

# Chapitre VII

## Les Suites

# 1. Notion de Suite

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

ex1 :  $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots)$

$u_0 = 1, u_3 = 3, u_{10} = ??? u_{20} = ??? u_{30} = ??? u_{50} = ???$

ex2 :  $(0, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 3, 0, 3, 1, 1, 2, 4, 0, 5, 1, 2, 2, 2, 3, \dots)$

$u_0 = 0, u_3 = 2, u_{10} = ??? u_{20} = ??? u_{30} = ??? u_{50} = ???$

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

ex1 :  $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots)$

$u_0 = 1, u_3 = 3, u_{10} = 5, u_{20} = 6, u_{30} = 8, u_{50} = 10, u_{100} = 14$

ex2 :  $(0, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 3, 0, 3, 1, 1, 2, 4, 0, 5, 1, 2, 2, 2, 3, \dots)$

$u_0 = 0, u_3 = 2, u_{10} = 1, u_{20} = 3, u_{50} = 1, u_{60} = 6, u_{100} = 7$

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

ex3 :

Nombre de diagonales d'un polygone régulier à  $n$  sommets :

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0, u_4 = 2, u_5 = ???, u_{10} = ???, u_{15} = ???$$

ex4 :

Suite de Fibonacci :  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$

$$u_0 = 1, u_3 = 3, u_{10} = ???, u_{15} = ???, u_{20} = ???$$

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

ex3 :

Nombre de diagonales d'un polygone régulier à  $n$  sommets :

$(0, 0, 0, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54, 65, 77, 90, \dots)$

$u_{20} = 170, u_{30} = 405, u_{50} = 1175, u_{100} = 4850$

ex4 :

Suite de Fibonacci :  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$

$u_0 = 1, u_3 = 3, u_{10} = 89, u_{15} = 987, u_{20} = 10946$

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

ex4 :  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$  suite de Fibonacci

$u_0 = 1, u_3 = 3, u_{10} = 89, u_{15} = 987, u_{20} = 10946$

ex5 : Suite des quotients des termes de la suite de Fibonacci :

$\left( \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \dots \right)$

Calculer les valeurs approchées à  $10^{-3}$  près

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

ex4 :  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$  suite de Fibonacci

$u_0 = 1, \dots, u_3 = 3, \dots, u_{10} = 89, u_{15} = 987$

ex5 : Suite des quotients des termes de la suite de Fibonacci :

$(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \dots)$

$(1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.616, 1.619, 1.618, 1.618\dots)$

# 1. Notion de Suite

**D1** : Une suite réelle est une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ .

notation :  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

$u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  sont les termes de la suite,  
 $0, 1, 2, \dots, n, \dots$  sont les rangs de ces termes  
par ex : on dit que  $u_5$  est le terme de rang 5

**Rq** : la suite peut commencer par  $u_0$  ou par  $u_1$ .

# 1. Notion de Suite

**D2** : Une suite est définie explicitement si elle est donnée naturellement par une fonction :  $u_n = f(n)$ .

# 1. Notion de Suite

**D2** : Une suite est définie explicitement si elle est donnée naturellement par une fonction :  $u_n = f(n)$ .

Ex6 : (0, 2, 4, 6, 8, .... ) s'écrit :  $u_n = 2n$

Ex7 : (1, 3, 5, 7, 9, .... ) s'écrit :  $u_n =$

Ex8 : (0, 1, 4, 9, 16, 25, .... ) :  $u_n =$

Ex9 : (1, 2, 4, 8, 16, 32, ... ) :  $u_n =$

Ex10 : (8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, ... ) :  $u_n =$

Ex11 :  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$  :  $u_n =$

# 1. Notion de Suite

**D2** : Une suite est définie explicitement si elle est donnée naturellement par une fonction :  $u_n = f(n)$ .

- Ex6 : (0, 2, 4, 6, 8, .... ) s'écrit :  $u_n = 2n$
- Ex7 : (1, 3, 5, 7, 9, .... ) s'écrit :  $u_n = 2n + 1$
- Ex8 : (0, 1, 4, 9, 16, 25, .... ) :  $u_n = n^2$
- Ex9 : (1, 2, 4, 8, 16, 32, ... ) :  $u_n = 2^n$
- Ex10 : (8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, ... ) :  $u_n = 2^{3-n} = 0.5^{n-3}$
- Ex11 :  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$  :  $u_n = \frac{1}{n+1}$

