Chapitre 3. Suites

Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites numériques Les activités doivent combiner les expérimentations graphiques et numériques avec les justifications adéquates. Pour toutes ces questions l'emploi de la calculatrice et du tableur est recommandé. On choisira autant que possible des situations issues des sciences biologiques et de la vie économique et sociale.		
Modes de génération de suites numériques	Prolonger des listes proposées. Construire la représentation graphique des termes d'une suite.	Pour l'ensemble des notions mises en œuvre, on insistera sur la phase de modélisation de situations concrètes, on évitera de multiplier des exemples posés *a priori* et on se gardera de tout excès de technicité. On choisira autant que possible des situations issues des sciences biologiques et de la vie économique et sociale.
Suites arithmétiques Exemples de suites ayant un accroissement constant ; calcul du n-ième terme. Calcul sur tableur des n premiers termes d'une telle suite et la représentation graphique correspondante.	Reconnaître la nature arithmétique d'une suite finie de nombres à partir de sa représentation graphique.	C'est l'occasion de réinvestir les connaissances sur les fonctions affines.
Suites géométriques Exemples de suites ayant un accroissement relatif constant ; calcul du n-ième terme. Calcul sur tableur des n premiers termes d'une telle suite ; représentation graphique correspondante ; comparaison avec le cas d'une croissance linéaire. Intérêts composés.		On utilisera ce résultat dans le cadre de situations rencontrées dans d'autres disciplines. Pour les suites géométriques, on se limite aux suites à termes positifs. On pourra prendre comme exemple de référence l'étude de l'accroissement (ou diminution) d'une population ou l'évolution d'un capital placé à intérêts composés ou toute autre situation issue de la biologie ou de la médecine.

Nos objectifs

Comme il est préconisé dans le programme, nous avons traité ce chapitre en donnant une place importante aux représentations graphiques et à l'utilisation de la calculatrice et du tableur.
De plus, de nombreux exercices se placent dans des situations issues des sciences biologiques.

Activités et applications

1. Suites numériques

Activité

1. 5 ; 5,5 ; 6 ; 6,5 ; …

2. Panneau numéro 1 : 2,5 km ; panneau numéro 2 : 3 km ; panneau numéro 3 : 3,5 km ; panneau numéro n : $(2 + 0{,}5\,n)$ km.

3.

d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	…	d_n
2	2,5	3	3,5	4	…	$2 + 0{,}5\,n$

Application 1

a) $u_0 = 2$; $u_1 = -1$; $u_2 = -4$; $u_3 = -7$; $u_4 = -10$; $u_5 = -13$; $u_{10} = -28$.

b) $u_0 = 2$; $u_1 = 6$; $u_2 = 18$; $u_3 = 54$; $u_4 = 162$; $u_5 = 486$; $u_{10} = 118\,098$.

c) $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$; $u_4 = 1$; $u_5 = -1$; $u_{10} = 1$.

d) $u_0 = 0$; $u_1 = \dfrac{1}{3}$; $u_2 = \dfrac{2}{4}$; $u_3 = \dfrac{3}{5}$; $u_4 = \dfrac{4}{6}$; $u_5 = \dfrac{5}{7}$; $u_{10} = \dfrac{10}{12}$.

Application 2

1. a) $v_1 = -4$; $v_2 = -3$; $v_3 = -2$; $v_4 = -1$; $v_5 = 0$.

b) $v_1 = 2$; $v_2 = 4$; $v_3 = 8$; $v_4 = 16$; $v_5 = 32$.

c) $v_1 = 4$; $v_2 = 16$; $v_3 = 256$; $v_4 = 65\,536$; $v_5 = 4\,294\,967\,296$.

2. a) $v_2 = 5$; $v_3 = 0$; $v_4 = -5$; $v_5 = -10$.

b) $v_2 = 9$; $v_3 = 27$; $v_4 = 81$; $v_5 = 243$.

2. Suites arithmétiques

Activité

1. Nombre d'élèves en 2001 : 190 ; nombre d'élèves en 2002 : 205 ; nombre d'élèves en 2003 : 220.

2. a)

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
175	190	205	220	235	250	265	280

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[+15]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[+15]{} \boxed{u_2} \xrightarrow[+15]{} \boxed{u_3} \xrightarrow[+15]{} \boxed{u_4} \xrightarrow[+15]{} \boxed{u_5} \xrightarrow[+15]{} \boxed{u_6} \xrightarrow[+15]{} \boxed{u_7}$$

b)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	175	190	205	220	235	250	265	280
$u_0 + n \times 15$	175	190	205	220	235	250	265	280

Pour les valeurs de n : 0 ; 1 ; 2 ; … ; 7, on constate que $u_n = u_0 + n \times 15$.

Application 1

1. $w_6 = 10$.

2. $u_{100} = 349$.

3. $v_{100} = -438{,}5$.

Application 2

1. En 2005 : 3 450 habitants ; en 2006 : 3 700 habitants.

2. $p_{n+1} - p_n = 250$, donc la suite (p_n) est arithmétique, de raison 250.

3. Suites géométriques

Activité

1. Au bout d'une heure : 200 000 ; au bout de deux heures : 400 000.

2. a)

u_0	u_1	u_2	u_3
100 000	200 000	400 000	800 000

u_4	u_5	u_6	u_7
1 600 000	3 200 000	6 400 000	12 800 000

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[\times 2]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[\times 2]{} \boxed{u_2} \xrightarrow[\times 2]{} \boxed{u_3} \xrightarrow[\times 2]{} \boxed{u_4} \xrightarrow[\times 2]{} \boxed{u_5} \xrightarrow[\times 2]{} \boxed{u_6} \xrightarrow[\times 2]{} \boxed{u_7}$$

b)

n	0	1	2
u_n	100 000	200 000	400 000
$2^n \times u_0$	100 000	200 000	400 000

n	3	4	5
u_n	800 000	1 600 000	3 200 000
$2^n \times u_0$	800 000	1 600 000	3 200 000

n	6	7
u_n	6 400 000	12 800 000
$2^n \times u_0$	6 400 000	12 800 000

Pour les valeurs de n : 0 ; 1 ; 2 ; … ; 7, on constate que $u_n = 2^n \times u_0$.

Application 1

1. $w_{10} = 72$.

2. $v_{10} = 97\,656{,}25$.

3. $u_{10} = 393{,}66$.

Application 2

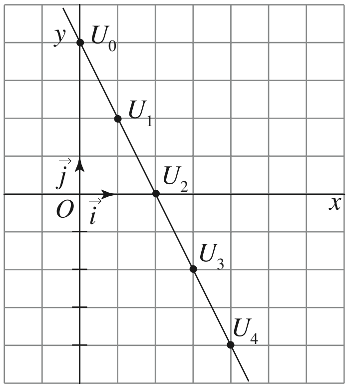
1. En 2005 : 28 500 habitants ; en 2006 : 27 075 habitants.

