5. $\frac{7\pi}{10} \times \frac{180}{\pi} = 126°$, or $120 < 126 < 150$ et chaque secteur faisant 30°, la flèche sera dans le secteur orangé foncé.

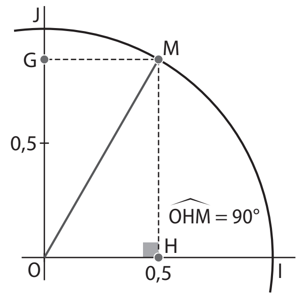
6. Entre les secteurs violet et fuchsia.

Activité 4 Calcul de cosinus et sinus d'angles remarquables

L'élève va ici découvrir les notions de cosinus et sinus d'un réel et retrouver les valeurs des cosinus et sinus de 60°.

***Fichier associé sur le site* www.bordas-indice.fr :**
06_seconde_activite4.url (GeoGebraTube)
Fichier associé sur le manuel numérique Premium :
06_seconde_activite4.ggb (GeoGebra)

1. a.



b. $\widehat{IOM} = 60°$ car le triangle IOM est équilatéral.

c. $OH = \frac{1}{2}$ car H est le milieu de [OI].

d. $MH^2 = OM^2 - OH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

e. $OH = \cos(60°)$ et $MH = \sin(60°)$.

2. a. $\widehat{IOM} = 45°$ car le triangle HOM est isocèle rectangle.

b. $MH^2 + OH^2 = OM^2$, soit $2MH^2 = 1$, soit :

$$MH^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2} = OH.$$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

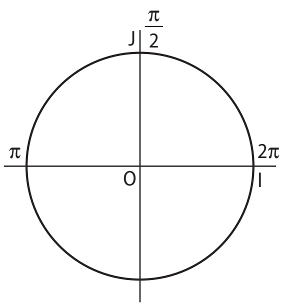
3. a. b. Les points images de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ par enroulement de la droite numérique sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$; l'abscisse d'un de ces points est l'ordonnée de l'autre et vice versa. Ainsi :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

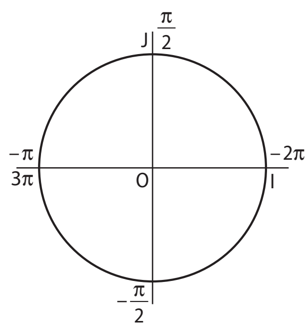
E Exercices

Pour démarrer

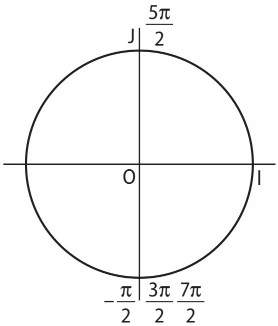
1



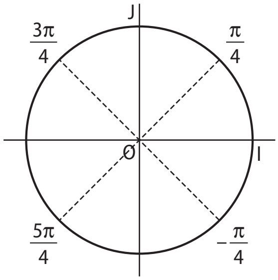
2



3



4



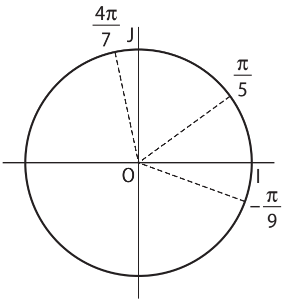
5 **Exercice corrigé p. 331 du manuel.**

6 **1.** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

2. $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, soit $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7 $\cos^2(0{,}3) + \sin^2(0{,}3) = 1$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout nombre réel x.

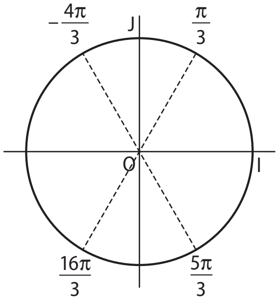
8 **1.**



2. $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$; $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$; $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) < 0$; $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$; $\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) > 0$; $\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) < 0$.

9 **Exercice corrigé p. 331 du manuel.**

10



a. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

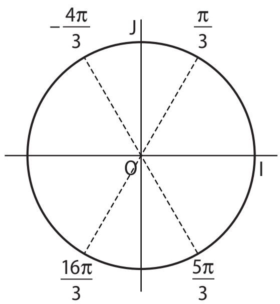
b. $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

c. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

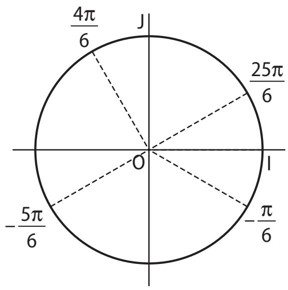
11 **a.** $x \approx 1{,}369$. **b.** $x \approx 0{,}644$. **c.** $x \approx 1{,}772$.
d. $x \approx 0{,}443$. **e.** $x \approx 1{,}571$. **f.** $x \approx -0{,}1$.