# 1. Notion de Suite

**D3** : Une suite est définie par récurrence si on connaît une méthode (une formule) permettant de calculer chaque terme à partir du précédent :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ ou } u_n = f(u_{n-1}).$$

Il faut alors connaître aussi le premier terme  $u_0$  (ou  $u_1$ ).

C'est un calcul de proche en proche.

# 1. Notion de Suite

**D3** : Une suite est définie par récurrence si on connaît une méthode (une formule) permettant de calculer chaque terme à partir du précédent :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ ou } u_n = f(u_{n-1}).$$

Il faut alors connaître aussi le premier terme  $u_0$  (ou  $u_1$ ).  
C'est un calcul de proche en proche.

Ex12 :  $u_0 = 8$  et  $\forall n, u_{n+1} = 2u_n - 9$ . Calculer  $u_6$

Ex13 :  $u_1 = 5$  et  $\forall n, u_{n+1} = 2 \times \frac{1 + u_n}{u_n}$ . Calculer  $u_4$

# 1. Notion de Suite

**D3** : Une suite est définie par récurrence si on connaît une méthode (une formule) permettant de calculer chaque terme à partir du précédent :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ ou } u_n = f(u_{n-1}).$$

Il faut alors connaître aussi le premier terme  $u_0$  (ou  $u_1$ ).  
C'est un calcul de proche en proche.

Ex12 :  $u_0 = 8$  et  $\forall n, u_{n+1} = 2u_n - 9$ .  $u_6 = -55$

Ex13 :  $u_1 = 5$  et  $\forall n, u_{n+1} = 2 \times \frac{1 + u_n}{u_n}$ .  $u_4 = 0.944$

# 1. Notion de Suite

**D3** : Une suite est définie par récurrence si on connaît une méthode (une formule) permettant de calculer chaque terme à partir du précédent :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ ou } u_n = f(u_{n-1}).$$

Exemples :

Chaque année la population d'une ville augmente de 1000.

Ex14 : Si  $u_n$  est la population pour l'année  $n$ , alors  $u_{n+1} =$

Ex15 : Si elle augmente de 5 % par an alors  $u_{n+1} =$

Ex16 : Si elle diminue de 5 % par an alors  $u_{n+1} =$

# 1. Notion de Suite

**D3** : Une suite est définie par récurrence si on connaît une méthode (une formule) permettant de calculer chaque terme à partir du précédent :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ ou } u_n = f(u_{n-1}).$$

Exemples :

Chaque année la population d'une ville augmente de 1000.

Ex14 : Si  $u_n$  est la population pour l'année  $n$ , alors  $u_{n+1} = u_n + 1000$ .

Ex15 : Si elle augmente de 5 % par an alors  $u_{n+1} = 1.05 \times u_n$

Ex16 : Si elle diminue de 5 % par an alors  $u_{n+1} = 0.95 \times u_n$ .

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$$

(on ajoute donc à chaque fois le même nombre).  
 $r$  est appelé la raison de la suite.

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que  
pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$

Ex17 : 0, 2, 4, 6, 8, ... ou 1, 3, 5, 7, 9, ... : la raison est ???

Ex18 : L'ensemble des entiers naturels,  $\mathbf{N}$  : la raison est ???

