1Sti2d – TP2	MATHEMATIQUES	5 déc 2014

116. +++ Tangentes et fonctions de référence, avec GeoGebra

TICE

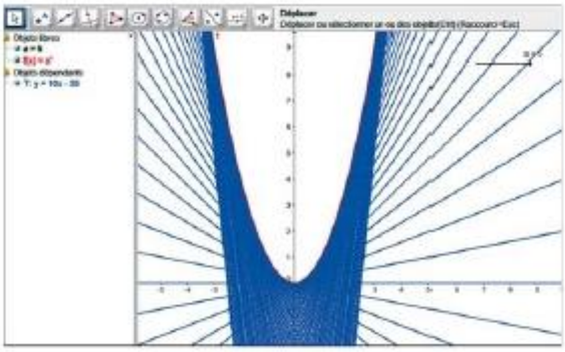
1. *Fonction carré*

Ouvrir GeoGebra et entrer dans la barre de saisie : $f(x) = x$^2 pour obtenir la courbe représentative C de la fonction f définie, pour tout x réel, par $f(x) = x^2$.

Créer un curseur a de -5 à 5 avec un incrément de 0,1.

Entrer dans la barre de saisie : tangente[a,f] pour obtenir le tracé de la tangente à C au point d'abscisse a.

Dans les propriétés de la tangente (clic droit sur la tangente), dans l'onglet « Basique », cocher « Afficher la trace ». Déplacer le curseur, pour obtenir un tracé analogue à celui de l'image suivante.



a) En combien de points chaque tangente rencontre-t-elle la courbe C ?

b) Quelle est l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = -2$? (Voir la fenêtre algèbre.)

c) Quel est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a = -2$? Que vaut $f'(-2)$?

2. Fonction $x \mapsto 2x^2 - 8x + 3$

Modifier l'expression de f pour considérer maintenant la fonction f définie, pour tout x réel, par $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. Faire bouger le curseur pour tracer les tangentes enveloppant la parabole représentant la fonction f.

a) Que vaut, pour tout nombre réel a, le nombre dérivé $f'(a)$?

b) Sur l'intervalle [0, 2], où la fonction f est décroissante, quel est le signe des coefficients directeurs des tangentes à la parabole ?

Même question sur l'intervalle [2, 5], où la fonction f est croissante.

c) Que vaut le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2, minimum de f ?

3. Fonction cube

Modifier l'expression de f pour considérer maintenant la fonction f définie, pour tout x réel, par $f(x) = x^3$. Faire bouger le curseur pour tracer les tangentes correspondantes.

a) Que vaut, pour tout nombre réel a, le nombre dérivé $f'(a)$?

b) Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 1$? En combien de points cette tangente rencontre-t-elle la courbe ?

c) Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 0$? A-t-on un extremum pour f en ce point ? En combien de points cette tangente rencontre-t-elle la courbe ? (Remarquer que la courbe traverse sa tangente en $a = 0$.)

4. Fonction inverse

Modifier l'expression de f pour considérer maintenant la fonction f définie, pour tout x réel non nul, par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Faire bouger le curseur pour tracer les tangentes correspondantes.

a) Que vaut, pour tout nombre réel non nul a, le nombre dérivé $f'(a)$?

b) Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 1$? En combien de points cette tangente rencontre-t-elle la courbe ?

c) Quel est l'affichage dans la fenêtre algèbre pour $a = 0$? Expliquer.

d) La courbe représentative de f possède-t-elle une tangente horizontale ?

117. +++ Une propriété des tangentes à une parabole, avec GeoGebra et Maxima

TICE

On considère la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = 0{,}5x^2$. On désigne par C la parabole représentant la fonction f dans un repère orthonormé. Étant donné un réel a non nul, on se propose de mettre en évidence une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole C aux points M et M′ d'abscisses respectives a et $-\frac{1}{a}$.

1. *Conjecture avec GeoGebra*

a) À l'aide de GeoGebra, tracer la parabole C, créer un curseur a, puis placer les points $M(a, f(a))$ et $M'\left(-\frac{1}{a}, f\left(-\frac{1}{a}\right)\right)$.

Tracer les tangentes T et T' à la parabole C aux points M et M′, puis leur point d'intersection P.

b) Lorsque a varie, à quel ensemble le point P semble-t-il appartenir ?

2. *Calculs pour $a = 2$*

On se situe dans le cas $a = 2$.

a) Quelles sont les coordonnées des points M et M′ ?

b) Calculer la dérivée de f et en déduire $f'(2)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

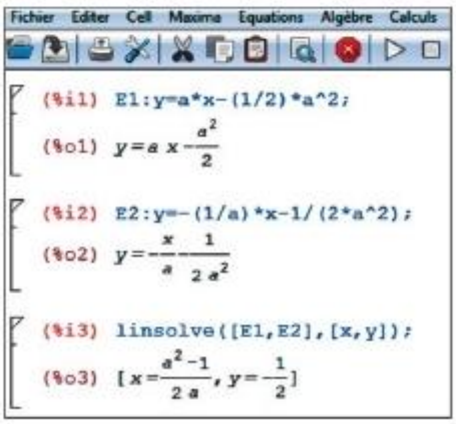
c) Justifier que T admet comme équation $y = 2x - 2$ et que T' admet comme équation $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$.

d) En déduire les coordonnées du point P.

3. *Cas général*

On considère un réel a non nul. On admet que T a pour équation $y = ax - \frac{1}{2}a^2$ et que T' a pour équation $y = -\frac{1}{a}x - \frac{1}{2a^2}$.

Un logiciel de calcul formel fournit l'affichage suivant.



Que peut-on en déduire ?