Chapitre 6.
Fonctions ; nombre dérivé

Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions et représentations graphiques	Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations. Lectures graphiques et interprétation d'un tableau de variation.	On s'assurera à cette occasion que le vocabulaire mis en place en seconde est bien assimilé (sens de variation, extrema, …), mais il ne sera pas fait de révisions systématiques. Le travail sera amené par la pratique de problèmes. Il sera également fait référence à des représentations graphiques de fonctions dont on n'a pas l'expression algébrique, par exemple un électrocardiogramme. On choisira le plus souvent $I \subset [0\,;+\infty[$. La variable pourra souvent être appelée t et non x par référence au temps.
Fonctions de référence Fonctions linéaires, fonctions affines, fonctions $t \mapsto t^2$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, $t \mapsto \sqrt{t}$, $t \mapsto t^3$.	Tracer la courbe et dresser le tableau de variation des fonctions de référence sur un intervalle $I = [a\,;b]$.	On s'appuiera en particulier sur des situations issues d'autres discipline, afin d'illustrer par des exemples les notions de linéarité et de proportionnalité. À cette occasion, on mettra en évidence à partir de la représentation graphique, des vitesses de croissance variant différemment.
	Comparer deux fonctions de référence : – graphiquement ; – algébriquement si les calculs n'exigent pas trop de technicité.	On pourra résoudre, sur des exemples concrets, des équations et des inéquations du premier degré et des équations et inéquations simples du second degré ne nécessitant pas l'usage du discriminant. Le discriminant est hors programme. On procédera par des changements d'éclairage entre l'aspect algébrique et l'aspect graphique afin de donner du sens aux résolutions proposées.
Nombre dérivé Coefficient directeur de la tangente en un point d'une courbe.	Approche graphique de la notion de tangente à une courbe. Lire le coefficient directeur d'une tangente à une courbe sur un graphique.	Parmi les approches possibles du nombre dérivé, on pourra faire observer, par exemple, avec un logiciel de géométrie dynamique, la position limite d'une sécante à une courbe lorsque cette sécante pivote autour d'un point, mais aucune théorie sur la notion de limite n'est au programme.
Nombre dérivé en a.		La notion de vitesse permet aussi une autre approche pertinente.
Nombre dérivé en a des fonctions de référence.		
Tangente en un point à une courbe d'équation $y = f(t)$.	Construire la tangente en un point d'une courbe.	Le nombre dérivé de la fonction f en a, noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente au point $A(a, f(a))$. Toute recherche, hors contexte, d'une équation de la tangente à une courbe n'est pas un objectif du programme.

Nos objectifs

L'aspect graphique tient une place très importante dans ce chapitre.
Les élèves doivent savoir :
– lire et interpréter la courbe représentative d'une fonction ;
– lire graphiquement un nombre dérivé.
La plupart des exercices proposent ainsi de faire le lien entre l'aspect numérique et l'aspect graphique des fonctions.

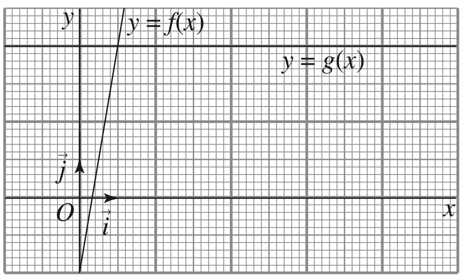
Activités et applications

1. Vue sur les fonctions de référence

Activité

1. Tracés sur l'écran de la calculatrice.
2. a) Pour $x \in \;]0\,;1[$, on a :
$x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < \dfrac{1}{x}$.
b) Pour $x \in \;]1\,;+\infty[$, on a :
$\dfrac{1}{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.

Application 1

1.


2. L'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = 6x - 2$ et $y = 4$ est 1.
La droite d'équation $y = 6x - 2$ est située au-dessous de la droite d'équation $y = 4$ pour $x \in \;]-\infty\,;1[$.
La droite d'équation $y = 6x - 2$ est située au-dessus de la droite d'équation $y = 4$ pour $x \in \;]1\,;+\infty[$.
Conclusion :
pour $x = 1$, $f(x) = g(x)$;
pour $x \in \;]-\infty\,;1[$, $f(x) < g(x)$;
pour $x \in \;]1\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

Application 2

$f(x) - g(x) = x^3 - x$, soit en factorisant :
$f(x) - g(x) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$, $f(x) = g(x)$.
Pour $x \in \;]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$, $f(x) < g(x)$.
Pour $x \in \;]-1\,;0[\cup]1\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

2. Graphiques ; sens de variation

Activité

1. L'exercice d'éducation physique est considérée sur l'intervalle [0 ; 20].
2. Le rythme cardiaque de l'élève au repos est de 70 pulsations par minute et de 100 pulsations par minute au bout de 3 minutes.
3. Le rythme cardiaque est de 90 pulsations par minute à la 2e minute et à la 15e minute.
4. L'intervalle de temps le plus grand pendant lequel le rythme cardiaque a toujours augmenté est l'intervalle [0 ; 8] ; l'intervalle de temps le plus grand pendant lequel il a toujours diminué est l'intervalle [8 ; 20].

Application 1

- L'équation $f(x) = 0$ a trois solutions, -3, -1 et 1.
- L'équation $f(x) = 2$ a une solution, -4.
- L'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution.

Application 2

- f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[-2\,;0]$ et $[4\,;6]$.
- f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[-4\,;-2]$, $[0\,;4]$ et $[6\,;8]$.

3. Tangente en un point *A* à une courbe ; nombre dérivé en *a* d'une fonction

Une autre possibilité d'introduction du nombre dérivé est proposée dans l'activité guidée 2 page 165 (livre élève).

Activité

1. Tracés sur l'écran de la calculatrice.
2. $(2 + b) \times 0 = 0$, donc les coordonnées (0 ; 0) du point O vérifient l'équation $y = (2 + b)\,x$.

$(2 + b)\,b = 2b + b^2$, donc les coordonnées $(b\,;\,2b + b^2)$ du point B vérifient l'équation $y = (2 + b)x$.
Ainsi, cette équation est bien celle de la droite (OB), de coefficient directeur $2 + b$.

3. a) et **b)** Tracés des droites sur l'écran de la calculatrice. On constate que plus b prend des valeurs proches de zéro, plus la droite (OB) se rapproche de la droite $\mathcal{D}$.

4. Même remarque que la question **3**.

Application 1

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à -2, donc $f'(3) = -2$.

2. $f'(-3) = -\dfrac{1}{2}$.

Application 2

1. 2. Tracé sur l'écran de la calculatrice.

3. $f'(1{,}5) = 1$.

4. Nombre dérivé en *a* des fonctions de référence

Activité

1. $f'(-2) = -4\,;\, f'(-1) = -2\,;\, f'(0) = 0\,;\, f'(1) = 2$ et $f'(2) = 4$.

2. $f'(a) = 2a$.

Application 1

- $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$, donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.
- $g'(a) = 2a$, donc $g'(-1) = -2$.

Application 2

2. $f'(a) = 3a^2$.
$f'(1) = 3\,;\, f'(-1) = 3\,;\, f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$.
T_1 est la droite passant par le point de coordonnées $(1\,;\,1)$ et de coefficient directeur 3.
T_{-1} est la droite passant par le point de coordonnées $(-1\,;\,-1)$ et de coefficient directeur 3.

