

Chapitre 5

Les Suites

1. Notion de suite numérique

Approche : voici quatre suites de nombres :

a) 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; ...

b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; ...

c) 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ...

d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ...

1. Ces suites ont chacune une logique, trouver laquelle.
2. Ecrire pour chacune les six termes suivants.
3. Trouver le 20^e terme de chacune.

1. Notion de suite numérique

Approche :

- a) 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; ... on ajoute 4 à chaque fois
- b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; ... on multiplie par 2 à chaque fois
- c) 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ... suite des carrés d'entiers
- d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ... on additionne les 2 termes précédents

1. Notion de suite numérique

Approche :

a) 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; 29 ; 33 ; 37 ; 41 ; ... ; 81

b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512 ; 1024 ; ... ; 524288

c) 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; ... ; 361

d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; ... ; 6765

1. Notion de suite numérique

Notation : le premier terme de la suite est en général noté \mathbf{u}_0

le deuxième est \mathbf{u}_1 , le troisième \mathbf{u}_2 , etc...

Comment note-t-on le 22^e terme ?

Calculez le 22^e terme pour chacune des 4 suites.

Calculez \mathbf{u}_{16} pour chacune des 4 suites.

1. Notion de suite numérique

Notation : le premier terme de la suite est en général noté \mathbf{u}_0
le deuxième est \mathbf{u}_1 , le troisième \mathbf{u}_2 , etc...

Le 22^e terme est noté \mathbf{u}_{21}

a) $\mathbf{u}_{21} = 89$; b) $\mathbf{u}_{21} = 2097152$; c) $\mathbf{u}_{21} = 441$; d) $\mathbf{u}_{21} = 17711$

a) $\mathbf{u}_{16} = 61$; b) $\mathbf{u}_{16} = 65536$; c) $\mathbf{u}_{16} = 256$; d) $\mathbf{u}_{16} = 1597$

1. Notion de suite numérique

Notations :

d'une façon générale on note \mathbf{u}_n le terme de la suite de rang n
c'est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme si le premier terme de la suite est \mathbf{u}_0

\mathbf{u}_{n+1} sera le terme suivant : c'est le $(n+2)^{\text{ième}}$ terme de la suite

\mathbf{u}_{n-1} sera le terme précédent : c'est le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite

On dit que \mathbf{u}_n est le terme général de la suite.

La suite elle-même est notée $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ou plus simplement (\mathbf{u}_n)

1. Notion de suite numérique

Pour les quatre suites, trouver une relation permettant de calculer le terme suivant \mathbf{u}_{n+1} en fonction du ou des précédents \mathbf{u}_n , \mathbf{u}_{n-1}

a) $5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; \dots$

b) $1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; \dots$

c) $0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; \dots$

d) $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; \dots$

1. Notion de suite numérique

Pour les quatre suites, trouver une relation

permettant de calculer le terme suivant \mathbf{u}_{n+1}

en fonction du ou des précédents \mathbf{u}_n , \mathbf{u}_{n-1}

a) 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; ... $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + 4$

b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; ... $\mathbf{u}_{n+1} = 2 \cdot \mathbf{u}_n$

c) 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ... $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + 2n + 1$

d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ... $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}$

1. Notion de suite numérique

a) 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; ... $\mathbf{u_{n+1} = u_n + 4}$

b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; ... $\mathbf{u_{n+1} = 2 \cdot u_n}$

c) 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ... $\mathbf{u_{n+1} = u_n + 2n + 1}$

d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ... $\mathbf{u_{n+1} = u_n + u_{n-1}}$

Peut-on trouver le 100^e terme de ces suites sans calculer les précédents ?

1. Notion de suite numérique

Le 100^e terme est **u_{99}**

a) 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; ... **$u_{99} = u_0 + 99 \times 4 = 401$**

b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; ... **$u_{99} = 2^{99} \approx 6 \times 10^{29}$**

c) 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ... **$u_{99} = 99^2 = 9801$**

d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ... **$u_{99} = ??$**

1. Notion de suite numérique

D1 Définir une suite c'est pour chaque entier $0, 1, 2, \dots, n$ de \mathbf{N} trouver un nombre correspondant : $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$.