Ex19 : La distance parcourue à vitesse constante 90km/h :

$$u_0 = 0, u_1 = 90, u_2 = 180, u_3 = 270, \dots \text{ la raison est ???}$$

Ex20 : Longueur des arcs successifs d'une spirale à 4 centres :

$$u_0 = 0, u_1 = \pi/2, u_2 = \pi, u_3 = 3\pi/2, u_4 = 2\pi, \dots r = ???$$

Ex21 : Un plongeur en apnée descend à quinze mètres. Il décide d'améliorer sa profondeur de deux mètres chaque jour.

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$$

**T1** : La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$ , si et seulement si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_0 + \mathbf{n}\mathbf{r}}$$

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que  
pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$

**T1** : La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$  si et seulement si  
 $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_0 + \mathbf{n}r}$

Preuve :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

.....

$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + n \times r$$

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

**T1** : La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$  si et seulement si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Preuve :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

.....

$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + n \times r$$

Réciproquement : si  $u_n = u_0 + nr$  (pour tout  $n \in \mathbf{N}$ )

alors  $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = u_n + r$

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$$

**T1** : La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$ , si et seulement si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_0 + \mathbf{n}\mathbf{r}}$$

$$\text{Rq : } u_n = u_1 + (n - 1)r$$

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que  
pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$

**T1** : La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$  ssi :  
pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$

**T2** : Si  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$  alors :  
 $\forall n, \forall p, (n, p \in \mathbf{N})$   $\boxed{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_p = (\mathbf{n} - \mathbf{p})\mathbf{r}}$

## 2. Suites arithmétiques

**D4** : Une suite est arithmétique s'il existe un réel  $r$  tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{r}}$$

**T1** : La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$  ssi :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_0 + \mathbf{n}\mathbf{r}}$$

**T2** : Si  $(u_n)$  est arithmétique, de raison  $r$  alors :

$$\forall n, \forall p, (\in \mathbf{N}) \quad \boxed{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_p = (\mathbf{n} - \mathbf{p})\mathbf{r}}$$

Preuve : appliquer T1

## 2. Suites arithmétiques

T3 : La somme

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

## 2. Suites arithmétiques

T3 : La somme

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve (de Gauss) :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

donc  $2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$

d'où  $2S_n = n(n+1)$

## 2. Suites arithmétiques

T3 : La somme

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

T4 : La somme de k termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à k fois la moyenne entre le premier et le dernier.

par exemple avec  $k = n$  :

$$u_1 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$$

ou avec  $k = n + 1$  :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

## 2. Suites arithmétiques

**T4** : La somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à  $n$  fois la moyenne entre le premier et le dernier.

par exemple avec  $k = n$  : 
$$\mathbf{u_1 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}}$$

ou avec  $k = n + 1$  : 
$$\mathbf{u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}}$$

Ex22 :  $13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34 = 8 \frac{13 + 34}{2} = 188$

## 2. Suites arithmétiques

T4 :

$$\mathbf{u_1 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}}$$

Preuve :  $u_2 = u_1 + r$  ;  $u_3 = u_1 + 2r$  ; ...  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

donc

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$$
$$S_n = n u_1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1)r$$
$$S_n = n u_1 + \frac{n(n - 1)}{2} r$$
$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n - 1)r] = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

## 2. Suites arithmétiques

T4 :

$$\boxed{\mathbf{u_1 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}}$$

Preuve :  $u_1 + u_n = u_1 + u_1 + (n - 1)r = 2u_1 + (n - 1)r$

$$u_2 + u_{n-1} = u_1 + r + u_1 + (n - 1 - 1)r = 2u_1 + (n - 1)r$$

etc.  $u_3 + u_{n-2} = u_1 + 2r + u_1 + (n - 2 - 1)r = 2u_1 + (n - 1)r$

donc  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_3 + u_2 + u_1$$

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \dots = n(u_1 + u_n)$$

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  non nul tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\boxed{\mathbf{u}_{n+1} = q\mathbf{u}_n}$$

(on multiplie donc à chaque fois par le même nombre).  
 $q$  est appelé la raison de la suite.