Exercices d'entraînement

C *indique que l'exercice est corrigé dans le livre élève.*

1 *Exercice résolu dans le livre élève.*

2 **1.**

Nombre de nuitées	1	2	3	6	10
Prix à payer (en €)	45	90	135	270	450

2. Le prix à payer est proportionnel au nombre de nuitées passées, car $\dfrac{45}{1} = \dfrac{90}{2} = \dfrac{135}{3} = \dfrac{270}{6} = \dfrac{450}{10} = 45$.

3. f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 45x$.

3 **1.**

Durée	**Tarif normal**	**Remise**	**Prix de l'abonnement (arrondi au centime)**
3 mois	93,60 €	8 %	$93{,}6 - 93{,}6 \times 0{,}08 = 86{,}11$
6 mois	187,20 €	11 %	$187{,}2 - 187{,}2 \times 0{,}11 = 166{,}61$
12 mois	374,40 €	18 %	$374{,}4 - 374{,}4 \times 0{,}18 = 307{,}01$

2. a) Le prix de l'abonnement n'est pas proportionnel à sa durée, car par exemple $\dfrac{86{,}11}{3} \neq \dfrac{166{,}61}{6}$.
Plus la durée de l'abonnement est longue, plus le pourcentage de remise est élevé.
b) Le tarif normal est proportionnel à la durée, car $\dfrac{93{,}6}{3} = \dfrac{187{,}2}{6} = \dfrac{374{,}4}{12} = 31{,}2$.

3. a) On a la relation $\dfrac{y}{x} = 31{,}2$, soit $y = 31{,}2x$.
b) Tracé sur l'écran de la calculatrice.
c) Il s'agit de la fonction linéaire f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 31{,}2x$.

4 **C**

5 **a)** Vrai, h est une fonction affine.
b) Faux, g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
c) Vrai, (fonction de référence de courbe connue).
d) Vrai, h est une fonction affine avec $m < 0$.
e) Faux, par exemple $h(2) = -1 < 0$.
f) Vrai.
g) Faux, l'ensemble des solutions est $]0\,;\,+\infty[$.
h) Vrai.

6 **1.** Réponse **b)**.
2. Réponse **a)**.
3. Réponse **a)**.

7 Pour $x = 0$ ou $x = 1$, $f(x) = g(x) = h(x) = k(x)$.
Pour $x \in \,]0\,;1[$, on a : $h(x) < g(x) < f(x) < k(x)$.
Pour $x \in \,]1\,;1{,}4]$, on a : $k(x) < f(x) < g(x) < h(x)$.

8 $f(x) - g(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 4)$
$= x(x - 2)(x + 2)$.
Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^3-4x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x = -2$, $x = 0$ et $x = 2$, $f(x) = g(x)$.
Pour $x \in \,]-\infty\,;-2[\, \cup\,]0\,;2[$, $f(x) < g(x)$.
Pour $x \in \,]-2\,;0[\, \cup\,]2\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

9 **C**

10 **a)** $g(x) - f(x) = x^2 - x = x(x - 1)$.
Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
x	‖	$+$		$+$	
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$x(x-1)$	‖	$-$	0	$+$	

Pour $x = 1$, $g(x) = f(x)$.
Pour $x \in \,]1\,;+\infty[$, $g(x) > f(x)$.
Pour $x \in \,]0\,;1[$, $g(x) < f(x)$.

b) $h(x) - f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)\,(x - 1)$.
Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
x	‖	$+$		$+$	
$x+1$	‖	$+$		$+$	
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$x(x+1)\,(x-1)$	‖	$-$	0	$+$	

Pour $x = 1$, $h(x) = f(x)$.
Pour $x \in \,]1\,;+\infty[$, $h(x) > f(x)$.
Pour $x \in \,]0\,;1[$, $h(x) < f(x)$.

c) $k(x) - f(x) = \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1 - x^2}{x} = \dfrac{(1 + x)\,(1 - x)}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$1+x$	‖	$+$		$+$	
$1-x$	‖	$+$	0	$-$	
x	‖	$+$		$+$	
$\dfrac{(1+x)\,(1-x)}{x}$	‖	$+$	0	$-$	

Pour $x = 1$, $k(x) = f(x)$.
Pour $x \in \,]0\,;1[$, $k(x) > f(x)$.
Pour $x \in \,]1\,;+\infty[$, $k(x) < f(x)$.

11 **C**

12 **a)** La solution de l'équation $9x = 2 - 11x$ est $\dfrac{1}{10}$.
b) L'équation $4 - x = 6 - x$ n'a pas de solution.
c) La solution de l'équation $4 = 2 - x$ est -2.
d) La solution de l'équation $15x = 5x - 20$ est -2.

13 **C**

14 L'équation $-2x^2 - 8x + 1 = 1$ est équivalente à $-2x^2 - 8x = 0$, soit $-2x(x + 4) = 0$.
Les solutions de cette équation sont 0 et -4.

15 L'équation $x^2 - 2x + 2 = 1$ est équivalente à $x^2 - 2x + 1 = 0$, soit $(x - 1)^2 = 0$.
La solution de cette équation est 1.

16 $\dfrac{1}{x} = 5$ équivaut à $x = \dfrac{1}{5}$.

La solution de l'équation $f(x) = 5$ est $\dfrac{1}{5}$.

17 **C**

18 **1.** $(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$.
2. L'équation $f(x) = 3$ est équivalente à :
$(x - 2)(x + 1) = 0$.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 3$ sont -1 et 2.

19 *Exercice résolu dans le livre élève.*

20 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3 > -x - 2$ est $]1\,;+\infty[$.
b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x + 5 < 3x - 2$ est $]7\,;+\infty[$.

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $-5x + 6 \geqslant -6x + 4$ est $[-2\,;+\infty[$.
d) L'ensemble des solutions de l'inéquation $x - 5 \leqslant 3x - 5$ est $[0\,;+\infty[$.

21 **a)** Les solutions de l'équation $f(x) = -1$ sont -1 et 1.
b) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
c) L'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution.

22 **C**

23 **a)** L'équation $\dfrac{2}{x^2+1} = 1$ est équivalente à $x^2 + 1 = 2$, soit $x^2 = 1$.
Les solutions de cette équation sont -1 et 1.
b) L'équation $\dfrac{2}{x^2+1} = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
c) L'équation $\dfrac{2}{x^2+1} = -1$ est équivalente à $2 = -x^2 - 1$, soit $x^2 = -3$.
Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

24 *Exercice résolu dans le livre élève.*

25 **a)** $x^2 > 4$ équivaut à $x^2 - 4 > 0$, soit $(x-2)(x+2) > 0$.
Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-4 = (x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 4$ est $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.
b) $x^2 < 9$ équivaut à $x^2 - 9 < 0$, soit $(x-3)(x+3) < 0$.
Tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-9 = (x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < 9$ est $]-3\,;3[$.
c) $x^2 \geqslant 6$ équivaut à $x^2 - 6 \geqslant 0$, soit $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) \geqslant 0$.
Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$x-\sqrt{6}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{6}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-6 = (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 6$ est $]-\infty\,;-\sqrt{6}]\cup[\sqrt{6}\,;+\infty[$.

26 **1.** $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$.
2. $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6$.
Tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x = -3$ et $x = 2$, $f(x) = g(x)$.
Pour $x \in\,]-3\,;2[$, $f(x) < g(x)$.
Pour $x \in\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,]2\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

27 **1.** $(1-2x)(x-3) = -2x^2 + 7x - 3$.
2. $f(x) - g(x) = -2x^2 + 7x - 3$.
Tableau de signe :

x	$-\infty$		$0{,}5$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$-2x^2+7x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour $x = 0{,}5$ et $x = 3$, $f(x) = g(x)$.
Pour $x \in\,]-\infty\,;0{,}5[\,\cup\,]3\,;+\infty[$, $f(x) < g(x)$.
Pour $x \in\,]0{,}5\,;3[$, $f(x) > g(x)$.

