CHAPITRE 4

Problèmes du second degré

A Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	– Mettre un problème en équation. – Résoudre une équation se ramenant au premier degré. – Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	– Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	– Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. – Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	

B Notre point de vue

Les notions abordées dans ce chapitre sont essentiellement la fonction carré et les fonctions polynômes du second degré, les équations et inéquations du second degré et l'algorithme de dichotomie.
Nous avons choisi de présenter la fonction carré à l'aide d'une activité sur calculatrice, grâce à laquelle on peut observer la symétrie de la parabole via le tableau de valeurs de la fonction carré.
Les fonctions polynômes du second degré sont introduites avec un problème d'optimisation puis largement étudiées. Ces dernières permettent une ouverture sur les inéquations produit de deux termes polynomiaux de degré 1 et sont aussi l'occasion de découvrir l'algorithme de dichotomie, car les racines de certains polynômes de degré 2 très simples (x^2-2 par exemple) ne peuvent être qu'approchées par des méthodes numériques.

Les notions abordées dans le chapitre 4

- La fonction carré
- Les fonctions polynômes du second degré
- Équations et inéquations
- Algorithme de dichotomie

C Réactiver les savoirs

Voir manuel page 329 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

Activité 1 Une nouvelle fonction

1.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$	25	16	9	4	1	0

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	4	9	16	25

2. On observe une symétrie.
3. La courbe semble posséder une symétrie d'axe l'axe des abscisses.
4. La courbe passe par l'origine.
5. Ymin = 0, Ymax = 25.
6. La fonction semble être décroissante sur]– ∞ ; 0], puis croissante sur [0 ; + ∞ [. Elle admet un minimum en O qui vaut 0.
7. a. Deux points d'intersection.
b. Deux solutions.

Activité 2 Les pendentifs en fil d'argent

***Fichier associé sur le site* www.bordas-indice.fr :**
04_seconde_activite2.url (GeoGebraTube)
Fichier associé sur le manuel numérique Premium :
04_seconde_activite2.ggb (GeoGebra)
1. a. $\mathcal{A}(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.
b. On conjecture que l'aire est maximale pour $x = 10$.
2. a. $\mathcal{A}(x) - 100 = -x^2 + 20x - 100$
$= -(x^2 - 20x + 100) = -(x - 10)^2$
b. $\mathcal{A}(x) - 100 \leqslant 0$ donc $\mathcal{A}(x) \leqslant 100$ et lorsque $x = 10$, $\mathcal{A}(x) = 100$. Eve va donc faire des pendentifs carrés !
3. a. Le point I a une abscisse constante.
b. La courbe possède un axe de symétrie.
4. a. $-\dfrac{b}{2a}$ donne l'abscisse de l'axe de symétrie.
b. $ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0$
$\Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ ou $x = 0$.

On calcule $x_I = \dfrac{0 + \left(-\dfrac{b}{a}\right)}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.

$-\dfrac{b}{2a}$ est l'abscisse du sommet de la parabole.

Activité 3 Le jeu du nombre mystère

1. 50 est à « mi-chemin » entre 0 et 100.
2. 25 et 75.
3. Le nombre mystère est entre 25 et 50.
4. a. Oui. **b.** Non.

Activité 4 À la recherche des signes

1. a. $f(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 3 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} > x$.

Et $0 > f(x) \Leftrightarrow 0 > -2x + 3 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

b.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	

2.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
$g(x)$		–	0	+	

3. a. négatif ; positif. **b.** négatif.
c. Pour $x < -0{,}5$: positif, négatif. Le produit est négatif.
Pour $-0{,}5 < x < 1{,}5$: positif, positif. Le produit est positif.

d.

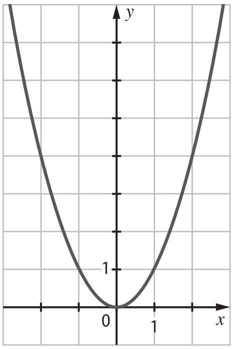
x	$-\infty$		$-0{,}5$		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		+	|	+	0	–	
$g(x)$		–	0	+	|	+	
$f(x) \times g(x)$		–	0	+	0	–	

e. La solution est]– ∞ ; –0,5[∪] 1,5 ; + ∞ [.
4. b. La solution semble être]– ∞ ; –0,5[∪] 1,5 ; + ∞ [.
c. On retrouve les résultats du **3. e.**

E Exercices

Pour démarrer

1 **1.** 1 ; 9 ; 1 ; 0 ; 4.



