Chapitre 1. Droites

Nos objectifs

Beaucoup d'élèves ont des difficultés avec les droites et la résolution de systèmes d'équations linéaires. C'est pourquoi nous avons choisi de regrouper dans un chapitre « à part » les connaissances indispensables. Ainsi, l'enseignant pourra, s'il le désire, traiter le chapitre en début d'année ou l'utiliser au fur et à mesure des besoins. L'élève pourra retrouver facilement les notions ou méthodes utiles.

Activités et applications

1. Coefficient directeur

Activité

1. a) A, B et C ont pour ordonnées respectives – 2, – 0,5 et 2,5.

b) $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = 1{,}5.$

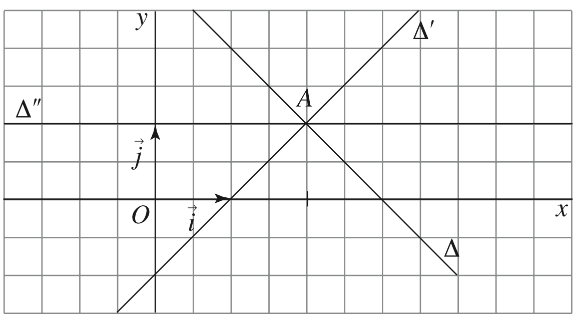
2. a) A', B' et C' ont pour ordonnées respectives 2, 0 et – 1.

b) $\dfrac{y_{A'} - y_{B'}}{x_{A'} - x_{B'}} = \dfrac{y_{C'} - y_{B'}}{x_{C'} - x_{B'}} = \dfrac{y_{C'} - y_{A'}}{x_{C'} - x_{A'}} = -1.$

Application 1

Les droites D, D' et D'' ont pour coefficients directeurs respectifs $\dfrac{1}{3}$; – 0,5 et 0.

Application 2



2. Équations de droites

Activité

1. a) $y_A = -2 \times 0 + 3 = 3$ et $y_B = -2 \times 2 + 3 = -1$. Vérification graphique immédiate.

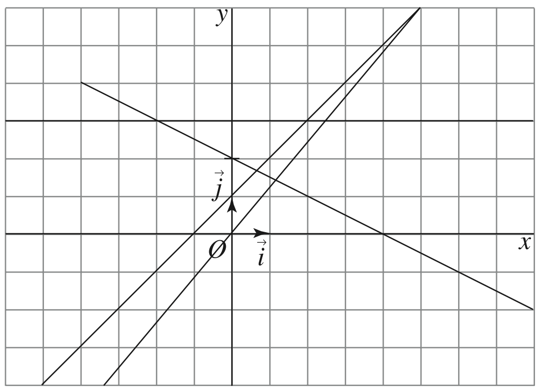
b) Le coefficient directeur de D_1 est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -2.$

2. Les ordonnées des points de D_2 sont égales à 2.
3. Les abscisses des points de D_3 sont égales à – 1.

Application 1

$(AB) : y = -2x$. $(BC) : y = 3x - 5$. $(CA) : y = 4$.

Application 2



3. Droites et systèmes d'équations linéaires

Activité

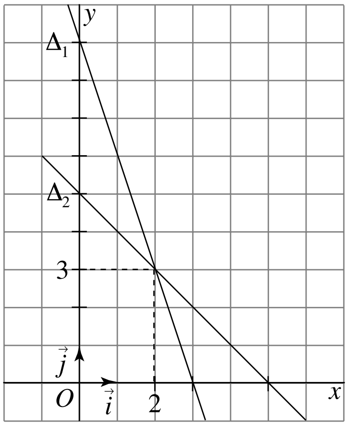
1. La somme dépensée par Alain est $15x + 5y$: cette somme est 45 €, donc $15x + 5y = 45$.
La somme dépensée par Bernard est $9x + 9y$: cette somme est 45 €, donc $9x + 9y = 45$.

On a donc $\begin{cases} 15x + 5y = 45 \\ 9x + 9y = 45 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} 5y = -15x + 45 \\ 9y = -9x + 45 \end{cases}$,

soit $\begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = -x + 5 \end{cases}$.

2.



3. Le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2 a pour abscisse 2 et pour ordonnée 3. Le prix d'un CD est donc 2 €, le prix d'un DVD est 3 €.