28 $f\left(\dfrac{1}{10}\right) = 10\,;\ f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4\,;\ f(1) = 1\,;\ f(3) = \dfrac{1}{3}$ et $f(10) = \dfrac{1}{10}$.

29 $f(-100) = -\dfrac{1}{100}\,;\ f(-4) = -\dfrac{1}{4}\,;\ f(-1) = -1\,;$ $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -4$ et $f\left(-\dfrac{1}{10}\right) = -10$.

30 $f(-5) = 25\,;\ f(-4) = 16\,;\ f(-1) = 1\,;\ f(0) = 0\,;$ $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{16}\,;\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\,;\ f(1) = 1$ et $f(2) = 4$.

31 **C**

32

x	-10	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	$-1\,000$	-27	$-3{,}375$	$-0{,}125$

x	$\frac{1}{2}$	4	78	121
$f(x)$	$0{,}125$	64	$474\,552$	$1\,771\,561$

33

x	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-77	-13	-5	-5	-7	-5	7	35

34 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ et $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

35 $f(-1) = -1$, $f(0) = -2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1{,}6$, $f(1) = -1$ et $f(2) = -\frac{2}{5}$.

36 **C**

37 On résout l'équation $f(x) = -2$, équivalente à $x^2 + 2x + 1 = 0$, soit $(x + 1)^2 = 0$.
-2 a un antécédent par f : -1.

38 On résout successivement dans $]0\,;+\infty[$ les équations $-\frac{1}{x^2} = -1$; $-\frac{1}{x^2} = 1$ et $-\frac{1}{x^2} = 0$.
-1 a un antécédent par f : 1 ;
1 n'a pas d'antécédent par f ;
0 n'a pas d'antécédent par f.

39 *Exercice résolu dans le livre élève.*

40 **1.** L'image par f de chacun des nombres -4 ; 0 et 2 est 2 ; 1 et -1.
2. Les antécédents par f de 0 sont -3 ; -1 et 1 ;
2 a un seul antécédent par f : -4 ;
-3 n'a pas d'antécédent par f.

41 **1.** L'image par f de chacun des nombres -2 ; $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$ est $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$ et 0.
2. -2 a un seul antécédent par f : 0 ;
-1 a deux antécédents par f : $-\frac{3}{2}$ et 1 ;
1 n'a pas d'antécédent par f.

42 **1.** $f(-5) = 1$, $f(-3) = -1$, $f(2) = -2$ et $f(6) = 3$.
2. Les antécédents par f de -2 sont $-2{,}5$, 0 et 2.
Les antécédents par f de 0 sont -4 et $3{,}5$.
Les antécédents par f de 1 sont -5 et 4.
L'antécédent par f de 2 est 5.

43 *Exercice résolu dans le livre élève.*

44 **a) 1.** f est strictement croissante sur $[-6\,;-2]$ et sur $[2\,;4]$. f est strictement décroissante sur $[-2\,;2]$.
2. f admet un minimum égal à -1, atteint pour $x = 2$.
f admet un maximum égal à 3, atteint pour $x = 4$.
b) 1. f est strictement croissante sur $[-4\,;4]$.
2. f admet un minimum égal à -2, atteint pour $x = -4$.
f admet un maximum égal à 4, atteint pour $x = 4$.
c). 1. f est strictement croissante sur $[-4\,;-1]$ et sur $[1\,;2]$. f est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.
2. f admet un minimum égal à -3, atteint pour $x = 1$.
f admet un maximum égal à 2, atteint pour $x = -1$ et $x = 2$.
d) 1. f est strictement croissante sur $[-4\,;-2]$ et sur $[0\,;2]$. f est strictement décroissante sur $[-2\,;0]$ et sur $[2\,;4]$.
2. f admet un minimum égal à -4, atteint pour $x = -4$ et $x = 0$. f admet un maximum égal à -1, atteint pour $x = -2$ et $x = 2$.
e) 1. f est strictement décroissante sur $[-2\,;1]$.
2. f admet un minimum égal à -1, atteint pour $x = 1$.
f admet un maximum égal à 3, atteint pour $x = -2$.

45 **C**

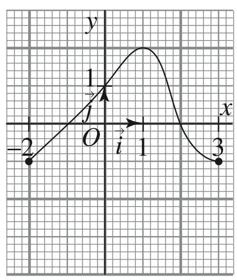
46 **a)** Tableau de variation de f sur $[-4\,;4]$.

x	-4		-3		-1		1		3		4
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	-1

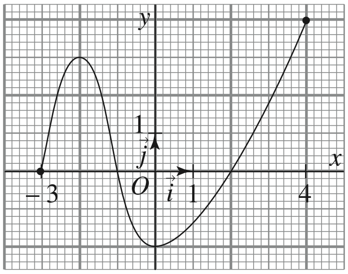
b) Tableau de variation de f sur $[-2\,;6]$.

x	-2		2		4		6
$f(x)$	2	↘	0	↗	1	↘	-1

47 **a)**



b)



48 *Exercice résolu dans le livre élève.*

49 **C**

50 f admet un minimum égal à -5, atteint pour $x = 12$. f admet un maximum égal à 1, atteint pour $x = 4$.

51 f admet un minimum égal à -1, atteint pour $x = 0$. f admet un maximum égal à 0, atteint pour $x = 10$.

52 **a)** f admet un minimum égal à 0, atteint pour $x = -1$.
f admet un maximum égal à 5, atteint pour $x = -4$.
b) f admet un minimum égal à -4, atteint pour $x = -5$, $x = 0$ et $x = 5$. f admet un maximum égal à 2, atteint pour $x = -2$ et $x = 3$.

53 *Exercice résolu dans le livre élève.*

54 Les solutions de l'équation $f(x) = -3$ sont -1 et 3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > -3$ est $]-1\,;3[$.

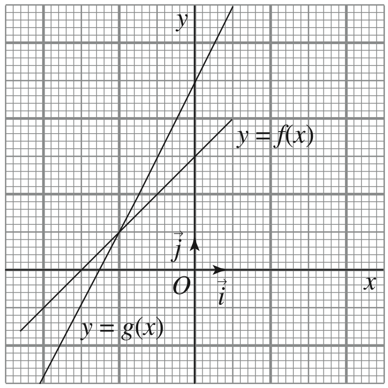
55 L'ensemble des solutions de l'inéquation
$f(x) < -2$ est $]-\infty\,;-1[$.

56 **a)** Faux, $f(1) = -0{,}5$.
b) Faux, l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions : -4 ; -2 et 0.
c) Vrai.
d) Faux, par exemple $f(2) = -1 < 0$.

57 **C**

58 **1.** Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2 et 0. L'équation $f(x) = 4$ n'a pas de solution.
2. • L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est $[-6\,;0]$.
• L'inéquation $f(x) \geqslant 4$ n'a pas de solution.

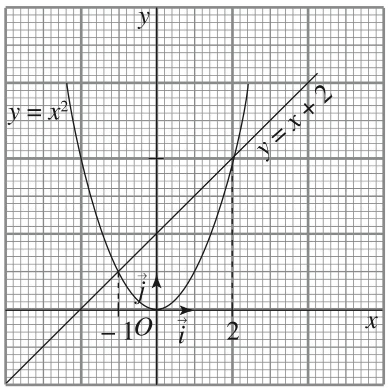
59 **1.** Représentation graphique :



2. L'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x + 3$ et $y = 2x + 5$ est -2.
La droite d'équation $y = x + 3$ est située au-dessus de la droite d'équation $y = 2x + 5$ pour $x \in\ ]-\infty\,;-2[$.
La droite d'équation $y = x + 3$ est située au-dessous de la droite d'équation $y = 2x + 5$ pour $x \in\ ]-2\,;+\infty[$.