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  non nul tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$

Ex23 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...  $q = ???$

Ex24 : On place une somme de 2000 € à intérêts composés de 3% l'an.  $u_0$  est la somme initiale et  $u_n$  la somme après  $n$  années.  
 $u_1 = ???$  ;  $u_2 = ???$  ;  $u_3 = ???$  ...

Pourquoi sont-elles géométriques ? Quelle est leur raison ?

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  non nul tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$

Ex25 :  $v_n$  est la population d'une ville en l'année 2000 + n

En 2000,  $v_0 = 300\ 000$  ; elle diminue de 2% par an.

$$v_1 = ??? ; v_2 = ??? ; v_3 = ??? \dots$$

Ex26 : les fractals

- l'ensemble de Cantor
- la courbe de Von Koch (flocon de neige)

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  non nul tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$

**T5** : La suite  $(u_n)$  est géométrique, de raison  $q$  si et seulement si  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  non nul tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = qu_n$

**T5** : La suite  $(u_n)$  est géométrique, de raison  $q$  si et seulement si  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = u_0 \cdot q^n$

Preuve :

si  $u_{n+1} = q u_n (\forall n \in \mathbf{N})$   
 alors  $u_1 = q u_0$  et on  
 $u_2 = q u_1$  multiplie  
 ..... les  
 $u_n = q u_{n-1}$  lignes

Réciproquement  
 si  $u_n = u_0 q^n (\forall n \in \mathbf{N})$   
 alors  $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$   
 $u_{n+1} = u_0 q^n q$   
 $u_{n+1} = q u_n (\forall n \in \mathbf{N})$

$u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n = q^n u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1}$  soit  $u_n = u_0 q^n (\forall n \in \mathbf{N})$

et on simplifie car  $q \neq 0$  donc si  $u_0 \neq 0$  alors  $\forall n, u_n \neq 0$   
 (si  $u_0 = 0$  c'est trivial)

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  non nul tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$

**T5** : La suite  $(u_n)$  est géométrique, de raison  $q$  si et seulement si  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$

Rq :  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  tel que  
pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$

**T5** : La suite  $(u_n)$  est géométrique, de raison  $q$  si et seulement si  
 $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$

**T6** : Si  $(u_n)$  est géométrique, de raison  $q$  alors :  
 $\forall n, \forall p :$   $\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$

### 3. Suites géométriques

**D5** : Une suite est géométrique si il existe un réel  $q$  non nul tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$

**T5** : La suite  $(u_n)$  est géométrique, de raison  $q$  si et seulement si  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$

**T6** : Si  $(u_n)$  est géométrique, de raison  $q$  alors :  $\forall n, \forall p :$   $\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$

Preuve : utiliser T5

### 3. Suites géométriques

T7 : Si  $x \neq 1$ , les sommes

$$\mathbf{T_{n+1} = 1 + x + x^2 + .. + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

$$\mathbf{T_n = 1 + x + x^2 + .. + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}}$$

Ex27 :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = ???$$

### 3. Suites géométriques

T7 : Si  $x \neq 1$ , les sommes

$$\mathbf{T_{n+1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

$$\mathbf{T_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}}$$

Ex27 :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 =$$
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = 2^{11} - 1$$

### 3. Suites géométriques

On retrouve les identités remarquables  $\forall x \in \mathbf{R}$  :

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$$

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{1} + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \dots + \mathbf{x}^n = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{x}^{n+1}}{\mathbf{1} - \mathbf{x}} \quad x \neq 1$$

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{1} + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \dots + \mathbf{x}^{n-1} = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{x}^n}{\mathbf{1} - \mathbf{x}} \quad x \neq 1$$

### 3. Suites géométriques

T7 : Si  $x \neq 1$ ,

$$\mathbf{T_{n+1} = 1 + x + x^2 + .. + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

Preuve :  $T_{n+1} = 1 + x + x^2 + .. + x^n$   
 $xT_{n+1} = x + x^2 + x^3 + .. + x^{n+1}$

donc  $xT_{n+1} - T_{n+1} = x^{n+1} - 1$

soit  $T_{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$  (si  $x \neq 1$ )