On vérifie que $\begin{cases} 15 \times 2 + 5 \times 3 = 45 \\ 9 \times 2 + 9 \times 3 = 45 \end{cases}$.

Application

$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases}$ s'écrit $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x \\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{6} \end{cases}$.

Pas de couple solution.

$\begin{cases} x - 10y = 5 \\ -x + y = 7 \end{cases}$ s'écrit $\begin{cases} y = \dfrac{1}{10}x - \dfrac{1}{2} \\ y = x + 7 \end{cases}$.

Un couple solution.

$\begin{cases} x - 7y = 14 \\ -2x + 14y = -28 \end{cases}$ s'écrit $\begin{cases} y = \dfrac{1}{7}x - 2 \\ y = \dfrac{1}{7}x - 2 \end{cases}$.

Une infinité de couples solutions.

Exercices d'entraînement

C *indique que l'exercice est corrigé dans le livre élève.*

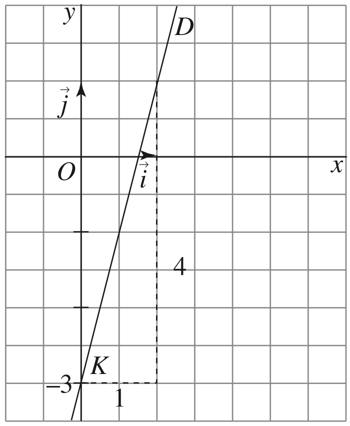
1 **C**

2 Coefficients directeurs de
Δ : – 2 ; Δ' : 1 ; Δ'' : 0.

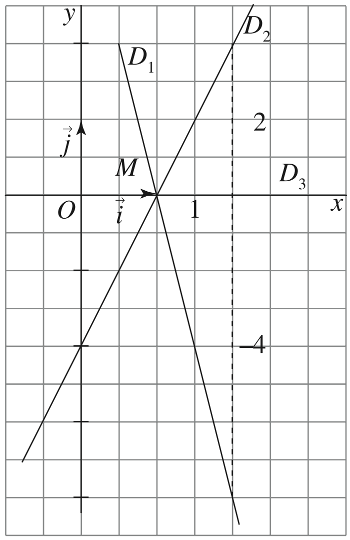
3 Coefficients directeurs de
D_1 : $\dfrac{1}{4}$; D_2 : 1 ; D_3 : $-\dfrac{1}{3}$.

4 **C**

5



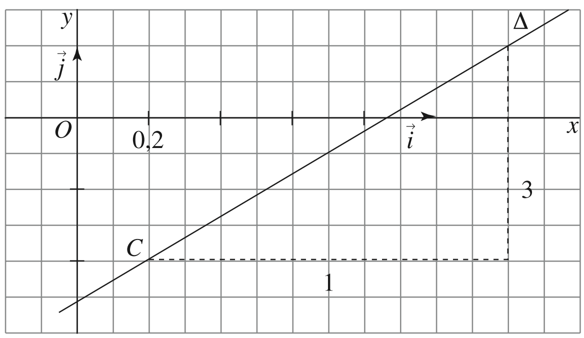
6



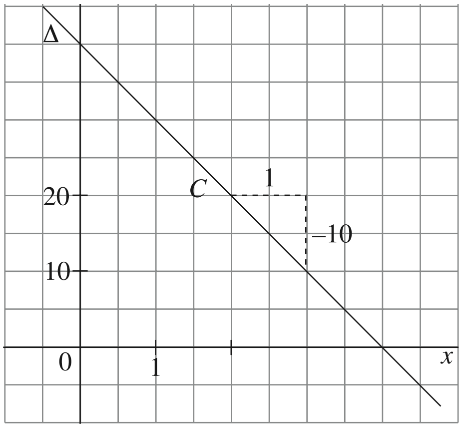
7 D_3 et D_4 « montent », donc elles ont un coefficient directeur positif.
D_2 « descend », donc elle a un coefficient directeur négatif.
D_1 est parallèle à l'axe des abscisses, donc son coefficient directeur est nul.

8 **C**

9



10



11 Les coefficients directeurs de (AB) et (CD) sont respectivement $\frac{1-7}{7+1} = -\frac{6}{8}$ et $\frac{-3-5}{8+3} = -\frac{8}{11}$.
Ces deux nombres sont différents, donc (AB) n'est pas parallèle à (CD).