Conclusion :
pour $x = -2$, $f(x) = g(x)$;
pour $x \in\ ]-\infty\,;-2[$, $f(x) > g(x)$;
pour $x \in\ ]-2\,;+\infty[$, $f(x) < g(x)$.

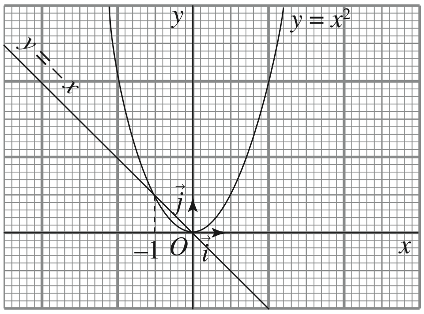
60 **1.** Représentation graphique :



2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = x + 2$ sont -1 et 2.
La courbe est située au-dessous de la droite d'équation $y = x + 2$ pour $x \in\ ]-1\,;2[$.
La courbe est située au-dessus de la droite d'équation $y = x + 2$ pour $x \in\ ]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$.

Conclusion :
pour $x = -1$ et $x = 2$, $f(x) = g(x)$;
pour $x \in\ ]-1\,;2[$, $f(x) < g(x)$;
pour $x \in\ ]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

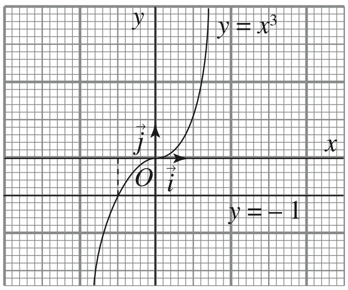
61 **1.** Représentation graphique :



2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = -x$ sont -1 et 0.
La courbe est située au-dessus de la droite d'équation $y = -x$ pour $x \in \,]-\infty\,;-1[\, \cup \,]0\,;+\infty[$.
La courbe est située au-dessous de la droite d'équation $y = -x$ pour $x \in \,]-1\,;0[$.

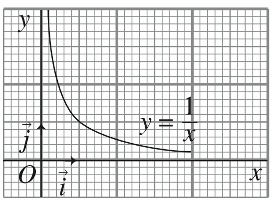
Conclusion :
pour $x = -1$ et $x = 0$, $f(x) = g(x)$;
pour $x \in \,]-1\,;0[$, $f(x) < g(x)$;
pour $x \in \,]-\infty\,;-1[\, \cup \,]0\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

62 Représentation graphique :



a) L'abscisse du point d'intersection de la courbe d'équation $y = x^3$ et de la droite d'équation $y = -1$ est -1.
La solution de l'équation $x^3 = -1$ est -1.
b) La courbe est située au-dessus de la droite pour $x \in \,]-1\,;+\infty[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 > -1$ est $]-1\,;+\infty[$.

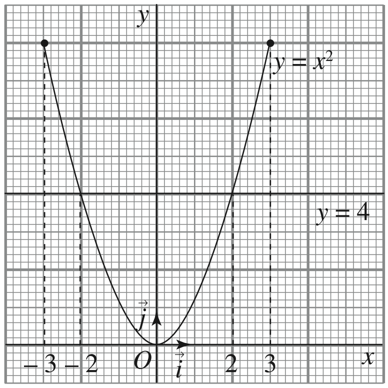
63 Représentation graphique :



a) La courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in \,]0\,;+\infty[$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} > 0$ est $]0\,;+\infty[$.

b) L'inéquation $\frac{1}{x} < 0$ n'a pas de solution dans $]0\,;+\infty[$.

64 Représentation graphique :



On trace la courbe d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 4$ sur la même figure.
a) Les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = 4$ sont -2 et 2.
Les solutions de l'équation $x^2 - 4 = 0$ sont -2 et 2.
b) La courbe est située au-dessous de la droite pour $x \in \,]-2\,;2[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 4 < 0$ est $]-2\,;2[$.

65 La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est la droite D_3 d'équation réduite $y = 2x + 1$.

66 La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est la droite T_3 d'équation $y = -x$.

67 T est la droite d'équation $y = 2x - 1$; $f'(1) = 2$.

68 **1.** Le coefficient directeur de T_1 est 2 ; le coefficient directeur de T_2 est 1.
2. $f'(-2) = 2$; $f'(2) = 1$.

69 **C**

70 • $f'(-2)$ est le coefficient directeur de T_1 ; $f'(-2) = -2$.
• $f'(-0{,}5) = 0$; $f'(1) = 0$.
• $f'(1{,}5)$ est le coefficient directeur de T_2 ; $f'(1{,}5) = -4$.

71 **C**

72 $f'(3)$ est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points de coordonnées $(3 ; -3)$ et $(0 ; 0)$, soit $f'(3) = -1$.

73 $f'(4)$ est le coefficient directeur de la droite (AB), soit $f'(4) = 2$.

74 **C**

75 $f'(0) = -0{,}5$ et $f'(-1) = 0$.

76 • $f'(-2) = 3$ (coefficient directeur de T).
• $f'(0) = 0$.
• On lit $f(2) = 1$; la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 passe par les points de coordonnées $(2 ; 1)$ et $(4 ; -1)$. Le coefficient directeur de la droite passant par ces deux points est -1, donc $f'(2) = -1$.

77 $f'(-2) = \frac{1}{4}$; $f'(-1) = 1$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la droite (AB), soit $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$.

78 $f'(-2)$ est le coefficient directeur de T, soit $f'(-2) = 2$; $f'(-1) = 1$; $f'(0) = 0$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{8}\right)$ et $\left(0 ; \frac{1}{8}\right)$,
soit $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$; $f'(1) = -1$.

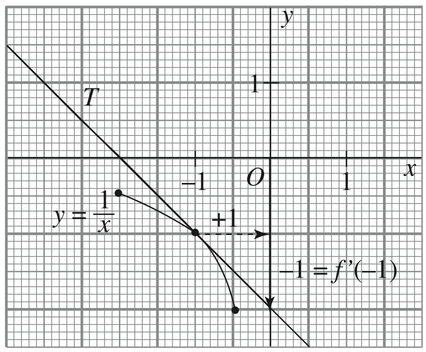
79 $f'(0) = 1$ avec la courbe ⑤ ; $f'(-1) = 2$ avec la courbe ③ ; $f'(-1) = -1$ avec la courbe ⑥ ; $f'(-1) = 1$ avec la courbe ① ; $f'(0) = 0$ avec la courbe ② ; $f'(0) = -1$ avec la courbe ④.

80 **1.** $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.
2. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$.
3. $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = -2$.
4. $f(1) = 2$ et $f'(1) = 1$.

81 **a)** Vrai.
b) Faux, $f'(1) = -2$.
c) Vrai.
d) Faux, $f'(-3) \neq f'(2)$.
e) Vrai.
f) Faux, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = -2x + 1$.
g) Faux, elle passe par $(2 ; -2)$.
h) Vrai.
i) Vrai.

82 **a)** Vrai. **b)** Vrai. **c)** Faux, $f(1{,}5) = 0$.
d) Faux, $f(1{,}5) = 2{,}5$. **e)** Vrai. **f)** Vrai.
g) Vrai. **h)** Vrai. **i)** Vrai.