2. $p_{n+1} = 0{,}95\,p_n$, donc la suite (p_n) est géométrique, de raison 0,95.

4. Représentation graphique d'une suite

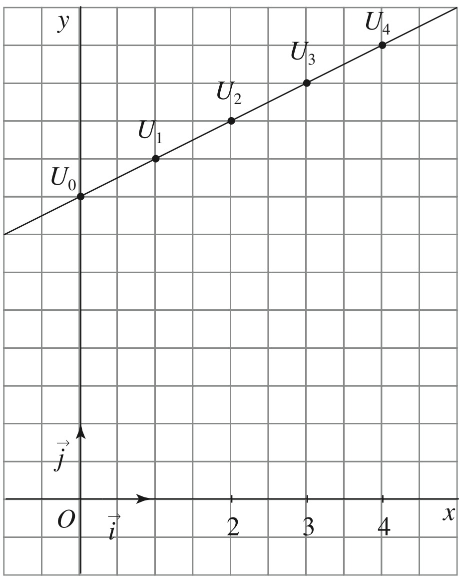
Activité

1. $u_1 = 2$; $u_2 = 0$; $u_3 = -2$; $u_4 = -4$.



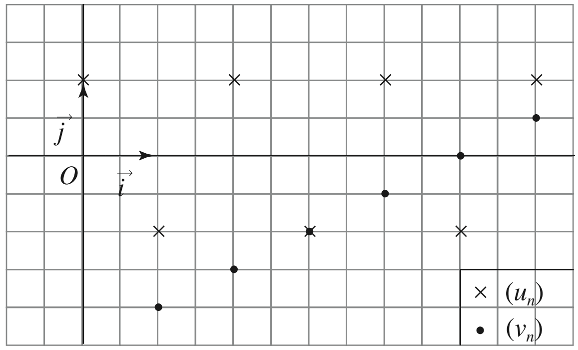
Les points U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 sont alignés.
On constate que $-2 = -2 \times 3 + 4$, donc U_3 appartient à la droite d'équation $y = -2x + 4$.
La suite (u_n) est arithmétique, de raison $a = -2$ et de terme initial $u_0 = 4$:
pour tout n, $u_n = 4 - 2n = -2 \times n + 4$, donc U_n appartient à la droite d'équation $y = -2x + 4$.
La droite « descend », car $a < 0$.

2. $u_1 = 4{,}5$; $u_2 = 5$; $u_3 = 5{,}5$; $u_4 = 6$.



Les points U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 sont alignés. On constate que $5{,}5 = 0{,}5 \times 3 + 4$, donc U_3 appartient à la droite d'équation $y = 0{,}5x + 4$. La suite (u_n) est arithmétique, de raison $a = 0{,}5$ et de terme initial $u_0 = 4$: pour tout n, $u_n = 4 + 0{,}5n = 0{,}5 \times n + 4$, donc U_n appartient à la droite d'équation $y = 0{,}5x + 4$.
La droite « monte », car $a > 0$.

Application 1



Application 2

La première liste est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points sont situés sur une droite.
La deuxième liste n'est pas constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points ne sont pas situés sur une droite.

Exercices d'entraînement

C *indique que l'exercice est corrigé dans le livre élève.*

1 **C**

2 **1.** 1 ; –2 ; –5 ; – 8 ; – 11 ; – 14 ; – 17 ; –20 ; –23.
2. 6 875 ; 1 375 ; 275 ; 55 ; 11 ; 2,2 ; 0,44 ; 0,088 ; 0,017 6.
3. 1 ; 3 ; 3 ; 9 ; 9 ; 27 ; 27 ; 81 ; 81 ; 243.

3 **1.** 96 ; 24 ; 6 ; 1,5 ; 0,375 ; 0,093 75 ; 0,023 437 5.
2. 1,6 ; 2 ; 2,4 ; 2,8 ; 3,2 ; 3,6.
3. – 1 ; –0,5 ; –2 ; – 1 ; –4 ; –2 ; –8 ; –4.

4 **C**

5 **C**

6 $v_0 = 0$; $v_1 = 2$; $v_2 = 6$; $v_{25} = 650$.

7 $w_0 = 0$; $w_1 = -1$; $w_2 = 2$; $w_{11} = -11$.

8 $t_1 = -1$; $t_2 = 0$; $t_3 = \frac{1}{3}$.

9 **C**

10 $v_1 = 3$; $v_2 = -1$; $v_3 = 3$; $v_4 = -1$; $v_5 = 3$.

11 $w_2 = \frac{1}{2}$; $w_3 = 2$; $w_4 = \frac{1}{2}$; $w_5 = 2$.

12 $t_2 = 81$; $t_3 = 9$; $t_4 = 3$; $t_5 = \sqrt{3}$.

13 $u_1 = 1$; $u_2 = 2{,}5$; $u_3 = 3{,}25$; $u_4 = 3{,}625$.

14 **1.** Faux. **2.** Vrai. **3.** Vrai.

15 C

16 $w_5 = 7$; $w_6 = -1$.

17 $u_5 = 16$.

18 $v_8 = 1$.

19 $a = 13$.

20 $a = -4$.

21 C

22 $v_7 = -35$; $v_{10} = -50$.

23 $w_4 = 11{,}9$; $w_{19} = 17{,}15$.

24 $a = 2$.

25 $a = 0{,}4$.

26 $v_0 = -8$.

27 $w_0 = 48$.

28 C

29 $w_4 = 1{,}25$; $w_{12} = 3{,}25$.

30 $v_{10} = -12$; $v_{15} = -22$.

31 $a = -2{,}5$.

32 $a = 20$.

33 $v_1 = -15$.

34 $w_1 = 42$.

35 C

36 Chaque mois de régime, Martin perd 2 kg, donc la suite (v_n) est arithmétique, de raison -2 et de terme initial $v_0 = 100$.

37 Chaque année, Maxime participe à 5 dons, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison 5 et de terme initial $u_1 = 5$.

38 Le nombre d'auditeurs augmente régulièrement de 10 000 par an, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison 10 000 et de terme initial $u_0 = 2\,000\,000$.

39 Après une location d'une heure, le tarif augmente de 1 € chaque heure suivante, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison 1 et de terme initial $u_1 = 0{,}5$.

40 Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 1{,}5$, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 1,5.

41 **1.** Vrai. **2.** Faux. **3.** Vrai.

42 C

43 $w_6 = 45$; $w_7 = 135$.

44 $v_{10} = 12{,}6$; $v_{11} = 13{,}23$.

45 $u_5 = 7$.

46 $v_8 = \frac{2}{5}$.

47 $b = 4$.

48 $b = \frac{13}{7}$.

49 C

50 $v_6 = 2\,048$; $v_7 = 8\,192$.