12 Les coefficients directeurs de (EF) et (OG) sont respectivement $\frac{-2-3}{3+1} = -\frac{5}{4}$ et $\frac{-2,5}{2} = -\frac{5}{4}$.
Les droites ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

13 *Exercice résolu dans le livre élève.*

14 $-4 \times 1,4 + 4,6 = -1$; les coordonnées de A vérifient l'équation de D, donc $A(1,4 ; -1) \in D$.
$-4 \times 3,5 + 4,6 = -9,4 \neq -9,6$; les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation de D, donc
$B(3,5 ; -9,6) \notin D$.
$-4 \times 5,7 + 4,6 = -18,2$; les coordonnées de C vérifient l'équation de D, donc $C(5,7 ; -18,2) \in D$.

15 C

16 La droite (KL) a pour équation $y = 1,25x - 1,75$.

17 La droite (MN) a pour équation $y = -3$.

18 La droite (RS) a pour équation $y = -0,2x + 2$.

19 (OA) a pour équation $y = -0,5x$.
(OB) a pour équation $y = x$.
(AB) a pour équation $y = 2$.

20 C

21 C

22 La droite Δ passe par les points $A(1 ; 1)$ et $B(7 ; 0)$.

23 La droite Δ passe par les points $E(2 ; 4)$ et $F(-3 ; -7)$.

24 C

25 La droite a pour coefficient directeur – 1 et pour ordonnée à l'origine 0.

26 La droite a pour coefficient directeur 0 et pour ordonnée à l'origine – 2.

27 La droite a pour coefficient directeur $-\frac{11}{6}$ et pour ordonnée à l'origine 7.

28

	D_1	D_2	D_3	D_4
Coefficient directeur	–3	1	–1	0
Ordonnée à l'origine	–2	5	9	5

29 C

30 (AA') a pour équation $x = -3$.

31 C

32 Une solution : $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

33 Pas de solution.

34 Une infinité de couples solutions.

35 *Exercice résolu dans le livre élève.*

36 Une solution : $(0 ; 1)$.

37 Une solution : $(1 ; -0,5)$.

38 C

39 Une solution : $(4 ; 2)$.

40 Une solution : $(50 ; 40)$.

41 Une solution : $(-1,5 ; 1)$.

42 Une solution : $\left(\frac{1}{3} ; 2\right)$.

43 Une solution : (– 3 ; 14).

44 **C**

45 Coordonnées du point d'intersection : (– 2 ; – 3).

46 Coordonnées du point d'intersection : (1,4 ; 4,6).

47 Coordonnées du point d'intersection : $\left(-\dfrac{24}{13} ; \dfrac{18}{13}\right)$.

48 **1.** Les droites ont pour équations : $y = 2x + 3$ et $y = -3x - 2$.
2. Le système a une solution : (– 1 ; 1).

Je fais le point

Savez-vous déterminer le coefficient directeur d'une droite donnée graphiquement ?

Énoncé 1

Remarque initiale : la droite « monte », donc son coefficient directeur est positif.
La droite Δ passe par les points $A(1 ; -1)$ et $B(4 ; 0)$, donc son coefficient directeur est
$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0 - (-1)}{4 - 1} = \dfrac{1}{3}$.

Énoncé 2

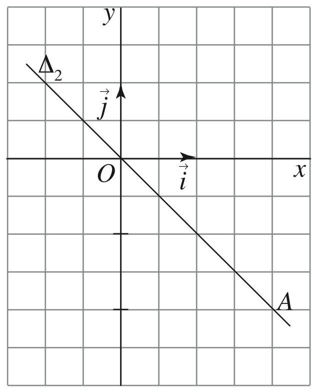
Le coefficient directeur de Δ' est – 0,5.

Savez-vous tracer une droite dont on connaît un point et le coefficient directeur ?

Énoncé 1

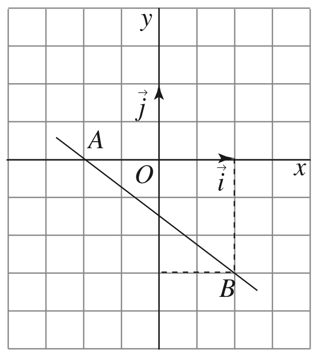
Remarque initiale : le coefficient directeur est positif, donc la droite « monte ».
On place le point A. À partir de A, on se déplace de 1 vers la droite et on monte de 2,5.
On obtient ainsi un point noté B. La droite Δ_1 est la droite (AB).