2 $f(a) = 4\,;\, f(b) = 9\,;\, f(c) = \dfrac{4}{9}\,;\, f(d) = \dfrac{9}{16}$.

3 $f(a) = 1{,}21;\ f(b) = 0{,}64\ ;\ f(c) = 10^4\ ;\ f(d) = 10^6$.

4 $f(a) = 3\,;\, f(b) = 4\,;\, f(c) = 3 + 2\sqrt{2}\ ;\ f(d) = 4 - 2\sqrt{3}$.

5 Les points appartenant à la représentation graphique de la fonction carré sont : B, C, D et F.

6 Croissante. Décroissante.

7

x	-2		0		3
x^2	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	9

8 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**

9

x	-3	-2	-1	0	$\sqrt{2}$	2
x^2	9	4	1	0	2	4

10 **1.** Xmin=–50 et Xmax=50.
2. Ymin=0 et Ymax=2500.

11 **1.** Xmin=-0,2 et Xmax=0,2.
2. Ymin=0 et Ymax=0,04.

12 **1.** Croissante.
2. a. $2^2 < 3^2$ **b.** $1{,}5^2 > 0{,}5^2$
c. $2{,}51^2 < 2{,}59^2$ **d.** $\pi^2 < 4^2$

13 **a.** $1^2 < 1{,}1^2 < 2{,}3^2 < 3^2$.
b. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 < 0{,}3^2 < \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$
c. $(-2)^2 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 < 3^2$.

14 **1.** Si $x > 2$, alors $x^2 > 4$ car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. Si $x < -1$, alors $x^2 > 1$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

15 **1.** 25 ; **2.** 1.

16 **1.**16 ; **2.**1.

17 Le graphique **3** n'est pas celui d'une fonction. Tous les autres sont tout ou partie en-dessous de l'axe des abscisses, or aucun nombre n'a une image négative par la fonction carré !

18 Les solutions sont –2 et 2.

19

Polynôme	a	b	c	Variations
1	2	3	1	Croissante puis décroissante
2	3	–1	5	Croissante puis décroissante
3	–1	–1	1	Décroissante puis croissante
4	2	0	–1	Croissante puis décroissante

20 **1.** $f(1) = -1\ ;\ f(-1) = -1\ ;\ f(-2) = 2\ ;\ f\left(\sqrt{2}\right) = 0$.
2. Le seul réel qui convienne est 0.

21 $f(x_0) = -1\ ;\ g(x_0) = 2\ ;\ h(x_0) = 26\ ;\ i(x_0) = 9$.

22 –1 et 1 ; –2 et 2 ; pas d'antécédent.

23

Courbe	C	D	E	F	G
Fonction	f_2	f_1	f_3	f_5	f_4

24 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**

25 Seules g et h sont des fonctions polynômes du second degré.

26 Seules h et k sont des fonctions polynômes du second degré.

27 **1.** $a < 0$. **2.** $a > 0$. **3.** $a > 0$. **4.** $a < 0$.

28 Seules **2** et **4** peuvent être des fonctions polynômes du second degré.

29 f et h sont décroissantes puis croissantes, tandis que g et k sont croissantes puis décroissantes.

30 **a.** $\dfrac{3}{4}$ **b.** 1 **c.** 4 **d.** 0

31

Fonction	$-\dfrac{b}{2a}$	Image de $-\dfrac{b}{2a}$
f	1	–2
g	2	7
h	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{4}$
k	0	0

32 –2 est solution des inéquations **2** et **3**.

33 **a.** $1 < x_0 < 2$. **b.** $2 < x_0 < 3$.
c. $3 < x_0 < 4$. **d.** Il n'y pas de solution positive.

34 **1.** $f(1) = -1,\ f(1{,}5) = -0{,}25$ et $f(2) = 1$.
2. 1,5 et 2.