51 $w_4 \approx 0{,}43$.

52 $v_0 = 2$.

53 $w_0 = 1$.

54 $u_0 \approx 0{,}17$.

55 C

56 $w_4 = 343$; $w_7 = 117\,649$.

57 $v_4 = 70$; $v_8 = 700\,000$.

58 $v_1 = 2\,000$.

59 $w_1 = 3$.

60 $u_1 \approx 0{,}012\,7$.

61 C

62 **1.** La valeur « remboursable », un an après l'achat, est de 637,50 €.
La valeur « remboursable », deux ans après l'achat, est de 541,88 €.
2. $v_{n+1} = 0{,}85v_n$, donc la suite est géométrique, de raison 0,85 et de terme initial $v_0 = 750$.

63 $u_{n+1} = 1{,}05u_n$, donc la suite est géométrique, de raison 1,05 et de terme initial $u_1 = 1\,500$.

64 $s_{n+1} = 1{,}02s_n$, donc la suite est géométrique, de raison 1,02 et de terme initial $s_1 = 15\,000$.

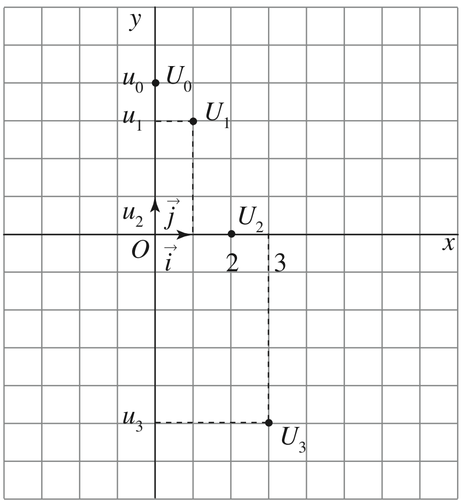
65 $u_{n+1} = 0{,}9u_n$, donc la suite est géométrique, de raison 0,9 et de terme initial $u_1 = 7$.

66 $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{4}$.

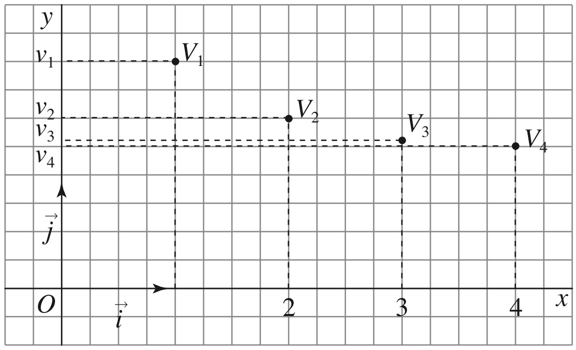
67 $w_{n+1} = \dfrac{1}{3}w_n$, donc la suite (w_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{3}$.