Énoncé 2



Savez-vous déterminer l'équation réduite d'une droite définie par deux de ses points ?

Énoncé 1



On fait une figure et on constate :
que le coefficient directeur est négatif puisque la droite « descend » ;
que l'ordonnée à l'origine semble proche de – 0,8.

• Le coefficient directeur de la droite (AB) est :
$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1{,}5 - 0}{1 - (-1)} = \dfrac{-1{,}5}{2} = -0{,}75$.

L'équation réduite de (AB) est donc de la forme $y = -0{,}75x + p$.

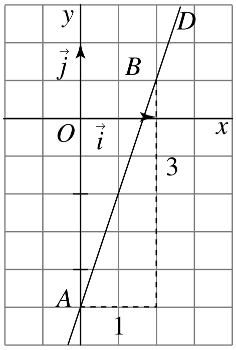
• Le point $A(-1 ; 0)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.
On obtient successivement $0 = -0{,}75 \times (-1) + p$, c'est-à-dire $0 = 0{,}75 + p$, soit $p = -0{,}75$.
L'équation réduite de (AB) est $y = -0{,}75x - 0{,}75$.

Énoncé 2

(OC) a pour équation $y = -\dfrac{4}{3}x$.

Savez-vous tracer une droite dont on connaît l'équation réduite ?

Énoncé 1



L'ordonnée à l'origine de la droite D est égale à – 2,5, donc D passe par le point $A(0\,;\,-2{,}5)$. Son coefficient directeur est égal à 3 : en partant de A, on se déplace de 1 vers la droite et on monte de 3. On obtient ainsi le point B.
La droite D est la droite (AB).

Énoncé 2

La droite D passe par les points $A(0\,;\,1)$ et $B(3\,;\,-3)$.

Savez-vous déterminer le nombre de couples solutions d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues ?

Énoncé 1

Le système (S_1) s'écrit $\begin{cases} 2y = -5x + 2 \\ 6y = -15x - 3 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} y = -2{,}5x + 1 \\ y = -2{,}5x - 0{,}5 \end{cases}$.

Les droites d'équations $y = -2{,}5x + 1$ et $y = -2{,}5x - 0{,}5$ ont le même coefficient directeur (égal à – 2,5), donc elles sont parallèles ; elles n'ont pas la même ordonnée à l'origine, donc elles sont strictement parallèles.
Conclusion : le système n'a pas de couple solution.

Le système (S_2) s'écrit $\begin{cases} -9y = -2x + 3 \\ 2y = -9x - 3 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} y = \dfrac{2}{9}x - \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{9}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Les droites d'équations $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$ et $y = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}$ ont des coefficients directeurs différents, donc elles sont sécantes.
Conclusion : le système a un seul couple solution.

Énoncé 2

(S_1) équivaut à $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$, donc le système a une infinité de couples solutions ; (S_2) équivaut à $\begin{cases} y = 3x - 11 \\ y = -3{,}5x + 2 \end{cases}$, donc le système a un seul couple solution.

Savez-vous résoudre un système de deux équations à deux inconnues par substitution ?

Énoncé 1

On écrit y en fonction de x dans l'équation
$-3x + y = -11$, on obtient $y = 3x - 11$.
En remplaçant y par $3x - 11$ dans l'équation
$7x + 2y = 4$, on obtient $7x + 2(3x - 11) = 4$.
Cette équation s'écrit $13x = 26$, c'est-à-dire $x = 2$.
En remplaçant x par 2 dans l'équation $y = 3x - 11$, on obtient $y = -5$.
Conclusion : le système a pour couple solution : $(2\,;\,-5)$.

Énoncé 2

Le système a un couple solution : $\left(-\dfrac{2}{15}\,;\,-\dfrac{4}{15}\right)$.

Activités guidées

49 **AG1**

Préliminaire : le coefficient directeur de D est négatif, donc la droite « descend ».
Il s'agit de faire utiliser à l'élève les tableaux de fonctions (Table Setup et Table ou Table Range et Table).

50 **AG2**

Préliminaire : le coefficient directeur de Δ est négatif, donc la droite « descend ».
1. Le point d'intersection de Δ et de l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\,;\,13{,}4)$.