Une suite est donc une fonction de \mathbf{N} dans \mathbf{R} : $n \rightarrow u(n) = u_n$

Expl :

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 11, u_5 = 16, u_6 = 22, \dots$$

vérifier que $u_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ et calculer u_{30} et u_{100}

$$v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 6, v_3 = 24, v_4 = 120, v_5 = 720, v_6 = 5040, \dots$$

vérifier que $v_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n \times (n+1) = (n+1)!$; calculer v_{10}

1. Notion de suite numérique

D1 Définir une suite c'est pour chaque entier $0, 1, 2, \dots, n$ de \mathbf{N} trouver un nombre correspondant : $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$.

Une suite est donc une fonction de \mathbf{N} dans \mathbf{R} : $n \rightarrow u(n) = u_n$

Expl :

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 11, u_5 = 16, u_6 = 22, \dots$$

$$u_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}; u_{30} = 466 \text{ et } u_{100} = 5051$$

$$v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 6, v_3 = 24, v_4 = 120, v_5 = 720, v_6 = 5040, \dots$$

$$v_n = (n+1)!; v_{10} = 39916800$$

2. Génération de suites numériques

D2 Une suite peut être définie par une formule **explicite**.

$$\text{Expl : } u_n = 3n + 1 ; v_n = 3^n ; w_n = (-1)^n ; t_n = \frac{5}{n+1} ; s_n = \frac{2n^2+9}{n^2+1}$$

Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	4	7	10	13	16	19	22	25
v_n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
w_n	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
t_n	5	2.5	$\frac{5}{3} \approx 1.7$	1.25	1	$\frac{5}{6} \approx 0.83$	$\frac{5}{7} \approx 0.71$	0.625	$\frac{5}{9} \approx 0.56$
s_n	9	5.5	3.4	2.7	$\frac{41}{17} \approx 2.4$	$\frac{59}{26} \approx 2.3$	$\frac{81}{37} \approx 2.2$	2.14	$\frac{137}{65} \approx 2.1$

2. Génération de suites numériques

D2 Une suite peut être définie par une formule **explicite**.

$$\text{Expl : } u_n = 3n + 1 ; v_n = 3^n ; w_n = (-1)^n ; t_n = \frac{5}{n+1} ; s_n = \frac{2n^2+9}{n^2+1}$$

On peut utiliser ce tableau de valeurs pour représenter la suite dans un repère orthogonal.

Représenter les cinq suites dans un repère.

Unité en abscisse : 1cm (ou 1GC) = 1

Unités en ordonnée :

pour (u_n) et (w_n) : 1cm (ou 1GC) = 1

pour (v_n) : 0.025 mm = 1 soit 1cm (ou 1GC) = 400

pour (t_n) et (s_n) : 2.5cm = 1 soit 1cm (ou 1GC) = 0.4

2. Génération de suites numériques

D3 Une suite peut être définie par une relation de **réurrence** :
on calcule un terme à partir du (ou des) termes précédents

Expl : $u_{n+1} = u_n + 5$; $v_{n+1} = 4v_n$; $w_{n+1} = 2w_n - 6$; $t_{n+1} = \frac{t_n + 4}{t_n + 1}$;

Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46
v_n	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
w_n	1	-4	-14	-34	-74	-154	-314	-634	-1274	-2554
t_n	1		$\frac{13}{7} \approx$		$\frac{121}{61} \approx$	$\frac{365}{182} \approx$	$\frac{1093}{547} \approx$	$\frac{3281}{1640} \approx$	$\frac{9841}{4921} \approx$	$\frac{29525}{14762} \approx$
		2.5	1.9	2.05	1.98	2.005	1.998	2.0006	1.9998	2.00007

2. Génération de suites numériques

D3 Une suite peut être définie par une relation de **réurrence** :
on calcule un terme à partir du (ou des) termes précédents

Expl de la suite de Fibonacci : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ avec $u_0 = u_1 = 1$

Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

3. Suites géométriques

Approche : intérêts composés.

Une somme d'argent déposée sur un livret bancaire est rémunérée à 2% par an.

On note u_0 la somme déposée et u_1 le capital obtenu après 1 an, u_2 après 2 ans, ... u_n après n ans.

Si $u_0 = 300$ €, calculer u_1 , u_2 , u_3 .

3. Suites géométriques

Approche : intérêts composés.

Une somme d'argent déposée sur un livret bancaire est rémunérée à 2% par an.