Pour s'entraîner

12



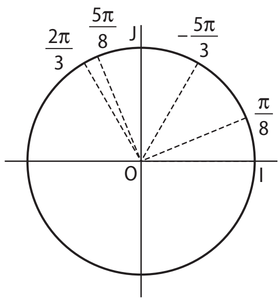
13



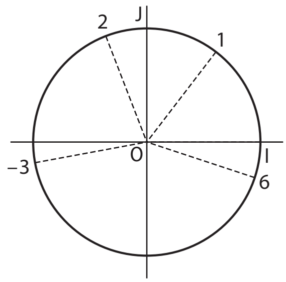
14 **Exercice corrigé p. 332 du manuel.**

15 **Exercice résolu p. 139 du manuel.**

16



17



18 **1.** $\frac{15\pi}{2} = 3 \times 2\pi + \frac{3\pi}{2}$.

2. Aux trois quarts de la circonférence du yoyo.

19 **1.** B et C. **2.** $-\frac{11\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

3. Une infinité.

20 **a.** 3. **b.** 1. **c.** 2.

21 **a.** 1. **b.** 2. **c.** 4.

22 **1.** Oui. **2.** Non.

23 **a.** Il n'y en a pas d'autre. **b.** $-\frac{3\pi}{5}$. **c.** $-\frac{3\pi}{5}$.

24 **a.** $-\frac{6\pi}{7}$. **b.** $-\frac{7\pi}{8}$. **c.** $\frac{\pi}{3}$.

25 $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$.

26 **1.** π ; $\frac{\pi}{2}$. **2.** 0.

27 **Faux :** ils sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique.

28 **Faux :** $6{,}28 \neq 2\pi$.

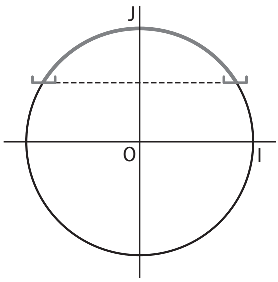
29 **1.** Non. **2.** Oui.

30 **1.** $3\pi < 10 < 3\pi + \frac{\pi}{2}$.

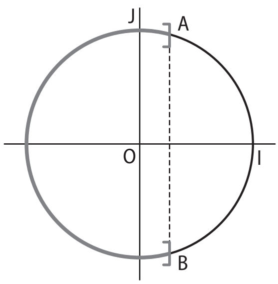
2. Le quart inférieur gauche.

3. $\cos(10) < 0$ et $\sin(10) < 0$.

31



32 **1. 2.**



3. Il s'agit du point A.

33 **1. Vrai :** tout point image d'un nombre réel $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ a une ordonnée strictement positive.

2. Faux : ce sont les points images des réels de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

34 **Faux :** contre-exemple, $-\frac{3\pi}{2}$.

35 **Vrai :** tout point du cadran supérieur droit a une abscisse positive.

36 **1.** Le point A' est le symétrique du point A par rapport à l'axe (Ox), B' celui de B par rapport à l'axe (Oy) et C' est le symétrique de C par rapport à la symétrie centrale de centre O.

2. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$;

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

37 **a.** $\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

38 **a.** 0. **b.** 0.

39 **Exercice corrigé p. 332 du manuel.**

40 **a.** 0. **b.** –1. **c.** 0.

41 **1. Vrai :** $\cos(0) = 1$ et $1 < 2$.

2. Pour tout x, $\cos(x) \geqslant 2$, proposition fausse.

42 **1.** et **2.** $A = B = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$ grâce à la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

43 **2.** $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

44 **2.** $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

45 **2.** $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

46 **2.** $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

47 **Faux :** $\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

48 **Faux :** $\cos(a + 2\pi) = \cos(a) = 0{,}7$.

49 **1. a.** $x \simeq 0{,}644$. **1. b.** $\sin(x) \approx 0{,}6$.

2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

50 **Exercice résolu p. 141 du manuel.**

51 $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$; $x \approx 0{,}927$.

52 **Exercice corrigé p. 331 du manuel.**

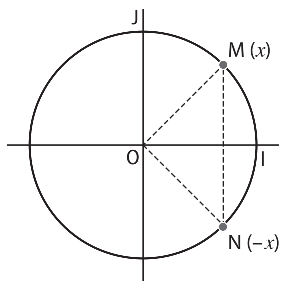
53 **1. Faux :** pour $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, par exemple.

2. Il existe un nombre réel x tel que $\sin(x^2) + \cos(x^2) \neq 1$, qui est vraie avec l'exemple précédent.

54 **1.** f est une fonction constante.