3. Le point d'abscisse 7 a pour ordonnée – 1,3 qui est négatif.
4. Il s'agit de donner une explication orale, l'objectif étant que l'élève sache si ce qu'il a trouvé précédemment est exact.
5. Il s'agit de faire utiliser la fenêtre graphique (window).

51 **AG3**

1. L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}_m$ est égale à 8 ; ce qui correspond à la population initiale de bactéries, c'est-à-dire 8 dizaines de milliers.
2. a) Tracé sur l'écran de la calculatrice.
b) Pour $m = 0{,}5$, $\mathscr{D}_m$ coupe et est située au-dessous de $\mathscr{D}$ pour $x > 6$; le médicament n'est donc pas considérée comme efficace.
c) Pour $m = 1$, $\mathscr{D}_m$ coupe et est située au-dessus de $\mathscr{D}$ pour $x < 6$; le médicament est donc considéré comme efficace.
3. Graphiquement, on trouve : $m = 0{,}7$.
4. On résout l'inéquation d'inconnue m : $-6m + 8 < 4$, équivalente à $m > \frac{2}{3}$.
La plus petite valeur de m pour que le médicament soit efficace est $\frac{2}{3}$.

52 **AG4**

1. a) $z = 3x + 3y$.
b) L'équation (2) s'écrit $5x + 9y - 3(3x + 3y) = 4$, c'est-à-dire $-4x = 4$, soit $x = -1$.
L'équation (3) s'écrit $2x - y + 2(3x + 3y) = 2$, c'est-à-dire $8x + 5y = 2$.
c) On obtient le système $\begin{cases} x = -1 \\ 8x + 5y = 2 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.
d) On remplace x par -1 et y par 2 dans l'équation (1). On obtient $z = 3(-1) + 3 \times 2 = 3$.
e) La solution du système est $(-1\,;2\,;3)$.
2. Le système a une solution : $(0\,;5\,;10)$.

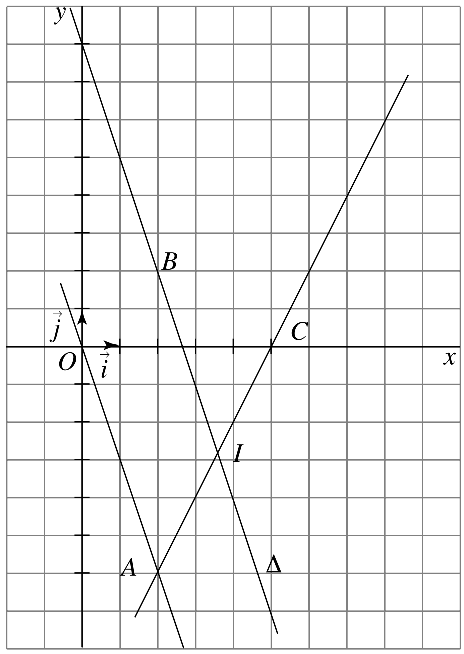
Problèmes

53 **1.** Le point d'intersection H a pour coordonnées $(2\,;-3)$.
2. La parallèle à la droite d'équation $y = 3x$ et passant par H a pour équation $y = 3x - 9$.

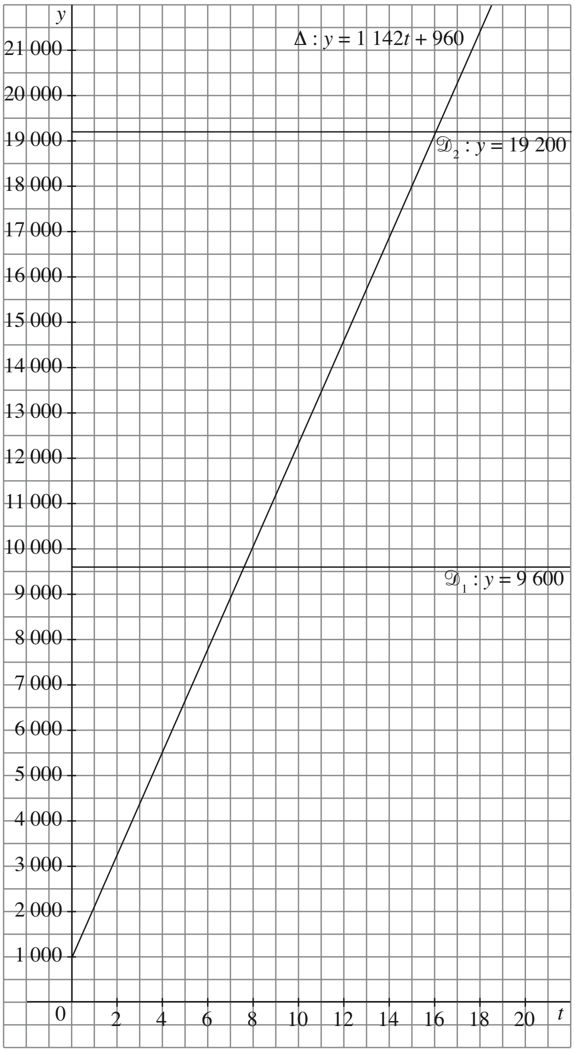
54 **1.** Le point I a pour coordonnées $(2\,;-1)$.
2. $-4{,}2 \times 2 + 7{,}2 = -1{,}2 \neq -1$; les coordonnées de I ne vérifient pas l'équation de Δ'', donc $I(2\,;-1) \notin \Delta''$.