35 **1.**

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

36 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**

37

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

38

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

39

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$-x+3$		+	|	+	0	−	
$2x-1$		−	0	+	|	+	
$(-x+3)(2x-1)$		−	0	+	0	−	

40

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		−	0	+	|	+	
$4-x$		+	|	+	0	−	
$(x+1)(4-x)$		−	0	+	0	−	

Pour s'entraîner

41 **1.** La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$, et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

2. a. $4 < x^2 < 9$. **2. b.** $4 < x^2 < 9$. **2. c.** $0 \leqslant x^2 < 9$.

42 **1.** La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$, et croissante sur $[0;+\infty[$.

2. $\sqrt{3}-3 \simeq -1{,}3$ donc $\sqrt{3}-3 < -1$ et $(\sqrt{3}-3)^2 > (-1)^2$.

3. $10^{-6} < x^2 < 10^{-4}$.

43 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**

44 **1.**

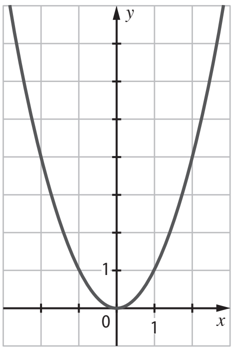
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$
$f(x)$	4	2,25	1	0,25	0	0,25

x	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$	1	2,25	4	6,25	9

2. $-0{,}5$ et $0{,}5$.

3. Un antécédent dans l'intervalle $[-2\ ;3]$: 2,5.

45 **1.**



2. Les solutions sont -1 et 1.

3. $]-\infty\ ;-1[\cup]1\ ;+\infty[$.

46 **1. Voir question 1. de l'exercice 45 ci-dessus.**

2. Les solutions sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

3. $\left]-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\right[$.

47 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**

48 **Exercice résolu, p. 98 du manuel.**

49 **1.** 9. **2.** 0.

50 **1.** Oui : $a < b$. **2.** Oui : $a > b$. **3.** Non.

51 Xmin = −3 ; Xmax = 7 ; Ymin = 0 ; Ymax = 49.

52 Xmin = −5 ; Xmax = 0,1 ; Ymin = 0 ; Ymax = 25.

53 **1.** Faux : x peut être égal à −2. **2.** Oui.

54 Soit x la longueur du côté du carré.

1. 1,35 dm $< x <$ 1,36 dm, donc $1{,}35^2 < x^2 < 1{,}36^2$.

2. $3{,}645 < 2x^2 < 3{,}6992$, donc $3{,}6 < 2x^2 < 3{,}7$.

3. Si les longueurs sont multipliées par 10, les surfaces sont multipliées par 100 et la surface à couvrir en jaune sera comprise entre 3,6 et 3,7m² : il faudra deux bombes jaunes à Ben.

4. $2{,}8 < D < 2{,}84$, soit $1{,}4 < R < 1{,}42$, soit :
$\pi \times 1{,}4^2 < R < \pi \times 1{,}42^2$. En prenant des valeurs approchées, on trouve que la surface à peindre en rouge est comprise entre 6 et 8 m² : il faudra entre trois et quatre bombes de peinture rouge.

55 **1.**

x	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20
x^2	0	6,25	25	56,25	100	156,25	225	306,25	400

2. Le meilleur choix serait de composer un pack de deux tangrams de côté 10 et 20 cm.

56 **1.** $f(1) \neq 1$. **2.** $f(0{,}5) > 0{,}25$. **3.** $f(0{,}5) > 0{,}25$.

4. $f(0{,}5) < 0{,}25$.

57 **Vrai.**

58 **Faux**, si $x = 0$ alors $x^2 = 0$.

59 $f(x) = (x^2+1)^2 - (x^2-1)^2 = 4x^2$, donc f est bien une fonction polynôme du second degré.

60 **1.** $a = -3$, $a < 0$ d'où :

x		$\frac{1}{6}$	
$f(x)$	↗	$\frac{25}{12}$	↘

2. $a = 5$, $a > 0$ d'où :

x		$\frac{7}{10}$	
$g(x)$	↘	$-\frac{49}{20}$	↗

61 **1.** $(1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$ $a = 1$, $a > 0$ d'où :

x		1	
$f(x)$	↘	0	↗

2. $a = -1$, $a < 0$ d'où :

x		0	
$g(x)$	↗	4	↘

62 **1.** f_1 n'est pas une fonction croissante puis décroissante.