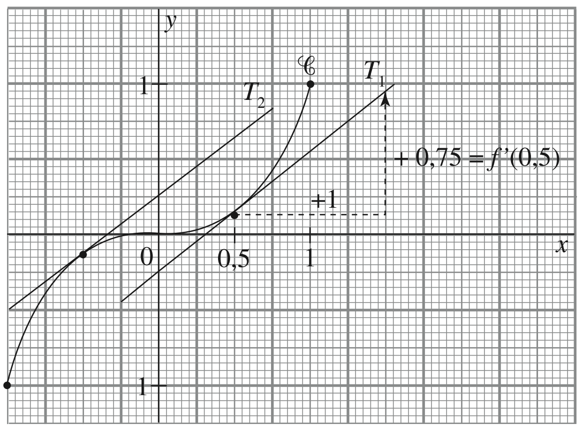
83 **1.**



2. $f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$.

T est la droite passant par le point de coordonnées $(-1 ; -1)$ et de coefficient directeur -1.

84 **1.**



2. $f'(a) = 3a^2$, donc $f'(0{,}5) = 3 \times (0{,}5)^2 = 0{,}75$.
T_1 est la droite passant par le point de coordonnées $(0{,}5 ; 0{,}125)$ et de coefficient directeur $0{,}75$.
3. $f'(-0{,}5) = 3 \times (-0{,}5)^2 = 0{,}75$.
$f'(0{,}5) = f'(-0{,}5)$; T_1 et T_2 ont même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

85 **2.** $f'(0{,}5) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $T : y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

86 **C**

87 **1.**

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f'(x)$	0,71	0,5	0,40	0,35	0,32	0,29

3. On trace sur la calculatrice la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; on obtient les valeurs précédentes avec la fonction TABLE.

$\boxed{\textbf{88}}$ **1.** Réponse **b)** ; **2.** Réponse **a) ; 3.** Réponse **a)** ; **4.** Réponse **b)** ; **5.** Réponse **a)**.

$\boxed{\textbf{89}}$ *Exercice résolu dans le livre élève.*

$\boxed{\textbf{90}}$ **2.** $f'(1) = \dfrac{1}{2}$; $T : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{91}}$ **2.** $f'(0{,}5) = -4$; $T_1 : y = -4x + 4$.

$f'(2) = -\dfrac{1}{4}$; $T_2 : y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.

Je fais le point

Savez-vous comparer deux fonctions, par le calcul ou graphiquement ?

Énoncé 1

$f(x) - g(x) = x - 2$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$+$	

Pour $x = 2$, $f(x) = g(x)$.
Pour $x \in \,]-\infty\,;2[$, $f(x) < g(x)$.
Pour $x \in \,]2\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

Graphiquement :
Pour $x = 2$, les droites représentatives de f et de g se coupent.
Pour $x \in \,]-\infty\,;2[$, la droite représentative de f est située au-dessous de celle de g.
Pour $x \in \,]2\,;+\infty[$, la droite représentative de f est située au-dessus de celle de g.

Énoncé 2

$f(x) - g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$.

Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x(x - 1)$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x = 0$ et $x = 1$, $f(x) = g(x)$.
Pour $x \in \,]0\,;1[$, $f(x) < g(x)$.
Pour $x \in \,]1\,;+\infty[$, $f(x) > g(x)$.

Graphiquement :
Pour $x = 0$ et $x = 1$, les droites représentatives de f et de g se coupent.
Pour $x \in \,]0\,;1[$, la courbe représentative de f est située au-dessous de celle de g.
Pour $x \in \,]1\,;+\infty[$, la courbe représentative de f est située au-dessus de celle de g.

Savez-vous déterminer graphiquement l'image et les éventuels antécédents d'un nombre par une fonction ?

Énoncé 1

1. $f(-3) = -1$.
2. Les antécédents par f de 1 sont -5, -2 et $-\dfrac{1}{2}$.

Énoncé 2

1. $f(-6) = 2$.
2. Les antécédents par f de -1 sont -3 et 1.

Savez-vous déterminer graphiquement le sens de variation, et les éventuels minimum et maximum d'une fonction ?

Énoncé 1

1. f est strictement croissante sur $[-3\,;-1]$ et sur $[2\,;3]$.
f est strictement décroissante sur $[-6\,;-3]$ et sur $[-1\,;2]$.

x	-6		-3		-1		2		3
$f(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

2. f admet un minimum égal à -2, atteint pour $x = 2$.
f admet un maximum égal à 3, atteint pour $x = -1$.

Énoncé 2

1. f est strictement croissante sur $[-5\,;-3]$, sur $[-1\,;0]$ et sur $[1\,;4]$.
f est strictement décroissante sur $[-3\,;-1]$ et sur $[0\,;1]$.

x	-5		-3		-1		0		1		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

2. f admet un minimum égal à -3, atteint pour $x = -1$.
f admet un maximum égal à 1, atteint pour $x = -3$ et $x = 4$.

Savez-vous résoudre graphiquement une équation $f(x) = k$ et une inéquation $f(x) < k$ (ou $f(x) > k$) ?

Énoncé 1

1. Les solutions de l'équation $f(x) = -1$ sont -3, 1 et 4.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < -1$ est $]1\,;4[$.

Énoncé 2

1. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 0.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est $]-1\,;0[$.

Savez-vous déterminer graphiquement un nombre dérivé (coefficient directeur d'une tangente à la courbe représentative d'une fonction) ?

Énoncé 1

$f'(1{,}5) = 2$.

Énoncé 2

$f'(-2) = -1$.

Savez-vous déterminer le nombre dérivé en *a* d'une fonction de référence ?

Énoncé 1

$f'(a) = 3a^2$, donc $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2$; $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

Énoncé 2

$f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$, donc $f'(-1) = -\dfrac{1}{(-1)^2} = -1$.

Activités guidées

92 **AG1** **1.**

Prix de vente HT (en €)	45	60	100	300
Montant de la TVA (en €)	53,82 – 45 = 8,82	71,76 – 60 = 11,76	119,6 – 100 = 19,6	358,8 – 300 = 58,8
Prix de vente TTC (en €)	53,82	71,76	119,6	358,8

2. Ce tableau représente une situation de proportionnalité, car $\dfrac{8{,}82}{45} = \dfrac{11{,}76}{60} = \dfrac{19{,}6}{100} = \dfrac{58{,}8}{300} = 0{,}196$.

Le coefficient de proportionnalité est 0,196. Le pourcentage de la TVA est de 19,6 %.
3. Ce tableau représente une situation de proportionnalité, car $\dfrac{53{,}82}{45} = \dfrac{71{,}76}{60} = \dfrac{119{,}6}{100} = \dfrac{358{,}8}{300} = 1{,}196$.

On a la relation $\dfrac{P_{VTC}}{P_{VHT}} = 1{,}196$, soit $\dfrac{y}{x} = 1{,}196$ équivalent à $y = 1{,}196\,x$.
5. a) Pour $y = 48$, on lit $x \approx 40$.
Le prix de vente hors taxe d'un article valant 48 € taxe comprise est environ 40 €.
b) Pour $x = 20$, on lit $y \approx 24$.
Le prix de vente taxe comprise d'un article valant 20 € hors taxe est environ 24 €.
c) Pour $y = 48$, $x = \dfrac{48}{1{,}196}$, soit $x \approx 40{,}13$.

Pour $x = 20$, $y = 1{,}196 \times 20$, soit $y \approx 23{,}92$.