68 C

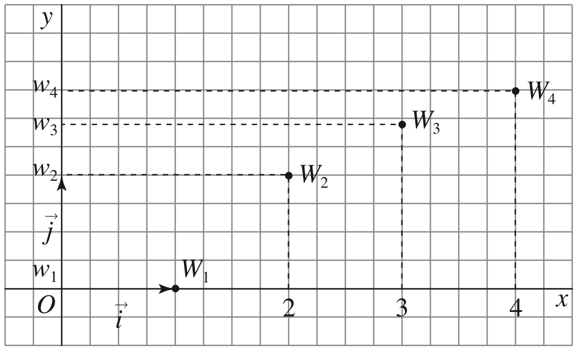
69



70

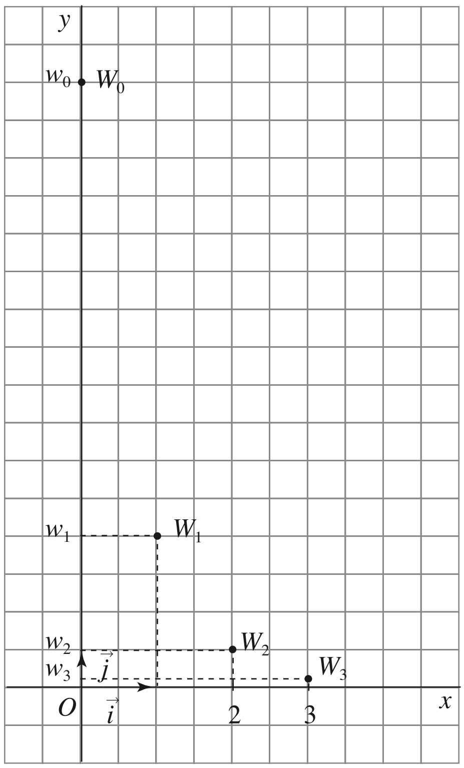


71

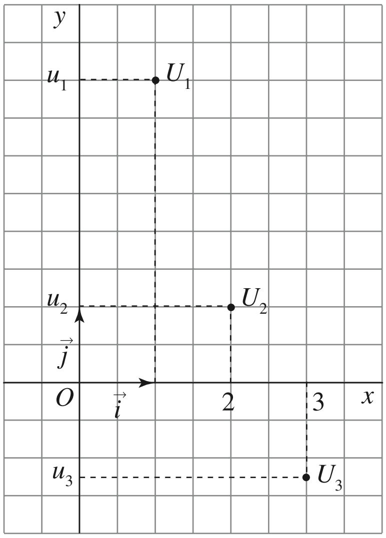


72 C

73

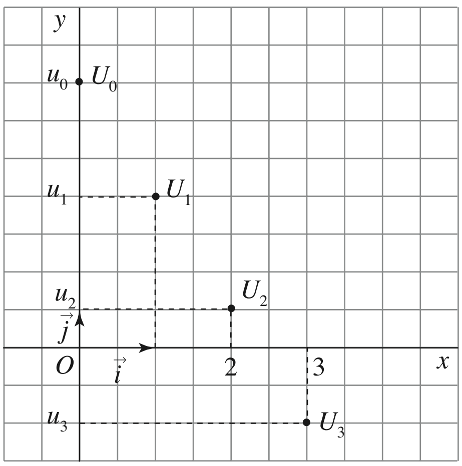


74

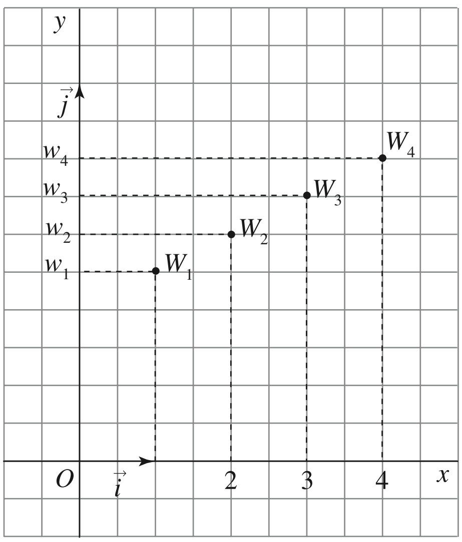


75 **C**

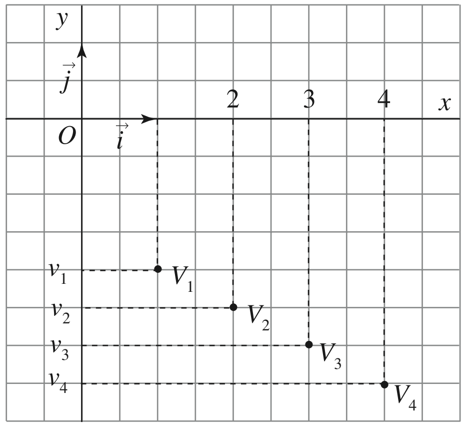
76



77



78



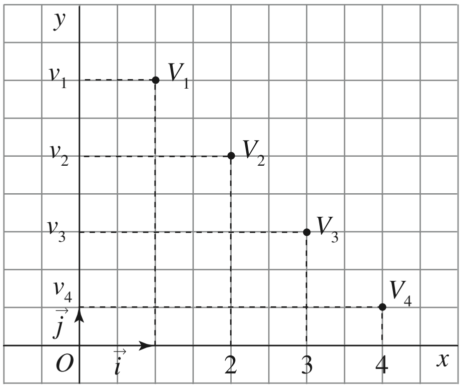
79 **1.** La première liste est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points sont situés sur une droite. La raison de cette suite est 0,5.
2. La deuxième liste n'est pas constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points ne sont pas situés sur une droite.

80 **1.** La première liste n'est pas constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points ne sont pas situés sur une droite.
2. La deuxième liste est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points sont situés sur une droite. La raison de cette suite est 3.

81 **1.** La première liste n'est pas constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points ne sont pas situés sur une droite.
2. La deuxième liste est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points sont situés sur une droite. La raison de cette suite est – 0,2.

82 **1.** La première liste n'est pas constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points ne sont pas situés sur une droite.
2. La deuxième liste est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique, car les points sont situés sur une droite. La raison de cette suite est 2.

83 **1.**



2. On peut envisager que la suite soit arithmétique, car les points sont situés sur une droite.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = v_n - 2$, donc la suite est arithmétique de raison – 2.

Je fais le point

Savez-vous prolonger de façon logique une liste de nombres ?

Énoncé 1

1. On enlève 4 au nombre précédent, donc :
– 14 ; – 18 ; – 22.
2. On divise le nombre précédent par 5, donc :
$1 ; \frac{1}{5} = 0{,}2 ; \frac{1}{25} = 0{,}04.$
3. Alternativement, on ajoute 3 et on soustrait 1, donc :
5 – 1 = 4 ; 4 + 3 = 7 ; 7 – 1 = 6.

Énoncé 2

1. On ajoute 1 au premier nombre, 2 au deuxième, 4 au troisième, 8 au quatrième, 16 au cinquième, donc : 65 ; 129 ; 257.
2. On divise le nombre précédent par – 10, donc :
– 0,000 1 ; 0,000 01 ; – 0,000 001.
3. On ajoute 0,8 au nombre précédent, donc :
– 4,8 ; – 4 ; – 3,2.

Savez-vous calculer un terme d'une suite définie par son terme de rang *n* ?

Énoncé 1

$u_0 = \sqrt{0} = 0$; $u_1 = \sqrt{1} = 1$; $u_4 = \sqrt{4} = 2$;
$u_{10} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Énoncé 2

$v_0 = 1$; $v_1 = 2$; $v_2 = (1 + 2)^2 = 9$; $v_3 = (1 + 3)^3 = 64$.

Savez-vous calculer un terme d'une suite définie par récurrence ?

Énoncé 1

$u_1 = -1{,}2u_0 - 1 = -1{,}2 \times 2 - 1 = -3{,}4$.
$u_2 = -1{,}2u_1 - 1 = -1{,}2 \times (-3{,}4) - 1 = 3{,}08$.
$u_3 = -1{,}2u_2 - 1 = -1{,}2 \times 3{,}08 - 1 = -4{,}696$.

Énoncé 2

$v_2 = (0 + 1)^2 = 1$; $v_3 = (1 + 1)^2 = 4$; $v_4 = (4 + 1)^2 = 25$.

Savez-vous calculer un terme d'une suite arithmétique ?

Énoncé 1

1. $u_5 = u_4 + a = 1{,}5 - 0{,}8 = 0{,}7$.
2. $u_{10} = u_0 + 10a = 20 + 10 \times 2{,}2 = 42$.
3. $u_{50} = u_1 + 49a = -1 + 49 \times 40 = 1\,959$.

Énoncé 2

1. $v_9 = 7$.
2. $w_{50} = -56$.
3. $v_{19} = 0$.

Savez-vous montrer qu'une suite est arithmétique ?

Énoncé 1

1. La quantité importée en février est :
1 000 – 20 = 980 tonnes.
Celle en mars est 980 – 20 = 960 tonnes.
2. $q_{n+1} - q_n = -20$, donc la suite (q_n) est arithmétique, de raison –20 et de terme initial $q_1 = 1\,000$.

Énoncé 2

$v_{n+1} = v_n + 60$, donc la suite (v_n) est arithmétique, de raison 60 et de terme initial $v_0 = 1\,000$.

Savez-vous calculer un terme d'une suite géométrique ?

Énoncé 1

1. $u_{17} = bu_{16} = 11 \times 4{,}2 = 46{,}2$.
2. $u_{10} = b^{10}u_0 = 4^{10} \times 0{,}075 = 78\,643{,}2$.
3. $u_5 = b^4u_1 = 2^4 \times 1{,}5 = 24$.

Énoncé 2

1. $w_{10} = 104$.
2. $v_5 = 0{,}008$.
3. $w_4 = 2\,109{,}375$.

Savez-vous montrer qu'une suite est géométrique ?

Énoncé 1

1. La quantité importée en février est :
1 000 (1 + 10 %) = 1 000 × 1,1 = 1 100 tonnes.
Celle en mars est 1 100 × 1,1 = 1 210 tonnes.
2. $q_{n+1} = q_n \times 1{,}1$, donc la suite (q_n) est géométrique, de raison 1,1 et de terme initial $q_1 = 1\,000$.