2. $a = -3$, $a < 0$ et $f_2(2) = 3$ donc cette fonction peut correspondre.

3. Cette fonction ne peut correspondre car $f_3(2) = -3$.

63 **1.** Xmin = −10 ; Xmax = 10 ; Ymin = 42 ; Ymax = 142.

2. Xmin = −150 ; Xmax = 50 ; Ymin = −2 500 ; Ymax = 5 000.

64 **1.** Xmin = −10 ; Xmax = 10 ; Ymin = −105 ; Ymax = 0.

2. Xmin = −350 ; Xmax = 1 050 ; Ymin = −1 250 ; Ymax = 4 000.

65 **1.**

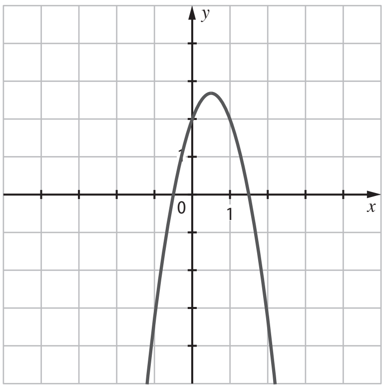
x		-1	
$f(x)$	↘	-4	↗

2. C'est la droite verticale d'équation $x = 1$.

3.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	5	0	−3	−4	−3	0	5

66 **1.** $a = \frac{1}{2}$, $a > 0$ donc f est d'abord décroissante puis croissante : elle admet un minimum.
2. $f(0) = f(-6) = \frac{7}{2}$, donc $\frac{0+(-6)}{2} = -3$ est l'abscisse du sommet de la parabole.
67 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**
68 **1.** $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.
2. $f(1-h) = f(1+h) = 1 + h^2 + 2h - 2 - 2h + \frac{1}{2} = h^2 - \frac{1}{2}$.
3. Les points d'abscisses $1 - h$ et $1 + h$ sont symétriques l'un de l'autre : la droite verticale d'équation $x = 1$ est axe de symétrie.
69 Il suffit de prendre la moyenne des abscisses de deux points de même ordonnée de la parabole, par exemple les intersections de la parabole avec l'axe des abscisses : $\frac{-5+1}{2} = -2$ est l'abscisse du sommet de la parabole.
70 **Exercice résolu, p. 100 du manuel.**
71 **1.** (0,5 ; 2,75).
2. $a = -5$, $a < 0$ donc f est croissante puis croissante.
3.



72

Courbe	$\mathscr{C}_1$	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{C}_3$
Fonction	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

73

Exemple	a	b
Sommet	(3 ; –8)	$\left(-\frac{5}{2} ; -12{,}5\right)$
Axe de symétrie	$x = 3$	$x = -\frac{5}{2}$

74

Exemple	a	b
Sommet	$\left(\frac{5}{2} ; \frac{41}{4}\right)$	(1 ; 1)
Axe de symétrie	$x = \frac{5}{2}$	$x = 1$