93 **AG2** **1. a) b)** Tracé sur la calculatrice.
c) Le grossissement important d'une partie de la courbe ne permet pas d'observer la courbure de l'arc de parabole.
Chaque partie grossie ressemble alors à un segment.
2. a) Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à 1,99.
Le coefficient directeur de la droite (AF) est égal à 2,01.
b) Le coefficient directeur de la droite (AE') est égal à 1,999.
Le coefficient directeur de la droite (AF') est égal à 2,001.
c) Le coefficient directeur de Δ est égal à 2.
d) $\Delta : y = 2x - 1$.

3. b) Au voisinage du point A, la courbe $(\mathscr{P})$ peut être assimilée à la droite Δ.

94 **AG3** **2. a)** $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$ et $x_4 = -1$.
b) $f'(x_1) = 1$; $f'(x_2) = 5$; $f'(x_3) = 0$ et $f'(x_4) = 8$.

95 **AG4** **2. a)**

a	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
$f'(a)$	5	50	500	5 000	50 000	500 000

b) Lorsque a se rapproche de 0, $f'(a)$ devient de plus en plus grand.
c) Lorsque l'abscisse se rapproche de 0, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ devient de plus en plus grand. On peut alors considérer que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est « verticale », d'équation $x = 0$. Cette droite n'a pas de coefficient directeur.

96 **AG5** **1.** $f(1) = 1$, donc le point A appartient à $\mathscr{C}$.
2. $m \times 1 + (1 - m) = m + 1 - m = 1$, donc T passe par A.
6. a) Il faut entrer la valeur 2 dans la cellule B1.
b) $f'(1) = 2$.

97 **AG6** **1.** $f(1) = 1$, donc le point A appartient à $\mathscr{C}$.
2. a) $f(h) = h^2$; l'ordonnée de M est h^2.
b) $(AM) : y = mx + p$.
Les coordonnées des points A et M vérifiant l'équation de (AM), on obtient le système :

$\begin{cases} 1 = m + p \\ h^2 = mh + p \end{cases}$ équivalent sucessivement à

$$\begin{cases} 1 = m + p \\ h^2 - 1 = m(h-1) \end{cases} ; \begin{cases} 1 = m + p \\ m = \dfrac{h^2 - 1}{h - 1} \end{cases} ; \begin{cases} 1 = m + p \\ m = h + 1 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} m = h + 1 \\ p = 1 - h - 1 = -h \end{cases}.$$

Ainsi, $(AM) : y = (h + 1)x - h$.
5. b) T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
6. Lorsque h se rapproche de 1, la droite (AM) se rapproche de la droite T.

98 **1.** $f(-1) = -3$, $f(0) = 1$ et $f(3) = 1$.
2. a) Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont 0 et 3.
b) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $-0{,}5$; $0{,}6$ et $2{,}9$.
c) L'équation $f(x) = 4$ n'admet pas de solution.
3. a) f est strictement croissante sur $[-1 ; 0]$ et sur $[2 ; 3]$.
f est strictement décroissante sur $[0 ; 2]$.
b) Tableau de variation de f sur $[-1 ; 3]$:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	-3 ↗	1 ↘	-3 ↗	1

c) f admet un minimum égal à -3, atteint pour $x = -1$ et $x = 2$.
f admet un maximum égal à 1, atteint pour $x = 0$ et $x = 3$.
4. a) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est approximativement $]-0{,}5 ; 0{,}6[\cup]2{,}9 ; 3]$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est approximativement $[-1 ; -0{,}5[\cup]0{,}6 ; 2{,}9[$.
b) Tableau de signe :

x	-1		$-0{,}5$		$0{,}6$		$2{,}9$		3
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

99 **1. a)** $f(3) = -2$.
2. a) On résout l'équation $f(x) = 0$, équivalente à $(x - 2)(x - 5) = 0$, soit $x - 2 = 0$ ou $x - 5 = 0$.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 2 et 5.
3. • $f(x) = 0$ pour $x = 2$ et $x = 5$.
• $f(x) < 0$ pour $x \in]2 ; 5[$.
• $f(x) > 0$ pour $x \in [1 ; 2[\cup]5 ; 6]$.
4. f est strictement décroissante sur $[1 ; 3{,}5]$.
f est strictement croissante sur $[3{,}5 ; 6]$.
f admet un minimum égal à $-2{,}25$, atteint pour $x = 3{,}5$.

100 **1. a)** $f(2) = 2$.
2. a) On résout l'équation $f(x) = 0$, équivalente à $(1 - x)(x - 4) = 0$, soit $1 - x = 0$ ou $x - 4 = 0$.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 1 et 4.
3. • $f(x) = 0$ pour $x = 1$ et $x = 4$.
• $f(x) < 0$ pour $x \in [0 ; 1[\cup]4 ; 5]$.
• $f(x) > 0$ pour $x \in]1 ; 4[$.
4. f est strictement croissante sur $[0 ; 2{,}5]$.
f est strictement décroissante sur $[2{,}5 ; 5]$.
f admet un maximum égal à 2,25, atteint pour $x = 2{,}5$.

101 **1. a)** $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 4$; $f(-1) = 0$; $f(4) = 4$.
b) L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 est 0.
c) L'abscisse du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 5 est -2.
d) L'image de 0 par f est -4.
e) Les antécédents de 4 par f sont $-1{,}5$ et 4.

2. $f'(1) = 0$.

3. $f'\left(\dfrac{5}{2}\right) = 3$.

4. T_2 passe par les points de cordonnées $(0\,;-4)$ et $\left(-\dfrac{5}{4}\,;-1\right)$.

L'équation réduite de T_2 est $y = -\dfrac{12}{5}x - 4$.
$f'(0) = -\dfrac{12}{5}$.

$\boxed{\textbf{102}}$ **1.** $f(-1) = 1$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1$ et $f(2) = 2{,}5$.

2. L'ensemble des solutions est $\{-0{,}5\,;1\}$.
3. $f(x) > 0$: l'ensemble des solutions est $[-1{,}5\,;-0{,}5[\ \cup\ ]1\,;2{,}5]$.
$f(x) < 0$: l'ensemble des solutions est $]-0{,}5\,;1[$.
4. $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$, proposition **c)**.

5. $f'(1) = \dfrac{3}{2}$, proposition **c)**.

6. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 est $-\dfrac{5}{2}$, proposition **d)**.

7. $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1$. La tangente cherchée passe par les points de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\ 1\right)$ et $\left(2\,;\ \dfrac{9}{4}\right)$, son coefficient directeur $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$ est $\dfrac{5}{2}$.

$\boxed{\textbf{103}}$ **1.** L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $-1{,}5$ est 4,5.

$$f(-1{,}5) = \frac{(-1{,}5)^2}{-1{,}5+2} = \frac{2{,}25}{0{,}5} = 4{,}5.$$

2. Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1 sont -1 et 2. On a $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$.
Par le calcul, on résout l'équation $\dfrac{x^2}{x+2} = 1$ successivement équivalente à $x^2 = x + 2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $(x+1)(x-2) = 0$; $x = -1$ ou $x = 2$.

3.

x	-2		0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

4. • Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 : $y = -3x - 2$.
• Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 : $y = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{2}{9}$.

5. $f'(0) = 0$.