### 3. Suites géométriques

T7 : Si  $x \neq 1$ , 
$$\mathbf{T_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}}$$

T8 : La somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q$  est égale au premier terme multiplié par  $\frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

commençant à  $u_1$  : 
$$\mathbf{u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

commençant à  $u_0$  : 
$$\mathbf{u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

### 3. Suites géométriques

**T8** : La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est égale au premier terme multiplié par  $\frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

commençant à  $u_1$  : 
$$\mathbf{u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Ex28 :  $32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = ???$

### 3. Suites géométriques

**T8** : La somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q$  est égale au premier terme multiplié par  $\frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

par exemple :

$$\mathbf{u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Ex28 :  $32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$   
 $= 32 \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 2^5 = 2016$

### 3. Suites géométriques

**T8** : La somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q$  est égale au premier terme multiplié par  $\frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

par exemple :

$$\mathbf{u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Preuve :  $u_1 + \dots + u_n = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots + u_1q^{n-1}$   
 $= u_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

## 4. Sens de variation d'une suite

**D6** : La suite  $(u_n)$  est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$$

## 4. Sens de variation d'une suite

**D6** : La suite  $(u_n)$  est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$$

de même strictement décroissante,  
monotone = croissante ou décroissante.

## 4. Sens de variation d'une suite

**D6** : La suite  $(u_n)$  est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$$

**Ex 29 à 33 :**

$$q_n = n^2 + 1 : ???$$

$$r_n = 1/n : ???$$

$$s_n = 3n + 5 : ???$$

$$t_n = 0.1 \times 2^n : ???$$

$$u_n = 9 \times 0.5^n : ???$$

**Ex 34 à 38 :**

$$v_n = (-1)^n : ???$$

$$w_n = \cos(\pi n/6) : ???$$

$$x_{n+1} = 2x_n - 1 : ???$$

$$y_{n+1} = 2y_n : ???$$

$$z_{n+1} = 0.5z_n : ???$$

## 4. Sens de variation d'une suite

**D6** : La suite  $(u_n)$  est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$$

**Ex 29 à 33 :**

$$q_n = n^2 + 1 : \text{str croiss}$$

$$r_n = 1/n : \text{str décroiss}$$

$$t_n = 3n + 5 : \text{str croiss}$$

$$t_n = 0.1 \times 2^n : \text{str croiss}$$

$$u_n = 9 \times 0.5^n : \text{str décroiss}$$

**Ex 34 à 38 :**

$$v_n = (-1)^n : \text{non monotone}$$

$$w_n = \cos(\pi n/6) : \text{non monotone}$$

$$x_{n+1} = 2x_n - 1 : \text{\u00e7a d\u00e9pend de } x_0$$

$$y_{n+1} = 2y_n : \text{\u00e7a d\u00e9pend de } y_0$$

$$z_{n+1} = 0.5z_n : \text{\u00e7a d\u00e9pend de } z_0$$

## 4. Sens de variation d'une suite

**T9** : Si  $\forall n, u_n > 0$  alors  $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

preuve :  $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

## 4. Sens de variation d'une suite

**T9** : Si  $\forall n, u_n > 0$  alors  $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

**Ex39** :  $\forall n, u_n = \frac{n!}{2^{3n}}$  ; prouver que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{8}$  et conclure

## 4. Sens de variation d'une suite

**T9** : Si  $\forall n, u_n > 0$  alors  $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

**Ex39** :  $\forall n, u_n = \frac{n!}{2^{3n}}$  ; prouver que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{8}$  ;

$\forall n, u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow n+1 > 8 \Leftrightarrow n > 7$

la suite est décroissante jusqu'à  $u_7 = u_8$  et croissante au-delà.