Énoncé 2

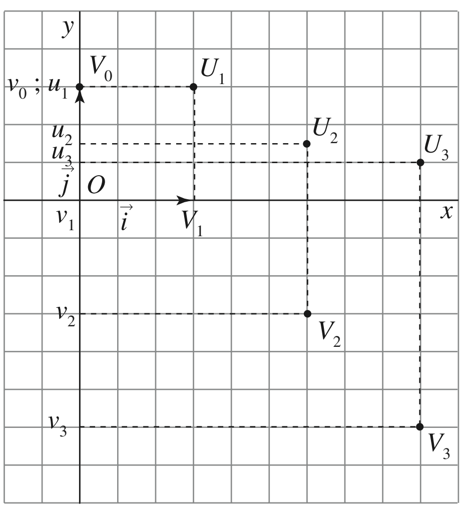
$u_{n+1} = 0{,}99u_n$: la suite (u_n) est géométrique, de raison 0,99 et de terme initial $u_0 = 8$.

Savez-vous réaliser une représentation graphique d'une suite ?

Énoncé 1

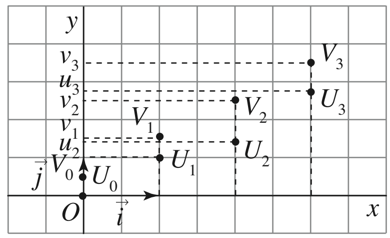
Pour la suite (u_n), dans un système d'axes, on place successivement le point $U_1(1 ; u_1)$, c'est-à-dire $U_1(1 ; 1)$, le point $U_2(2 ; u_2)$, c'est-à-dire $U_2\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$, le point $U_3(3 ; u_3)$, c'est-à-dire $U_3\left(3 ; \frac{1}{3}\right)$, …

Pour la suite (v_n), dans le même système d'axes, on place successivement
le point $V_0(0 ; v_0)$, c'est-à-dire $V_0(0 ; 1)$,
le point $V_1(1 ; v_1)$, c'est-à-dire $V_1(1 ; 0)$ car
$$v_1 = v_0 - 1 = 1 - 1 = 0,$$
le point $V_2(2 ; v_2)$, c'est-à-dire $V_2(2 ; -1)$ car
$$v_2 = v_1 - 1 = 0 - 1 = -1,$$
le point $V_3(3 ; v_3)$, c'est-à-dire $V_3(3 ; -2)$ car
$$v_3 = v_2 - 1 = -1 - 1 = -2, \dots$$



Énoncé 2

Pour la suite (u_n), dans un système d'axes, on place successivement le point $U_0(0 ; u_0)$, c'est-à-dire $U_0(0 ; 0)$, le point $U_1(1 ; u_1)$, c'est-à-dire $U_1(1 ; 1)$, le point $U_2(2 ; u_2)$, c'est-à-dire $U_2(2 ; \sqrt{2})$, …
Pour la suite (v_n), dans le système d'axes, on place successivement le point $V_0(0 ; v_0)$, c'est-à-dire, c'est-à-dire $V_0(0 ; 0{,}5)$, le point $V_1(1 ; v_1)$, c'est-à-dire $V_1(1 ; 1{,}5)$ car $v_1 = v_0 + 0{,}5 = 1{,}5$, le point $V_2(2 ; v_2)$, c'est-à-dire $V_2(2 ; 2{,}5)$ car $v_2 = v_1 + 1 = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$, le point $V_3(3 ; v_3)$, c'est-à-dire $V_3(3 ; 3{,}5)$ car
$v_3 = v_2 + 1 = 2{,}5 + 1 = 3{,}5$, …



Savez-vous reconnaître à partir d'une représentation graphique si une liste de nombres est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique ?

Énoncé 1

1. Les points qui représentent la première liste ne sont pas situés sur une droite, donc cette liste n'est pas constituée de termes successifs d'une suite arithmétique.
2. Les points qui représentent la deuxième liste sont situés sur une droite, donc cette liste est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique.

Énoncé 2

1. Les points qui représentent la première liste sont situés sur une droite, donc cette liste est constituée de termes successifs d'une suite arithmétique.
2. Les points qui représentent la deuxième liste ne sont pas situés sur une droite, donc cette liste n'est pas constituée de termes successifs d'une suite arithmétique.

Activités guidées

$\boxed{84}$ $\boxed{\text{AG}_1}$ **1. a)** La suite est arithmétique, donc $u_n = u_0 + na = 5 + 2n$.

b) $u_1 = 7$; $u_2 = 9$; $u_3 = 11$, …
d) $u_{200} = 405$.
2. a) La suite est arithmétique, donc
$u_n = u_1 + (n - 1)\,a = 7 + (n - 1) \times (-2) = 9 - 2n$.
b) $u_2 = 5$; $u_3 = 3$; $u_4 = 1$, …
d) $u_{200} = -391$.

85 **AG2** **1. a)** La suite est géométrique, donc $u_n = b^n u_0 = 0{,}5^n \times 200$.
b) $u_1 = 100$; $u_2 = 50$; $u_3 = 25$, …
d) $u_{40} \approx 1{,}8 \times 10^{-10}$.
2. a) La suite est géométrique, donc
$u_n = b^{n-1} u_1 = 2^{n-1} \times 3$.
b) $u_2 = 6$; $u_3 = 12$; $u_4 = 24$, …
d) $u_{40} \approx 1{,}6 \times 10^{12}$.

86 **AG3** **1.** Sur la courbe de croissance des semaines 11 à 24, les points sont pratiquement alignés, ce qui caractérise une croissance linéaire. Les valeurs successives de ce diamètre sont donc des termes successifs d'une suite arithmétique.
La raison de cette suite est environ 3,5.
2. Sur la courbe de croissance des semaines 4 à 10, le point d'abscisse 9 a pour ordonnée environ 41. La longueur de ce fœtus à 9 semaines est environ 4,1 cm.
3. a) La colonne D donne les coefficients multiplicateurs entre les tailles de deux semaines consécutives. Ces coefficients étant pratiquement égaux, on peut dire que la croissance est exponentielle.
b) Le pourcentage d'augmentation de la taille de l'embryon en une semaine est 42 %.
4. a) v_{20} représenterait la taille du fœtus en mm à la 20e semaine de grossesse.
b) $v_4 = 1{,}42^4 v_0$, donc $v_0 = v_4 \times 1{,}42^{-4}$
et $v_{20} = 1{,}42^{20} v_0$.
D'où $v_{20} = 1{,}42^{20} \times 1{,}42^{-4} v_0 = 1{,}42^{16} \times 7 \approx 1\,913$ à 1 mm près.
c) Cela signifierait qu'à 20 semaines de grossesse, le fœtus mesurerait 1 913 mm, soit 1,913 m !
Cette modélisation est valable pour les semaines 4 à 10, mais n'est plus valable au-delà de la 11e semaine.