$\boxed{\textbf{104}}$ **Partie A**

2.

x	0		400
$f(x)$	69	$\nearrow$	169

3.

x	0	20	50	80	100	150	200	300	400
$f(x)$	69	79	92	105	113	130	144	163	169

Partie B

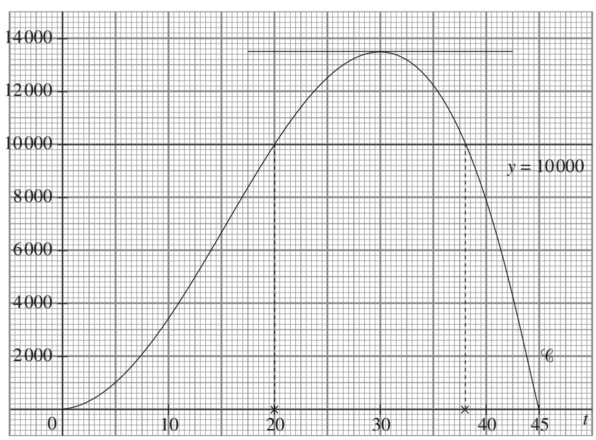
1. a) La fréquence cardiaque du sportif au départ de la course est de 69 battements par minute.
b) À mi-course, sa fréquence cardiaque est de 144 battements par minute.
2. a) La fréquence cardiaque du sportif est égale à 153 battements par minute au bout de 240 mètres de course.
b) $-0{,}000\,625(x-560)(x-240) = -0{,}000\,625x^2 + 0{,}5x - 84$.
On résout l'équation $-0{,}000\,625x^2 + 0{,}5x + 69 = 153$ successivement équivalente à
$-0{,}000\,625x^2 + 0{,}5x - 84 = 0$;
$-0{,}000\,625(x-560)(x-240) = 0$;
$x - 560 = 0$ ou $x - 240 = 0$; $x = 560$ ou $x = 240$.
$560 \notin [0\,;400]$, la seule solution est 240.
3. La fréquence cardiaque est supérieure à 100 battements par minute à partir de 68 mètres parcourus.

$\boxed{\textbf{105}}$ **Partie A**

1.

t	0	10	20	25	30	35	40	45
$f(t)$	0	3 500	10 000	12 500	13 500	12 250	8 000	0

2.



3. Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 30 sont parallèles à l'axe des abscisses.

Partie B

1. La fonction f admet un maximum égal à 13 500, atteint en $t = 30$. On en déduit que le 30e jour après l'apparition des premiers cas, le nombre de malades est maximal et égal à 13 500.

2. Le nombre de personnes malades est supérieur ou égal à 10 000 entre le 20e et le 38e jour.

106 **Partie A**

1. $f(0) = 1$; $f(4) = 2{,}7$ et $f(10) = 1{,}75$.

2.

t	0	4	10
$f(t)$	1 ↗	2,7	↘ 1,75

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geqslant 2$ est l'ensemble des abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés au-dessus de la droite d'équation $y = 2$; les solutions sont les nombres réels de l'intervalle $[1 ; 9]$.

Partie B

1. a) f admet un maximum égal à 2,7, atteint en $t = 4$. On en déduit que la concentration de lactate est maximale au bout de 4 minutes.

b) La concentration maximale est égale à 2,7 mmol $\cdot$ L^{-1}.

2. Au bout de 8 minutes, la concentration de lactate est de 2,25 mmol $\cdot$ L^{-1}.

3. La concentration de lactate atteint à nouveau 2 mmol $\cdot$ L^{-1} au bout de 9 minutes.

4. La concentration de lactate est supérieure ou égale à 2 mmol $\cdot$ L^{-1} entre les instants $t = 1$ min et $t = 9$ min.

107 **Partie A**

1.

t	0	3
$f(t)$	0 ↗	27

2.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(t)$	0	0,1	1	3,4	8	15,6	27

3. Voir courbe ci-après.

Partie B

1. Le nombre de milliers de bactéries à l'instant $t = 0$ est $f(0) + 2$, soit 2 milliers de bactéries.

2. a) Au bout de 2 heures et 15 minutes, il y a 13,4 milliers de bactéries.

b) On atteint 10 milliers de bactéries au bout de 2 heures.

3. a) $f(0{,}25) + 2 = 2$; au bout de 15 minutes, on atteint 2 milliers de bactéries.

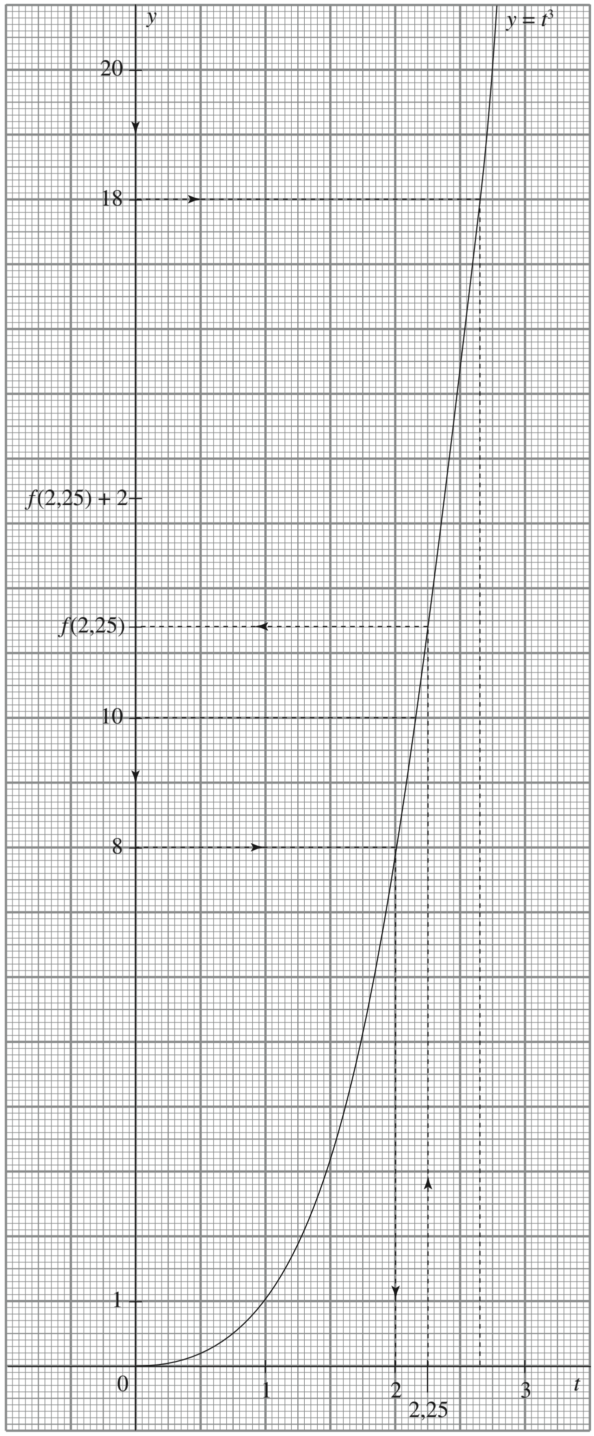
b) $f'(t) = 3t^2$.

$f'(0{,}25) = 0{,}2$; au bout de 15 minutes, la vitesse de prolifération est égale à 200 bactéries par heure.

$f'(2) = 12$; au bout de 2 heures, la vitesse de prolifération est égale à 12 000 bactéries par heure.

4. On atteint 20 milliers de bactéries au bout de 2,62 heures.

Courbe question 3, Partie A.