55 **1.** Réponse **a)**.
2. Réponse **b)**.
3. Réponse **a)**.

56 La droite (OA) a pour coefficient directeur – 3.
Δ a pour équation $y = -3x + 8$.
(AC) a pour équation $y = 2x - 10$.
Le point d'intersection I de Δ et (AC) a pour coordonnées $(3{,}6\,;-2{,}8)$.



57 **1. a)** et **b)** Voir graphique page suivante.
c) • Intersection de Δ et $\mathscr{D}_1$: on résout l'équation $1\,142t + 960 = 9\,600$. On obtient $t \approx 7{,}6$ arrondi à 0,1, soit le point de coordonnées $(7{,}6\,;9\,600)$.
• Intersection de Δ et $\mathscr{D}_2$: on résout l'équation $1\,142t + 960 = 19\,200$. On obtient $t \approx 16$ arrondi à 0,1, soit le point de coordonnées $(16\,;19\,200)$.
Graphiquement, on lit les abscisses des points d'intersection respectifs de Δ et $\mathscr{D}_1$ et de Δ et $\mathscr{D}_2$, ce qui confirme les résultats précédents.
2. a) Pour $t = 0$, on a $y = 960$, soit 960 germes par mL.
b) Pour $t = 6$, on a $y = 1\,142 \times 6 + 960 = 7\,812$, soit 7 812 germes par mL.
c) • Vrai, car pour $t = 9$, Δ est située au-dessus de $\mathscr{D}_1$.
• Faux, car pour $t = 7$, Δ est située au-dessous de $\mathscr{D}_1$.
• Vrai, car pour $t = 17$, Δ est située au-dessus de $\mathscr{D}_2$.



58 **1.** $x + y = 9$.
2. $0{,}20x + 0{,}50y = 2{,}70$.
3. Le système a pour solution $(6\,;\,3)$.
4. Jean a 6 pièces de 0,20 € et 3 pièces de 0,50 €.

59 On note x l'âge de Danielle et y celui de Lucie. Danielle est l'aînée, donc $x > y$.

Les données s'écrivent $\begin{cases} x + y = 34 \\ x - y = 6 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} x = 20 \\ y = 14 \end{cases}$.

Conclusion : Danielle a 20 ans et Lucie a 14 ans.

60 On note x le nombre de filles et y le nombre de garçons.
Les données se traduisent par le système
$\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}4y = 95 \\ x + y = 317 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 212 \\ y = 105 \end{cases}$.

Conclusion : l'institut compte 212 filles et 105 garçons.

61 On note x le prix de la boîte B_1 et y le prix de la boîte B_2.
Les données se traduisent par le système
$\begin{cases} 12x + 30y = 170{,}4 \\ 25x + 20y = 176{,}5 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 3{,}7 \\ y = 4{,}2 \end{cases}$.

Conclusion : la boîte B_1 coûte 3,70 € et la boîte B_2 coûte 4,20 €.

62 On note x le nombre de bouteilles de 250 mL vendues et y le nombre de bouteilles de 400 mL vendues.
Les données se traduisent par le système
$\begin{cases} 7{,}5x + 9{,}6y = 432{,}6 \\ x + y = 49 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 18 \\ y = 31 \end{cases}$.

Conclusion : le pharmacien a vendu 18 bouteilles de 250 mL et 31 bouteilles de 400 mL.