87 **AG4** **1.** Capital acquis au bout d'un an :
$1\,000\,(1 + 10\,\%) = 11\,000$ €.
$I = 1\,000 \times 10\,\% = 100$ €.
2. a) $C_1 = C_0 + I = 1\,000 + 100 = 1\,100$;
$C_2 = C_1 + I = 1\,100 + 100 = 1\,200$.
b) $C_{n+1} = C_n + 100$, donc la suite (C_n) est arithmétique, de raison 100. Son terme initial est $C_0 = 1\,000$.
c) $C_n = C_0 + na = 1\,000 + 100n$.
d) Le capital, en euros, acquis au bout de 10 ans est $C_{10} = 1\,000 + 100 \times 10 = 2\,000$.
3. a) Dans la cellule B5, on a entré la formule :

```
=$B$4+A5*100
```

88 **AG5**
1. a) $K_1 = K_0\,(1 + 10\,\%) = 1\,000 \times 1{,}1 = 1\,100$.
$K_2 = K_1\,(1 + 10\,\%) = 1\,100 \times 1{,}1 = 1\,210$.
b) $K_{n+1} = K_n\,(1 + 10\,\%) = 1{,}1\,K_n$, donc la suite (K_n) est géométrique, de raison 1,1.
Son terme initial est $K_0 = 1\,000$.
c) $K_n = 1{,}1^n \times 1\,000$.
d) Le capital, en euros, acquis au bout de 10 ans est $K_{10} = 1{,}1^{10} \times 1\,000 \approx 2\,593{,}74$.
2. a) Dans la cellule B5, on a entré la formule :

```
=$B$4*1,1^A5
```

89 **AG6** **1.** À la fin du 2e jour il y a 5 insectes, donc à la fin du 3e jour il y a $(5 - 1) + 5 = 9$ insectes. À la fin du 4e jour il y a $(9 - 1) + 9 = 17$ insectes et à la fin du 5e jour il y a $(17 - 1) + 17 = 33$ insectes.
2. $u_{n+1} = (u_n - 1) + u_n = 2u_n - 1$.
3. Sur tableur, on peut procéder en utilisant les pages outils tableur.
Le nombre d'insectes à la fin du 30e jour est :
$u_{30} = 2^{30} + 1 = 1\,073\,741\,825$.
À la fin du 60e jour, il y a $u_{60} = 2^{60} + 1 \approx 1{,}15 \times 10^{18}$ insectes.

Problèmes

90 **1.** On voit que le terme initial est $u_0 = 1{,}5$ et que $u_1 = 4$; sa raison est donc $u_1 - u_0 = 2{,}5$.
2. $u_n = 1{,}5 + 2{,}5n$.
3. On résout l'équation $1{,}5 + 2{,}5n = 44$;
soit $2{,}5n = 42{,}5$, d'où $n = 17$.
Le terme de la suite égal à 44 est u_{17}.

91 **1.** On voit que le terme initial est $u_1 = 7$ et que $u_2 = 4$; sa raison est donc $u_2 - u_1 = -3$.
2. $u_n = 7 - 3 \times (n - 1) = 10 - 3n$.
3. On résout l'équation $10 - 3n = -80$;
soit $-3n = -90$, d'où $n = 30$.
Le terme de la suite égal à – 80 est u_{30}.

92 **1. c)**. **2. c)**. **3. a)**.

93 **1.** $u_n = 4 + 7n$.

2. $u_n = 200$ équivaut à $n = 28$; ainsi, $u_{28} = 200$.
3. $u_n = 300$ équivaut à $n = \frac{296}{7}$; $\frac{296}{7} \notin \mathbb{N}$, donc il n'existe pas de terme de la suite égal à 300.

94 **1.** $v_n = 120 - 5(n - 1) = 125 - 5n$.
2. $v_n = 0$ équivaut à $n = 25$; ainsi, $v_{25} = 0$.

95 $u_4 = u_0 + 4a$ et $u_4 = 5$, donc $u_0 + 4a = 5$.
$u_8 = u_0 + 8a$ et $u_8 = -1$, donc $u_0 + 8a = -1$.
On résout le système $\begin{cases} u_0 + 4a - 5 \\ u_0 + 8a - 1 \end{cases}$;
on obtient $a = -\frac{3}{2}$ et $u_0 = 11$.

96 **1.** Le montant de l'intérêt annuel est :
$2\,000 \times 3\,\% = 60$ €.
$C_1 = 2\,000 + 60 = 2\,060$; $C_2 = 2\,060 + 60 = 2\,120$.
2. $C_{n+1} = C_n + 60$: la suite est arithmétique de raison 60 et de terme initial $C_0 = 2\,000$.
3. a) $C_n = 2\,000 + 60n$.
b) $C_{10} = 2\,600$.
c) $C_n \geqslant 4\,000$ équivaut à $n \geqslant \frac{2\,000}{60}$. Or $\frac{2\,000}{60} \approx 33{,}3$; c'est donc au bout de 34 ans que le capital sera supérieur ou égal au double de C_0.

97 **1.** Le client devra payer $10 + 20 \times 0{,}08$, soit 11,60 €.
2. a) Chaque minute supplémentaire au-delà des 10 heures est facturée 0,08 €, donc la suite (t_n) est arithmétique, de raison 0,08 et de terme initial $t_0 = 10$.
b) $t_n = 10 + 0{,}08n$.
c) $t_{20} = 10 + 0{,}08 \times 20 = 11{,}6$. On retrouve le résultat du **1**.

98 **1.** $u_{n+1} = u_n + 10$; la suite est arithmétique, de raison 10 et de terme initial $u_0 = 200$.
2. $u_5 = 250$.
3. Le pourcentage d'évolution de u_0 à u_5 est :
$\frac{250}{200} - 1 = 25\,\%$.

99 **1.** $d_{n+1} = d_n + 0{,}4$; la suite est arithmétique, de raison 0,4.
2. a) $d_n = 1{,}2 + 0{,}4n$.
La distance parcourue le 31 mars est :
$d_{31} = 1{,}2 + 0{,}4 \times 31 = 13{,}6$ (en km).
La distance parcourue le 1er avril est :
$d_{32} = d_{31} + 0{,}4 = 14$ (en km).
b) $d_n \geqslant 42{,}195$ équivaut à $n \geqslant \frac{40{,}995}{0{,}4}$.
Or $\frac{40{,}995}{0{,}4} \approx 102{,}5$; Alan dépassera donc la distance le 103e jour, ce qui correspond au 11 juin.

100 **1.** En 2001, la ville U avait $8\,000 - 500 = 7\,500$ habitants et la ville V avait $3\,750 + 600 = 4\,350$ habitants.
2. $u_{n+1} = u_n - 500$, donc (u_n) est une suite arithmétique ; $u_n = 8\,000 - 500n$.
$v_{n+1} = v_n + 600$, donc (v_n) est une suite arithmétique ; $v_n = 3\,750 + 600n$.
3. $u_n \leqslant v_n$ équivaut à $n \geqslant \frac{4\,250}{1\,100}$; or $\frac{4\,250}{1\,100} \approx 3{,}9$.
C'est donc en 2004 que le nombre d'habitants de U est devenu inférieur à celui de V.