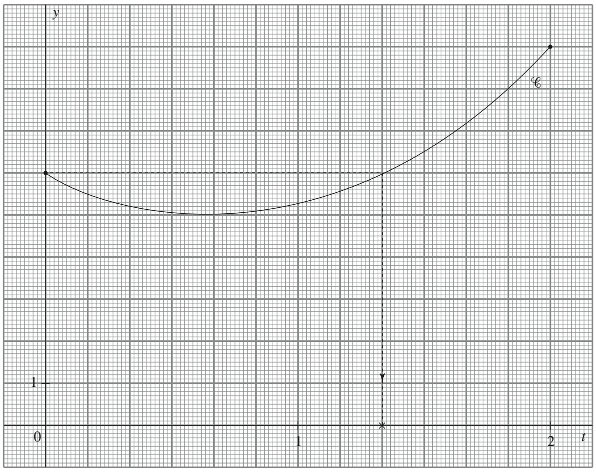


108 **Partie A**

1.

t	0	$\frac{1}{3}$	0,5	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	1,5	$\frac{5}{3}$	2
$f(t)$	6	5,25	5,06	5	5,25	6	6,56	7,25	9

2.



Partie B

1. Le taux d'anticorps à la naissance est égal à 6 g/L.

2. La fonction f de la **partie A** admet un minimum égal à 5, atteint pour $t = \frac{2}{3}$. Ainsi, le taux d'anticorps est minimal pour $t = \frac{2}{3}$ d'année, soit, arrondi au mois le plus proche, au 8^{e} mois.

3. Le nourrisson retrouve le taux d'anticorps de sa naissance au bout de 16 mois.

109 **1.** Au bout de 1 heure et 30 minutes, on note 3,5 mg de principe actif de médicament dans le sang.

2. La quantité de principe actif est maximale au bout de 4 heures.

3. La quantité de principe actif est de 5 mg au bout de 2 heures et au bout de 5 heures.

4. Le médicament est efficace entre 1 heure et 15 minutes et 5 heures et 15 minutes.

110 **1.** Au bout de trois quarts d'heures, la concentration d'insuline est égale à 4,6.

2. La concentration d'insuline est maximale au bout de 1 heure.

3. La concentration d'insuline devient le double de celle injectée au bout de 30 minutes.

4. La concentration d'insuline reste supérieure ou égale à 4 pendant 1 heure et 30 minutes.

111 **Partie A**

1. a) Lorsque la production est nulle, le coût de production est égal à 3 milliers d'euros.

b) Lorsque l'entreprise produit et vend 0,5 tonne de produit, la recette est de 2 milliers d'euros. Elle ne réalise pas de bénéfice, car pour $x = 0{,}5$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{R}$.

2. a) Le bénéfice est nul pour $x = 1$ et $x = 3$.

b) L'entreprise est bénéficiaire lorsque $x \in\ ]1 ; 3[$.

3. Le bénéfice est maximal pour $x = 2$ (valeur de x pour laquelle la distance verticale entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{R}$ est maximale). On a alors un bénéfice égal à 1 millier d'euros.

Partie B

1. $B(x) = 4x - (x^2 + 3) = -x^2 + 4x - 3$.

2. $C(0) = 3$; $R(0{,}5) = 4 \times 0{,}5 = 2$; $B(0{,}5) = -1{,}25$.
On retrouve les résultats de la question **1.** de la **partie A**.

3. a) $(3 - x)(x - 1) = -x^2 + 4x - 3$.

b) • $B(x) = 0$ équivaut à $(3 - x)(x - 1) = 0$, soit $x = 3$ ou $x = 1$.
• $B(x) > 0$ équivaut à $(3 - x)(x - 1) > 0$.

x	0		1		3		3,5
$3 - x$		+		+	0	−	
$x - 1$		−	0	+		+	
$B(x)$		−	0	+	0	−	

Les solutions de l'inéquation $B(x) > 0$ sont les nombres réels de l'intervalle $]1 ; 3[$.

4. On constate, d'après le tableau de variation, que la fonction B admet un maximum égal à 1 en $x = 2$.

112 **1. a)** 8 kg de nougats coûtent 280 euros. Le prix des nougats étant proportionnel à la quantité achetée, 1 kg de nougats coûte 35 euros.

Ainsi $f(x) = 35x$.

b) $g(20) \approx 606{,}67$ arrondi à 0,01 près.
$f(8) + g(20) \approx 886{,}67$, donc 8 kg de nougats et 20 kg de chocolats coûtent 886,67 euros.

c) 16 kg de nougats et 16 kg de chocolats coûtent 1 120 euros.
Par le calcul, $f(16) + g(16) = 1\,120$.

2. a) Le prix moyen d'un kilogramme de chocolats, pour 16 kilogrammes achetés, est égal à $\frac{560}{16}$, soit 35 euros.

b) Le prix moyen d'un kilogramme de chocolats pour une commande de x kilogrammes est égal à $\frac{g(x)}{x}$, soit $\frac{1}{6}\,\frac{(322x - 7x^2)}{x} = \frac{1}{6}(322 - 7x) = \frac{7}{6}(46 - x)$.

d) La courbe $\mathscr{H}$ descend sur l'intervalle [0 ; 20] ; plus on achète de chocolats, plus le prix moyen d'un kilogramme de chocolats baisse.

Tableur sur papier

1. a) On entre 0 dans la cellule A2 et 1 dans la cellule A3 ; on sélectionne ces deux cellules que l'on recopie vers le bas jusqu'à la cellule A26.

b) Dans la cellule B2, on entre la formule $\boxed{\text{=10/(0,9*A2+5)}}$ et dans la cellule C2, on entre la formule $\boxed{\text{=12/(1,3*A2+4)}}$.

En cliquant dans la cellule B19, on obtient la formule $\boxed{\text{=10/(0,9*A19+5)}}$; en cliquant dans la cellule C19, on obtient la formule $\boxed{\text{=12/(1,3*A19+4)}}$.

c) Dans la cellule D2, on entre la formule $\boxed{\text{=B2–C2}}$.

En cliquant dans la cellule D26, on obtient la formule $\boxed{\text{=B26–C26}}$.

2. a) Graphiquement, on lit $t = 17$ heures.

b) Les valeurs numériques des cellules B18 et B19 sont respectivement égales à 0,52 et 0,49, et correspondent respectivement à $t = 16$ et $t = 17$, ce qui confirme la valeur précédente.

c) On résout l'équation $f(t) = 0{,}5$, successivement équivalente à $10 = 0{,}5(0{,}9t + 5)$; $10 = 0{,}45t + 2{,}5$; $t = \frac{7{,}5}{0{,}45}$; $t \approx 16{,}667$ arrondi à 0,001 près.

3. Pour le second malade, graphiquement on lit $t = 9$ heures. Les lignes 11 et 12 du tableau confirment cette valeur.

Algébriquement, on résout l'équation $g(t) = 0{,}75$, successivement équivalente à $12 = 0{,}75(1{,}3t + 4)$; $12 = 0{,}975t + 3$; $t = \frac{9}{0{,}975}$; $t \approx 9{,}231$ arrondi à 0,001 près.

4. a) Graphiquement, on lit $t = 9$ heures.

b) Il s'agit de la ligne 11. Le bouton $\boxed{\begin{smallmatrix}\leftarrow,0\\,00\end{smallmatrix}}$ permet de contrôler ce résultat en ajoutant des décimales au résultat.

c) On résout l'équation $f(t) = g(t)$, successivement équivalente à $10(1{,}3t + 4) = 12(0{,}9t + 5)$;

$13t + 40 = 10{,}8t + 60$; $2{,}2t = 20$; $t = \frac{20}{2{,}2}$;

$t \approx 9{,}09$ arrondi à 0,01 près.

Les quantités de médicament présentes dans le sang des deux malades sont égales au bout de 9,09 heures.

La valeur de t trouvée ci-dessus est la seule solution de l'équation $f(t) = g(t)$.