75 **1.** $y = -2x + 2$.
2. $A_{OPMQ} = xy = x(-2x+2) = -2x^2 + 2x$.
3. L'abscisse du sommet de la parabole est $-\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$.
La position du point M telle que l'aire soit maximale est celle pour laquelle M a les coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$.
76 **2.** et **3.** (**4** est un maximum).
77 ***Fichiers associés sur le site* www.bordas-indice.fr *et le manuel numérique Premium* :**
04_seconde_ex77.alg (AlgoBox)
04_seconde_ex77.xws (XCas)
1. L'abscisse du sommet de la parabole représentant la fonction f.
2. L'ordonnée du sommet.
3. Voir fichiers logiciels.
78 **1. Faux :** $-2(x-1)^2 = -2x^2 + 4x - 2$.
2. Vrai : $-2x^2 + 4x - 2 = 2x^2 - 4x - 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 0$.
79 **1.** $f(0) = 0$ et $f(3) = 0$.
2. Oui, par exemple $g(x) = -x^2 + 3x$.
80 **1.** On conjecture que les points d'intersection sont (2 ; 4) et (–3 ; –11).
2. $f(x) - g(x) = 3x^2 + 3x - 18 = 3(x^2 + x - 6)$
$= 3(x-2)(x+3)$.
3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -3$.
81 **Vrai :** même si l'on ne voit pas la courbe en entier, cette représentation graphique est une parabole.
82 **Faux :** le maximum est –1, atteint en $x = 2$.
83 **Vrai**.
84 **Faux :** les axes de symétrie des parabole ont une équation du type x = constante, ici $x = 2$.
85 **Vrai :** le maximum est –1.
86 *Il se peut que dans le manuel soit indiqué par erreur dans l'énoncé x^3 au lieu de $-x^3$ (il manque le signe – devant x^3).*
1. Calculatrice.
2. $f(1) = 5$, $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, donc $\alpha \in [1 ; 2]$.
L'amplitude est 1.
3. $f(1{,}5) = -1{,}875 < 0$, donc $\alpha \in [1 ; 1{,}5]$.
87 *Il se peut que dans le manuel soit indiqué par erreur l'intervalle [0 ; 1] au lieu de [1 ; 2].*
1. $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, donc $\alpha \in [1 ; 2]$.
2. Il faut trois étapes.
3. $\alpha \in [1{,}25 ; 1{,}375]$.
88 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**
89 **1.** Les solutions sont $\frac{3}{2}$ et 5.
2.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$2x-3$		–	0	+		+	
$-x+5$		+		+	0	–	
$(2x-3)(-x+5)$		–	0	+	0	–	

3. La solution est $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right] \cup [5 ; +\infty[$.
90 **1.** Les solutions sont -1 et 3.
2.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		–	0	+		+	
$x-3$		–		–	0	+	
$(x+1)(x-3)$		+	0	–	0	+	

3. La solution est $[-1 ; 3]$.
4. $f(x) = (x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$.
5. La portion de parabole sous l'axe des abscisses se situe entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$.
91 **Exercice corrigé, p. 330 du manuel.**
92 **1.**

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2(x-3)$		–	0	–	0	+	

2.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$(x^2+1)(4-x)$		$+$	0	$-$	

93 **1.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-3(1-x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x^2(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

94 **1.**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x(-x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

95 **1.**

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$-3x^2+5x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

96 **1.** $]-\infty ; 2]\cup[4 ; +\infty[$. **2.** $\left[-\frac{1}{2} ; 5\right]$.

97 **1.** $]3 ; 7[$. **2.** $\left[-\frac{3}{2} ; 1\right]$.

98 **1.** $\left[-\frac{1}{3} ; 0\right]\cup\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ **2.** $]-1 ; 0[\cup]0 ; 3[$.

99 **Exercice résolu, p. 103 du manuel.**

100 **1.** $x(x^2-2) < 0$.
La solution est $\left[-\infty ; -\sqrt{2}\right[\cup\left]0 ; \sqrt{2}\right[$.

2. $(x+2)(5x+2) < 0$; la solution est $\left]-2;-\frac{2}{5}\right[$.

101 **1.** $(x-2)(x+4) < 0$; la solution est $]-4;2[$.

2. $x(3x+2) < 0$; la solution est $\left]0;\frac{2}{3}\right[$.

102 **1. Faux :** -3 est un contre-exemple.

2. Vrai : la fonction carré étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$.

103 **Faux :** en partant de $[0 ; 4]$, en trois étapes, on trouve l'intervalle $[3 ; 3,5]$.

104 **Vrai :** $f(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow 0,5(x+1)(x-4) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \leqslant 0$.

105 **1.** $f(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 4 = 4x^2 - 12x + 5$

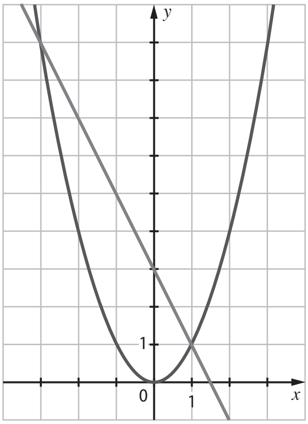
2.

x		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	↘	-4	↗

3. $f(x) = (2x-5)(2x-1)$.