## 4. Sens de variation d'une suite

**T10** : Soit  $(U_n)$  arithmétique de raison  $r$ , alors

$r > 0 \Leftrightarrow (U_n)$  strictement croissante

$r < 0 \Leftrightarrow (U_n)$  strictement décroissante

Preuve :  $U_{n+1} - U_n = r$

## 4. Sens de variation d'une suite

**T11** : Soit  $(U_n)$  géométrique de raison  $q > 0$ , avec  $U_0 > 0$  alors :

$q > 1 \Leftrightarrow (U_n)$  strictement croissante

$0 < q < 1 \Leftrightarrow (U_n)$  strictement décroissante

Preuve :  $q > 0$ , et  $U_0 > 0$  donc  $\forall n, u_n > 0$ .

On peut utiliser T9 avec  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

## 4. Sens de variation d'une suite

**T12** : Soit  $U_n = f(n)$ ,  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$   
si  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}^+$  alors  $(U_n)$  l'est aussi.  
si  $f$  strictement décroissante sur  $\mathbf{R}^+$  alors  $(U_n)$  l'est.

Attention : Réciproque fausse.

contre ex :  $f(x) = x + 5\cos(2\pi x)$ ,  $U_n = n + 5$   
 $(U_n)$  est strictement croissante, mais  $f$  ne l'est pas.

De plus T12 faux pour  $U_{n+1} = f(U_n)$  ;

contre-ex :  $f(x) = x/2 + 4$  et  $U_0 = 16$ .

$f$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}^+$  mais  $(U_n)$  ne l'est pas.

## 5. Notion de limite d'une suite

**D7.** Soit  $(u_n)_n$  une suite,  $M$  et  $m$  deux réels.

$(u_n)_n$  est dite :

- Majorée par  $M$  si :  $\forall n, u_n \leq M$  ;  $M$  est un Majorant de  $(u_n)_n$
- minorée par  $m$  si :  $\forall n, u_n \geq m$  ;  $m$  est un minorant de  $(u_n)_n$
- Bornée si  $(u_n)_n$  est à la fois Majorée et minorée

## 5. Notion de limite d'une suite

Limite finie : idée d'accumulation des termes de la suite autour d'une valeur (d'un nombre)

Limite infinie : idée du dépassement de toute valeur (de tout nombre) aussi grand soit-il, à partir d'un certain rang.

**Ex 40 à 49 :**

$$\lim 1/n = ???$$

$$\lim 1/\sqrt{n} = ???$$

$$\lim 2n + 3 = ???$$

$$\lim 2^n = ???$$

$$\lim (-1)^n = ???$$

$$\lim 1/n^2 = ???$$

$$\lim 5 - 1/n = ???$$

$$\lim n^2 = ???$$

$$\lim -\sqrt{n} = ???$$

$$\lim \cos(n) = ???$$

## 5. Notion de limite d'une suite

Limite finie : idée d'accumulation des termes de la suite autour d'une valeur (d'un nombre)

Limite infinie : idée du dépassement de toute valeur (de tout nombre) aussi grand soit-il, à partir d'un certain rang.

**Ex 40 à 49 :**

$$\lim 1/n = 0$$

$$\lim 1/\sqrt{n} = 0$$

$$\lim 2n + 3 = +\infty$$

$$\lim 2^n = +\text{inf}$$

$$\lim (-1)^n = \text{pas de limite}$$

$$\lim 1/n^2 = 0$$

$$\lim 5 - 1/n = 5$$

$$\lim n^2 = +\infty$$

$$\lim -\sqrt{n} = -\infty$$

$$\lim \cos(n) = \text{pas de limite}$$

## 5. Notion de limite d'une suite

**T13** : Soit  $(U_n)$  géométrique de raison  $q$  avec  $U_0 > 0$  et  $q > 0$ .

si  $q > 1$  alors  $\lim U_n = +\infty$

si  $0 < q < 1$  alors  $\lim U_n = 0$

**Ex50** :  $u_n = 7 \times 1,2^n$  ;  $\lim u_n = +\infty$

**Ex51** :  $u_n = 700 \times 0,8^n$  ;  $\lim u_n = 0$

**FIN**