2. En développant, on trouve que $f(x) = 2$ pour tout nombre réel x.

55 **1.** et **2.**



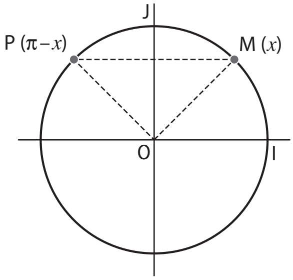
N est l'image de $(-x)$.

3. Les abscisses de M et N sont identiques.

4. Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$.

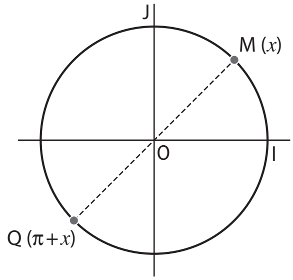
5. Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$ car les ordonnées des points M et N sont opposées.

56 **1.** et **2.**



3. Les abscisses de M et P sont opposées.
4. Pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
5. Pour tout réel x, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ car les ordonnées des points M et P sont identiques.

57 **1.** et **2.**



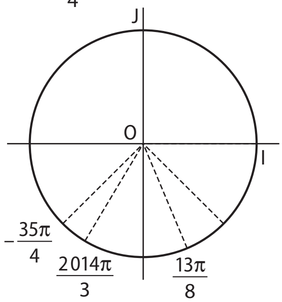
3. Q est le symétrique de M par rapport à la symétrie centrale de centre O.
4. Les coordonnées des points M et Q sont opposées.
5. Pour tout réel x, $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.
6. Pour tout réel x, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

58 **a.** $-2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2$. **b.** $-2 \leqslant \sin(x) + \cos(x) \leqslant 2$.
c. $-3 \leqslant \sin(x) - 2\cos(x) \leqslant 3$.

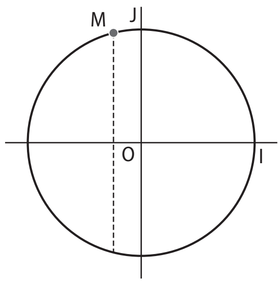
59 **Vrai :** les réels x et $x + 2\pi$ ont le même point image par enroulement.

60 **Faux :** pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, par exemple.

61



62 **1.**



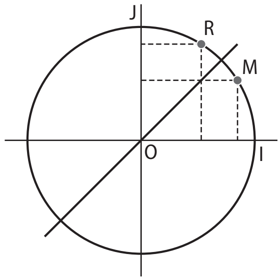
2. $\sin(x) > 0$.
3. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$, soit $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

63 **1.** L'algorithme affiche OUI.
2. *C* correspond au nombre de tours de cercle trigonométrique séparant les points images des réels *A* et *B* lors de l'enroulement autour de la droite numérique.
3. Il détermine si deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ou non.

64 **1.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

2. $\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = -\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$; $\sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = -\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

65 **1. 2. 3.**



Le cercle est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4. $a + b = \dfrac{\pi}{2}$ par symétrie.
5. $\cos(b) = \sin(a)$ et $\sin(b) = \cos(a)$.
6. Pour tout réel x, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

66 **1.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{1 - \dfrac{8 + 2\sqrt{12}}{16}}$.

$$= \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

2. $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

67 **1.** $\widehat{\text{IOM}} = 2\widehat{\text{IKM}}$.
2. $\text{KM}^2 = \text{KH}^2 + \text{HM}^2 = (1 + \cos(x))^2 + \sin^2 x$.
3. On développe le résultat obtenu en **2**.
4. $\cos(\widehat{\text{HKM}}) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\text{KH}}{\text{KM}} = \dfrac{1+\cos(x)}{\text{KM}}$, soit :

$\text{KM}^2 = \dfrac{(1+\cos(x))^2}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ et

$\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{(1+\cos(x))^2}{\text{KM}^2} = \dfrac{(1+\cos(x))^2}{2(1+\cos(x))} = \dfrac{1+\cos(x)}{2}$.

5. En posant $x = \dfrac{\pi}{4}$:

$\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$,

d'où $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, d'où $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

68 Le point image de 0.

69 On peut dire que $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ pour que l'équation soit bien définie : il faut avoir $\cos(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$.
En observant la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)}$,
on trouve seulement deux solutions : 0 et $\frac{\pi}{2}$.

70 Pas de solution.

71 Cette somme vaut –1.

72 ***Fichier associé sur le site*** **www.bordas-indice.fr** ***et sur le manuel numérique Premium*** **:**
06_seconde_ex72.alg (AlgoBox)

ALGORITHME

Entrée	Saisir X
Traitement et sortie	**Si** $(\cos X)(\sin X) > 0$
	Alors Si $\cos X > 0$
	Alors Afficher « 1 »
	Sinon Afficher « 3 »
	Sinon Si $\cos X > 0$
	Alors Afficher « 4 »
	Sinon Afficher « 2 »