101 **1.** On lit : $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$, donc $b = \frac{u_2}{u_1} = 3$.
2. $u_n = \frac{1}{3} \times 3^n = 3^{n-1}$.
3. Le premier terme qui est supérieur à 6 500 est u_9 :
$u_8 = 2\,187$ et $u_9 = 6\,561$.

102 **1.** On lit : $u_1 = 16$ et $u_2 = 4$, donc $b = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{4}$.
2. $u_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4^2 \times \frac{1}{4^{n-1}} = 4^{3-n}$.
3. Le premier terme qui est inférieur à 10^{-4} est u_{10} :
$u_9 \approx 0{,}000\,24$ et $u_{10} \approx 0{,}000\,061$.

103 **1.** Les effectifs du collège augmentent de 2,6 % par an, donc ils sont multipliés par 1,026. La suite (U_n) est donc géométrique, de raison 1,026 et de terme initial $U_0 = 750$.
On a $U_n = 750 \times 1{,}026^n$.
2. $U_{11} \approx 995$, $U_{12} \approx 1\,021$.
Le nouveau collège devra être construit pour l'année 2014.

104 **1.** $v_{n+1} = (1 + 2{,}5\,\%)\, v_n = 1{,}025 v_n$; (v_n) est la suite géométrique de raison 1,025 et de terme initial $v_0 = 4\,000$.
2. $v_n = 1{,}025^n \times 4\,000$.
3. Loyer payé en 2006 :
$v_{26} = 1{,}025^{26} \times 4\,000 \approx 7\,601{,}17$ (en euros).

105 **1.** $C_1 = 5\,000 \times 1{,}04 = 5\,200$;
$C_2 = 5\,200 \times 1{,}04 = 5\,408$.
2. $C_{n+1} = 1{,}04 C_n$; la suite (C_n) est géométrique, de raison 1,04 et de terme initial $C_0 = 5\,000$.

3. a) $C_n = 1{,}04^n \times 5\,000$.
b) $C_{10} = 1{,}04^{10} \times 5\,000 \approx 7\,401{,}22$.
c) Le capital sera supérieur ou égal à $2C_0$ pour $1{,}04^n \geqslant 2$. La plus petite valeur de n pour laquelle $1{,}04^n \geqslant 2$ est 18 (voir AG_2 ou pages outils tableur).

106 **1.** Le coefficient multiplicatif est :
$\dfrac{896\,560}{800\,500} = 1{,}12$.
Il correspond à un pourcentage d'augmentation de 12 %.
2. La suite (U_n) est géométrique, de raison 1,12 et de terme initial $U_0 = 800\,500$.
3. $U_n = 1{,}12^n \times 800\,500$.
Le nombre de connexions prévues en 2009 est
$U_3 = 1{,}12^3 \times 800\,500 \approx 1\,124\,645$.
4. Voir AG_2 et pages outils tableur.

107 **1.** Prix la première semaine :
$2\,000 \times 0{,}9 = 180$ euros.
Prix la deuxième semaine : $180 \times 0{,}9 = 162$ euros.
2. $s_{n+1} = 0{,}9 s_n$; la suite (s_n) est géométrique, de raison 0,9.
3. a) Prix la huitième semaine :
$s_8 = 0{,}9^8 \times 200 \approx 86{,}09$ (en euros).
b) $s_n \leqslant 100$ équivaut à $0{,}9^n \leqslant 0{,}5$. La plus petite valeur de n pour laquelle $0{,}9^n \leqslant 0{,}5$ est 7 (voir AG_2 ou pages outils tableur). La personne devra effectuer l'achat la 7e semaine.

108 **1.** $a_{n+1} = 1{,}1a_n$ et $b_{n+1} = 1{,}05b_n$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques de raisons 1,1 et 1,05.
2. Au bout de 10 jours, il y a
$a_{10} = 1{,}1^{10} \times 1\,000 \approx 2\,594$ cellules A et
$b_{10} = 1{,}05^{10} \times 1\,000 \approx 1\,629$ cellules B.
3. $a_n \geqslant 2b_n$ équivaut à $1{,}1^n - 2 \times 1{,}05^n \geqslant 0$; c'est au bout de 15 jours que le nombre de cellules A devient supérieur au double du nombre de cellules B (voir AG_2 ou pages outils tableur).

109 **1.** La raison de cette suite est :
$a = 5\,000\,000 - 1\,000\,000 = 4\,000\,000$.
Au bout de 10 heures, il y aura
$1\,000\,000 + 10 \times 4\,000\,000 = 41\,000\,000$,
soit 41 000 000 bactéries.
2. La raison de cette suite est $b = \dfrac{5\,000\,000}{1\,000\,000} = 5$.
Au bout de 10 heures, il y aura
$5^{10} \times 1\,000\,000 \approx 9{,}766 \times 10^{12}$,
soit environ $9{,}766 \times 10^{12}$ bactéries.

110 **1. a)**

◇	A	B	C
1	Année	Concentration moyenne	
2	2000	0,4	
3	2001	0,408	0,008
4	2002	0,416	0,008
5	2003	424	0,008

b) Sur les quatre premières années, $c_{n+1} = c_n + 0{,}008$.
On peut penser que la suite (c_n) est arithmétique, de raison 0,008 et terme initial $c_0 = 0{,}400$.
c) Pour tout entier n, $c_n = 0{,}400 + 0{,}008n$.
Pour $n = 40$, $c_{40} = 0{,}720$.
2. a) Selon l'hypothèse de Monsieur M.,
$c_{n+1} = 1{,}02c_n$.
La suite (c_n) est géométrique, de raison 1,02 et de terme initial $c_0 = 0{,}400$.
b) $c_n = 1{,}02^n \times 0{,}400$.
c) $c_{40} = 1{,}02^{40} \times 0{,}400 \approx 0{,}883$.
On retrouve bien la concentration de 0,883 mg/L mesurée par Monsieur O en 2040.
d) $c_{46} = 1{,}02^{46} \times 0{,}400 \approx 0{,}995$.
$c_{47} = 1{,}02^{47} \times 0{,}400 \approx 1{,}015$.
e) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur (voir AG_2 ou pages outils tableur), on vérifie que c'est à partir de l'année 2047 que la concentration moyenne sera trop élevée.