La solution est $\left]\frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right[$.

106 **1.**



2. $]-\infty ; -3]\cup[1 ; +\infty[$.

3. $f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 3$; $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$.

4. $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \geqslant 0$.

107 **1.**

x		2	
$f(x)$	↘	-3	↗

2. Calculatrice.

3. $[0,2 ;0,3]$.

108 **1.** $(x+1)(-2x-3)$.

2. $(x+1)(-2x-3) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x+3) \geqslant 0$.

3. La solution est $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right]\cup\left[-1 ; +\infty\right[$.

Faire le point

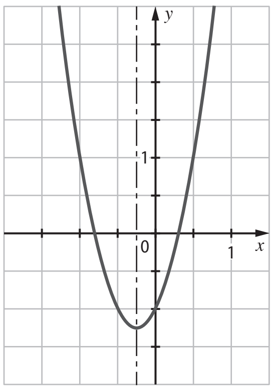
Voir livre page 329. Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr

Revoir des points essentiels

109 **1.**

x		$-\frac{1}{4}$	
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

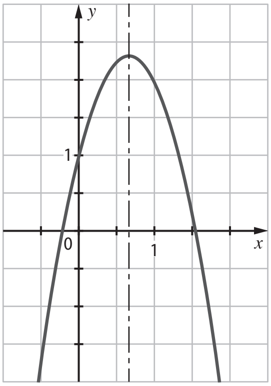
2.



110 **1.**

x		$\frac{2}{3}$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$

2.



111

x	$-\infty$		5		7		$+\infty$
$(x-5)(-x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La solution est $]5\ ;\ 7[$.

112

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x-1)(3+x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

La solution est $\left]-\infty\ ;\ -3\right]\cup\left[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

113

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$5(2-x)(x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La solution est $[-\infty\ ;-6[\ \cup\ [2\ ;+\infty[$.

Travaux pratiques

TP1 À la recherche de la bonne trajectoire

***Fichiers associés sur le site* www.bordas-indice.fr :**
04_seconde_TP1.url (GeoGebraTube)
04_seconde_TP1_correction.xws (Xcas)
Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :
04_seconde_TP1.ggb (GeoGebra)
04_seconde_TP1_correction.xws (Xcas)
04_seconde_TP1_correction.ggb (GeoGebra)

A. Des paraboles qui bougent

1. Il suffit d'entrer x^2 dans le champ du bas.
2. a. Utiliser l'outil curseur comme spécifié dans l'aide logiciels.
2. b. La courbe générée et tracée en noir est la même que celle de la fonction carré tracée dans la question **1**. Lorsque l'on bouge le curseur, la courbe rouge réapparaît.
2. c. La parabole est de plus en plus étroite à mesure que a croît, s'éloignant de la courbe tracée initialement.
3. a. et **b.** Ces courbes se rapprochent de plus en plus de la fonction carré initialement représentée.
4. a. La courbe obtenue est la courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la parabole représentée à la question **1**.
4. b. Lorsque a augmente de -10 à -1, les courbes tracées se rapprochent de celle tracées en **4.a**.
5. a. Toutes les courbes sont images les unes des autres par translation horizontale.
5. b. Toutes les courbes sont images les unes des autres par translation verticale.

B. La trajectoire de l'oiseau

1. $a = -0{,}14$, $b = 8{,}7$ et $c = 9{,}3$ conviennent.
2. a. $f(2{,}2) = 3{,}5$ et $f(13{,}7) = 5{,}9$ au dixième près.
2. b. Le point de coordonnées (12 ; 8,1) appartient à la parabole en pointillés blancs.
2. c. Attention à bien utiliser le « . » pour taper des nombres décimaux sous Xcas. On obtient les approximations $a = -0{,}153$, $b = 8{,}63$ et $c = 9{,}841$.
2. d. $f(x) = -0{,}153\,(x\text{-}8{,}63)^2 + 9{,}841$.
2. e. Le maximum vaut 9,841.