Si $u_0 = 300$ €, $u_1 = 306$ €, $u_2 = 312,12$ €, $u_3 = 318,36$ €

Ecrire une relation de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n

3. Suites géométriques

Approche : intérêts composés. Une somme d'argent déposée sur un livret bancaire est rémunérée à 2% par an.

$$u_0 = 300 \text{ €}, u_1 = 306 \text{ €}, u_2 = 312,12 \text{ €}, u_3 = 318,36 \text{ €}$$

Augmenter une somme de 2% c'est la multiplier par $1 + 2\%$
Chaque année la somme est donc multipliée par 1,02.

D'où la formule par récurrence : **$u_{n+1} = 1,02 \times u_n$**

Comment calculer u_{10} sans passer par les termes précédents ?

3. Suites géométriques

Approche : intérêts composés.

Une somme d'argent déposée sur un livret bancaire est rémunérée à 2% par an.

Si $u_0 = 300$ €, $u_1 = 306$ €, $u_2 = 312,12$ €, $u_3 = 318,36$ €

Chaque année la somme est multipliée par 1,02.

Donc $\mathbf{u_{n+1} = 1,02 \times u_n}$ c'est-à-dire :

$$u_1 = 1,02 u_0 ;$$

$$u_2 = 1,02 u_1 = 1,02^2 u_0 ;$$

$$u_3 = 1,02 u_2 = 1,02^3 u_0 ;$$

3. Suites géométriques

Approche : intérêts composés.

Une somme d'argent déposée sur un livret bancaire est rémunérée à 2% par an.

Si $u_0 = 300$ €, $u_1 = 306$ €, $u_2 = 312,12$ €, $u_3 = 318,36$ €

Chaque année la somme est donc multipliée par 1,02.

$$\mathbf{u_{n+1} = 1,02 \times u_n}$$

$$u_1 = 1,02 u_0 ;$$

$$u_2 = 1,02^2 u_0 ;$$

$$u_3 = 1,02^3 u_0 ;$$

D'où la formule explicite :

$$\mathbf{u_n = 1,02^n \times u_0}$$

3. Suites géométriques

D3 Une suite géométrique est définie par la relation de **réurrence** : $u_{n+1} = q \cdot u_n$.

Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par le même nombre **q** appelé raison de la suite.

Rq : on supposera toujours que $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ (cas sans intérêt)

Méthode : pour prouver qu'une suite est géométrique il suffit de vérifier que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (ne dépend pas de n)

3. Suites géométriques

T1 Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors sa formule explicite est : $u_n = u_0 \times q^n$

Remarque importante : quelquefois le premier terme de la suite est appelé u_1 . La formule explicite devient alors :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

3. Suites géométriques

T2 Si une quantité varie à chaque fois d'un même pourcentage, ses termes successifs sont les termes d'une suite géométrique.

Pour une augmentation de $t \%$, la raison est $q = 1 + t \%$.

Pour une diminution de $t \%$, la raison est $q = 1 - t \%$.

Remarque : n'oubliez pas que $t \% = \frac{t}{100} = 0,01 t$

3. Suites géométriques

Expl : la population d'une ville diminue de 3% chaque année.

En 2000, elle comptait 12000 habitants.

On appelle u_n la population de l'année 2000 + n.

u_0 est donc la population en 2000, u_1 en 2001, u_2 en 2002 ...

Prouver que la suite (u_n) est géométrique, donner sa raison q .

Ecrire une formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Ecrire une formule explicite : $u_n = f(n)$

En déduire la population en 2015.

3. Suites géométriques

Expl : la population d'une ville diminue de 3% chaque année.
Chaque année la population est multipliée par $1 - 3\% = 0,97$.
On multiplie donc à chaque fois u_n par le même nombre 0,97.

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = 0,97$.

Donc $u_{n+1} = 0,97 u_n$ or $u_0 = 12000$

Donc $u_n = 12000 \times 0,97^n$

En 2015, $n = 15$ et la population sera : $12000 \times 0,97^{15} \approx 7599$

3. Suites géométriques

Représenter graphiquement les suites :

$q > 1$ exemple : $u_n = 1.1^n$;