111 **1. a)** Les points obtenus sont situés sur une droite, donc on peut considérer que la décroissance de la population des moins de 20 ans est linéaire.
b) $\dfrac{24\,570}{22\,340} \approx 1{,}1$; $\dfrac{27\,020}{24\,570} \approx 1{,}1$; $\dfrac{29\,730}{27\,020} \approx 1{,}1$;
$\dfrac{32\,710}{29\,730} \approx 1{,}1$; $\dfrac{35\,980}{32\,710} \approx 1{,}1$.
Il suffit de multiplier chacun des termes par 1,1 pour obtenir le suivant, donc la suite est géométrique, de raison 1,1 et la croissance peut être considérée comme exponentielle.
2. Si la population des moins de 20 ans décroit de 500 habitants tous les cinq ans, alors la population des moins de 20 ans en 2055 est égale à $27\,000 - 500 \times 10$, soit 22 000 (la suite est arithmétique, de raison – 500 et de terme initial 2 700, et on calcule le terme de rang 10).
Si la population des plus de 60 ans augmente de 10 % tous les cinq ans, alors la population des plus de 60 ans en 2055 est égale à $35\,980 \times 1{,}1^{10}$, soit environ 93 323 (la suite est géométrique, de raison 1,1 et de terme initial 35 980 et on calcule le terme de rang 10).

Si ces deux hypothèses se vérifient, la population des moins de 20 ans en 2055 est 22 000 et celle des plus de 60 ans est 93 323, donc il y a environ 4 fois plus d'habitants de plus de 60 ans que d'habitants de moins de 20 ans.

112 **Partie A**

1. Sa prime d'assurance diminuera de 20 € chaque année, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison – 20 et de terme initial $u_0 = 450$.
$u_n = u_0 + n(-20) = 450 - 20n$.
2. On résout l'équation $450 - 20n = \frac{450}{2}$, soit
$450 - 20n = 225$.
D'où $-20n = -225$, d'où $n = 11{,}25$.
Or n est un entier, donc le nombre d'années nécessaires est 12.
3. À l'aide de la calculatrice ou du tableur (voir AG_1 ou les pages outils tableur), on vérifie le résultat de la question **2**.

Partie B

1. Sa prime d'assurance diminuera de 5 % chaque année, elle sera donc multipliée par 0,95 chaque année. La suite (v_n) est donc géométrique, de raison 0,95 et de terme initial $v_0 = 450$.
$v_n = 0{,}95^n \times 450$.
2. À l'aide de la calculatrice ou du tableur (voir AG_2 ou les pages outils tableur), le nombre d'années nécessaires à Pierre pour atteindre le bonus maximal est 14.

113 **Partie A**

1. a) Le nombre moyen de lecteurs par jour augmente de 3 % par mois, donc il est multiplié par 1,03 chaque mois : la suite (c_n) est géométrique, de raison 1,03 et de terme initial $c_1 = 128\,500$.
b) $c_n = 1{,}03^{n-1} \times 128\,500$.
c) $c_{12} = 1{,}03^{11} \times 128\,500 \approx 177\,874$.
2. $\boxed{\text{=1,03*B5}}$.
3. $c_6 = 1{,}03^5 \times 128\,500$; le pourcentage d'augmentation est $\frac{c_6 - c_0}{c_0} \approx 15{,}9\,\%$.

Partie B

1. a) Le nombre moyen de lecteurs augmente de 10 700 par mois. La suite (t_n) est donc arithmétique, de raison 10 700 et de terme initial $t_1 = 62\,300$.
b) $t_n = 62\,300 + (n - 1) \times 10\,700$.
c) $t_{12} = 62\,300 + 11 \times 10\,700 = 180\,000$.
2. $\boxed{\text{=C5+10700}}$.

Partie C

$23\,700 - 12\,500 = 11\,200$; $35\,275 - 23\,700 = 11\,575$; $46\,930 - 35\,275 = 11\,655$, etc.
La différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique et la croissance ne peut pas être considérée comme linéaire.
$\frac{23\,700}{12\,500} = 1{,}896$; $\frac{35\,275}{23\,700} \approx 1{,}49$; $\frac{46\,930}{35\,275} \approx 1{,}33$; …
Le coefficient multiplicatif entre deux termes consécutifs n'est pas constant, donc la suite n'est pas géométrique et la croissance ne peut pas être considérée comme exponentielle.

Partie D

Graphiquement, de janvier 2004 à novembre 2004, le quotidien qui possède le plus grand nombre de lecteurs est *La Cité*. En décembre 2004, celui qui possède le plus grand nombre de lecteurs est *Le Temps*.
Par le calcul, $c_{11} \approx 172\,693$ et $c_{12} \approx 177\,874$
$t_{11} = 169\,300$ et $t_{12} = 180\,000$.
Ce qui vérifie les conclusions graphiques.

Tableur sur papier

1. a) $u_n = 15\,000 + (n - 1) \times 1\,800$. Les sept annuités de la banque A sont les termes successifs d'une suite arithmétique, car chacune des annuités u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 est obtenue en ajoutant 1 800 euros à la précédente. Cette suite est la suite arithmétique de raison 1 800 et de terme initial $u_1 = 15\,000$.
Le montant de la quatrième annuité est
$u_4 = 15\,000 + 3 \times 1\,800 = 20\,400$ €.
b) $v_n = 19\,000 \times 1{,}02^{n-1}$. Les sept annuités de la banque B sont les termes successifs d'une suite géométrique, car chacune des annuités v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 est obtenue en multipliant la précédente par 1,02.
Cette suite est la suite géométrique de raison 1,02 et de terme initial $v_1 = 19\,000$.
Le montant de la quatrième annuité est
$v_4 = 19\,000 \times 1{,}02^3 = 20\,162{,}95$ €.
2. a) Le bouton de la barre d'outils permettant de passer à l'arrondi à 10^{-2} est $\boxed{\substack{,00 \\ \rightarrow ,0}}$.
b) – ***Entrer :*** la valeur 1 dans la cellule A2 ;
la valeur 2 dans la cellule A3.
– ***Sélectionner*** les deux cellules A2 et A3 et ***utiliser*** la poignée de remplissage pour compléter la colonne A jusqu'à la cellule A8.

c) Dans la cellule B3, il a entré la formule $\boxed{\text{=B2+1800}}$ ou la formule $\boxed{\text{=\$B\$2+(A3–1)*1800}}$.
Dans la cellule C3, il a entré la formule $\boxed{\text{=C2×1,02}}$ ou la formule $\boxed{\text{=\$C\$2*1,02\^{}(A3–1)}}$.
En cliquant dans la cellule B5, on obtient la formule $\boxed{\text{=B4+1800}}$ ou la formule $\boxed{\text{=\$B\$2+(A5–1)*1800}}$.
En cliquant dans la cellule C5, on obtient la formule $\boxed{\text{=C4×1,02}}$ ou la formule $\boxed{\text{=\$C\$2*1,02\^{}(A5–1)}}$.

Pour obtenir la somme des sept annuités de la banque *A* (respectivement *B*), on entre la formule (3) (respectivement $\boxed{\text{=SOMME(C2:C8)}}$).
Le bouton de la barre d'outils permettant de calculer directement cette somme est $\boxed{\Sigma}$.

3. C'est la banque *B* qui semble offrir la solution la plus avantageuse, car la somme totale remboursée est plus faible.