TP2 Optimisation d'une aire

***Fichiers associés sur le site* www.bordas-indice.fr :**
04_seconde_TP2.url (GeoGebraTube)
04_seconde_TP2_correction.xws (Xcas)
Fichiers associés sur le manuel numérique Premium :
04_seconde_TP2.ggb (GeoGebra)
04_seconde_TP2_correction.xws (Xcas)
04_seconde_TP2_correction.ggb (GeoGebra)

A. Utilisation d'un logiciel

1. à 5. Voir la figure p. 107 du manuel.
6. Cette aire varie et semble admettre un maximum.
7. a. et b. Il semble que l'aire du quadrilatère ENFO soit une fonction polynôme de degré 2, car la trace du point P forme une parabole. L'aire du quadrilatère semble être maximale lorsque le point M est au milieu du segment [AB].

B. Étude algébrique

1. a. Le quadrilatère ENFO, par construction, est un parallélogramme. On sait de plus que les diagonales d'un carré se coupent en formant un angle droit, le quadrilatère ENFO admet donc un angle droit en E. Le quadrilatère est donc un rectangle.
1. b. AB = BC = 4. Le triangle ABC étant rectangle en B, on peut appliquer le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2+BC^2 = 32$.
Donc $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2}\times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
2. Le point variant entre A et B, la longueur AM varie entre 0 et 4. L'ensemble de définition D de f est [0 ; 4].
3. CFN est un triangle rectangle isocèle en F car c'est une réduction du triangle COB, lui-même isocèle rectangle. On a donc CF = NF. De plus, CN = AM = x.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle CFN, on a :
$CN^2 = NF^2 + FC^2 = 2NF^2$. Donc $NF^2 = \frac{1}{2}\ CN^2 = \frac{1}{2}\ x^2$.
Ainsi $NF = \frac{1}{\sqrt{2}}\ x$.
4. $OF = OC - CF = OC - NF = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ x$.
L'aire de ENFO vaut :
$$NF \times OF = \frac{1}{\sqrt{2}}x \times (2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x.$$
5. L'aire de ENFO vaut donc bien $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.
6. f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2$. f est d'abord croissante puis décroissante car $a < 0$, son maximum, est atteint lorsque $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$ et vaut $f(2) = -\frac{1}{2}2^2 + 2 \times 2 = 4 - 2 = 2$.
7. La position du point M telle que l'aire du quadrilatère ENFO soit maximale est celle correspondant au milieu du segment [AB], ce qui valide la conjecture de la partie A. Le quadrilatère ENFO est alors un carré !

Pour approfondir

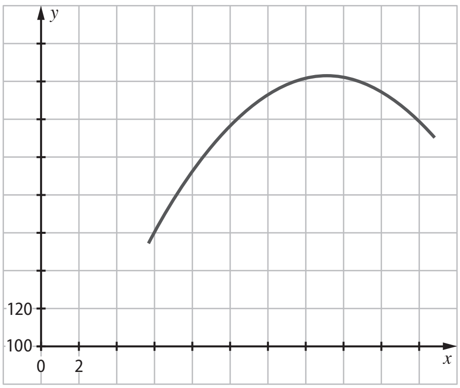
114 **1.** $A^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$. $B^2 = 6 + \sqrt{2}$, donc : $A^2 < 6$ et $B^2 > 6$, soit $A^2 < B^2$.
2. $A > 0$ et $B > 0$, et la fonction carré étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en conclut que $A < B$.
115 **1.** $f(x) = -(x - 3)^2 + 4 = -x^2 + 6x - 5$.
2. Le sommet a pour coordonnées (3 ;4).

x		3	
$f(x)$	↗	4	↘

116 **1.**

x	6		15		20
$f(x)$	161	↗	242	↘	217

2.