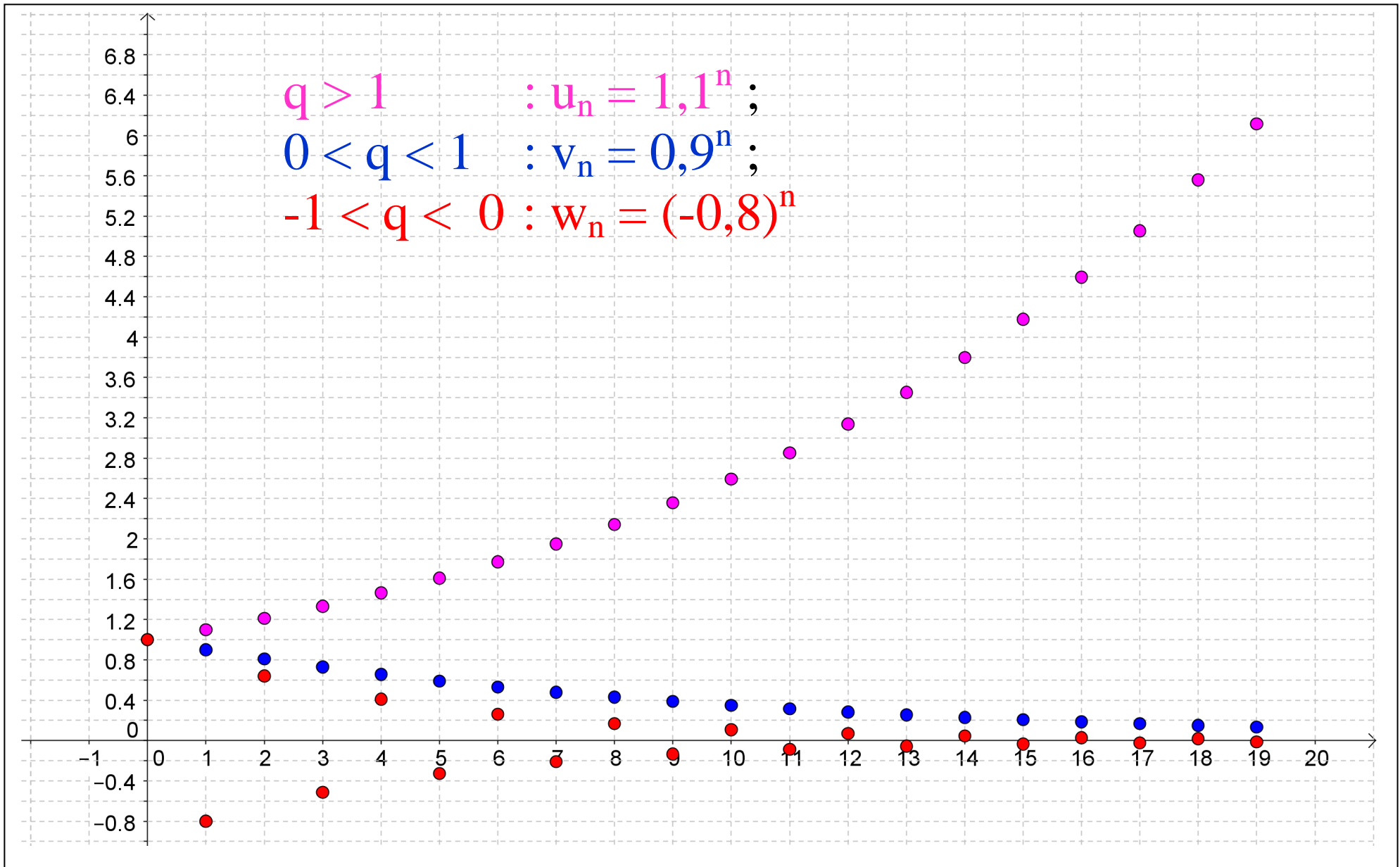
$0 < q < 1$ exemple : $v_n = 0,9^n$;

$-1 < q < 0$ exemple : $w_n = (-0,8)^n$

Abscisse : unité 1cm (ou 1GC)

Ordonnée : unité 10cm (ou 10GC)

5 - SUITES



3. Suites géométriques

Approche de la notion de limite d'une suite
(quand n devient très grand)

On observe :

$u_n = 1.1^n$ devient de plus en plus grand

$v_n = 0,9^n$ se rapproche de plus en plus de zéro

$w_n = (-0,5)^n$ se rapproche de zéro en oscillant

Si $q > 1$ et $u_0 > 0$: u_n tend vers $+\infty$

Si $0 < q < 1$: u_n tend vers 0

Si $-1 < q < 0$: u_n tend vers 0

FIN