63 **1.** On note x l'âge actuel de Loïc et y celui de son père.
Il y a deux ans, l'âge de Loïc était $x - 2$ et celui du père était $y - 2$; on a donc $y - 2 = 3\,(x - 2)$.
Dans quatorze ans, l'âge de Loïc sera $x + 14$ et celui de son père $y + 14$; on a donc $y + 14 = 2\,(x + 14)$.
Les données se traduisent par le système
$\begin{cases} y - 2 = 3\,(x - 2) \\ y + 14 = 2\,(x + 14) \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 18 \\ y = 50 \end{cases}$.

Conclusion : Loïc a actuellement 18 ans et son père 50 ans.

64 On note x la note obtenue à l'épreuve théorique et y celle obtenue à l'épreuve pratique.

Les données s'écrivent $\begin{cases} \dfrac{2x + 3y}{5} = 8{,}9 \\ \dfrac{3x + 2y}{5} = 10{,}1 \end{cases}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} x = 12{,}5 \\ y = 6{,}5 \end{cases}$.

Conclusion : Louis a eu 12,5 à l'épreuve théorique et 6,5 à l'épreuve pratique.

65 **1. a)** $\begin{cases} 5x + 12y = 931 \\ x + y = 100 \end{cases}$.

b) Le système a pour solution $\left(\dfrac{269}{7}\,;\,\dfrac{431}{7}\right)$.

c) Il n'est pas possible que la recette soit 931 €, car les solutions ne sont pas entières.

2. Le système à résoudre est $\begin{cases} 5x + 12y = 913 \\ x + y = 100 \end{cases}$,
c'est-à-dire $\begin{cases} x = 41 \\ y = 59 \end{cases}$.
La recette est de 913 € pour la vente de 41 bouquets à 5 € et 59 bouquets à 12 €.

66 **1. a)** Équation réduite de $\mathscr{D}_1$: $y = -7t + 105$.
Équation réduite de $\mathscr{D}_2$: $y = -5t + 94$.
2. On a injecté 105 mL de substance S_1 et 94 mL de substance S_2.
3. On résout le système
$\begin{cases} 7t + y = 105 \\ 5t + y = 94 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} t = 5{,}5 \\ y = 66{,}5 \end{cases}$.
Les quantités de ces substances présentes dans le sang sont égales au bout de 5 heures et 30 minutes.
4. On résout les équations $-7t + 105 = 0$ et $-5t + 94 = 0$, c'est-à-dire respectivement $t = 15$ et $t = 18{,}8$.
La substance S_1 sera éliminée au bout de 15 heures et la substance S_2 au bout de 18 heures et 48 minutes.

Tableur sur papier

Énoncé 1

1. On entre – 4 dans la cellule A2 et – 3 dans la cellule A3. On sélectionne les cellules A2 et A3, puis on utilise la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la cellule A11.
2. Formule **(3)** $\boxed{\text{= (–2/3)*A2 + (5/3)}}$.
3. a) Les valeurs de y où les décimales sont égales à 0 sont des valeurs exactes ; le bouton en question permettant d'afficher davantage de décimales.
b) On a les points de coordonnées (– 2 ; 3) et (4 ; – 1). On trace dans un repère du plan la droite passant par ces deux points.
4. Soit entrer – 5 dans A2 et $\boxed{\text{=A2 + 1}}$ dans A3, puis recopier jusqu'à A11.
Soit entrer – 5 dans A2, – 4 dans A3, sélectionner A2 et A3, puis recopier jusqu'à A11.
Dans le tableau 2, on aura alors les ordonnées des points de $\mathscr{D}$ pour les abscisses allant de – 5 à 4.

Énoncé 2

1. a) On obtient les valeurs – 5 ; – 4 ; – 3 ; – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.
b) La valeur numérique de la cellule A9 est 0.
c) On obtient dans la cellule A11 la formule $\boxed{\text{=A10 + 1}}$.
2. a) Formule **(2)** $\boxed{\text{=\$B\$1*A4 + (1/2)}}$.
b) On obtient dans la cellule B8 la formule $\boxed{\text{=\$B\$1*A8 + (1/2)}}$.
3. Il suffit de rentrer dans un premier temps la valeur – 0,1 dans la cellule B1, puis dans un deuxième temps la valeur 50 dans la cellule B1.