3. $y = 8x + 102$.
4. (17 ; 238) ce qui donne un prix de vente unitaire de 17 €.
117 **1.** $B(40) = 900$, on en déduit que $c = -3\,900$.
2.

x	20		80		90
$B(x)$	−1 100	↗	2 500	↘	2 400

3. Le bénéfice est maximum pour un taux d'occupation de 80 %.

118 **1.**

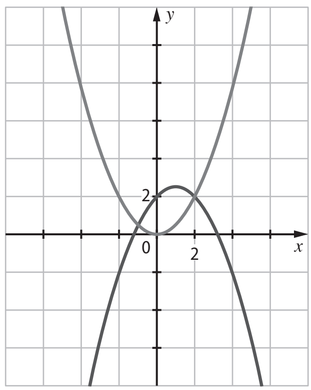
x	0		10		$+\infty$
$B(x)$	−3 750	↗	1 250	↘	$-\infty$

2. Le bénéfice de l'artisan est nul lorsqu'il produit 5 ou 15 pièces.
3. Entre 6 et 14 pièces.
4. Le bénéfice maximum est de 1 250 € lorsqu'il produit 10 pièces.
119 ***Fichier associé sur le site* www.bordas-indice.fr :**
04_seconde_ex119.url (GeoGebraTube)
Fichier associé sur le manuel numérique Premium :
04_seconde_ex119.ggb (GeoGebra)
1. Voir fichier logiciel.
2. $A_{A'B'C'D'} = A_{ABCD} - A_{triangles}$
$$= 15 - 2 \times \frac{x(3-x)}{2} - 2 \times \frac{x(5-x)}{2}$$
$$= 15 - x(8 - 2x) = 2x^2 - 8x + 15.$$
3. $-\frac{b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \times 2} = 2$, l'aire est maximale quand $x = 2$.
120 ***Fichiers associés sur le site* www.bordas-indice.fr *et le manuel numérique Premium* :**
04_seconde_ex120.xls (Excel)
04_seconde_ex120.ods (OpenOffice)
A. Sur route sèche
1. B2=B3*B1*B1.
2. a. 72km/h=20m/s ; $0{,}08 \times 20^2 = 32$ mètres.
b. $0{,}08 \times v^2 > 45 \Leftrightarrow v^2 > 562{,}5$, soit $v > \sqrt{562{,}5}$ car $v > 0$.
Or $\sqrt{562{,}5} = \frac{15\sqrt{10}}{2}$ m/s, soit environ 85,38 km/h.
B. Sur route mouillée
1. Cette parabole passe par le point de coordonnées (25 ;100) donc $k \times 25^2 = 100 \Leftrightarrow k = \frac{4}{25}$.
2. Ainsi la représentation graphique est $y = 0{,}16x^2$, donc la courbe de la première partie est telle que les ordonnées de tous les points sont divisées par deux.
121 **1. a.**

x		0	
$f(x)$	↘	0	↗

x		1	
$f(x)$	↗	2,5	↘

1. b.



2. a. Il suffit de développer le membre de droite.

b. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$, soit $x=2$ ou $x=-1$.

c. $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0$. La solution est]-1 ;2[.

d. Les courbes se coupent aux points d'abscisses –1 et 2. La courbe représentative de f est au-dessus de celle de g pour x appartenant à l'intervalle]–1 ; 2[.

3. a. $0{,}5[5-(x-1)^2] = 0{,}5[5-1-x^2+2x] = -0{,}5x^2+x+2$.

b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 5-(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{5}$ ou $x = 1-\sqrt{5}$ $(x-1)^2$.

La courbe représentative de g coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $1+\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{5}$.

c. $g(x) > 0 \Leftrightarrow 5-(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow [\sqrt{5}-(x-1)][\sqrt{5}+(x-1)] > 0$.

En faisant un tableau de signes, on trouve que la solution est $\left]1-\sqrt{5}\ ;\ 1+\sqrt{5}\right[$, qui sont les abscisses des points de la courbe représentative de g strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

122 **1.** $V(x) = (29{,}7-2x)\times(21-2x)\times x$.

2. Ces deux valeurs sont respectivement dans les intervalles [2,56 ; 2,57] et [5,7 ; 5,71].

123 $g(-\frac{b}{2}) = \frac{b^2}{4} - b\times\frac{b}{2} + 1 = 1 - \frac{b^2}{4} = -(-\frac{b}{2})^2 + 1$.

Donc tous les sommets des paraboles du type de la fonction g appartiennent à la courbe d'équation $y=-x^2+1$.

124 **1.**

x	–4		1		6
$f(x)$	0	↗	50	↘	0

2. $f(x) = (x+4)(x-6)(-2) = -2x^2+4x+48$.