Chapitre VI

Dérivée d'une Fonction

1. Dérivée et tangente

1. Dérivée et tangente

Rappel : Une droite d, non verticale, a une équation réduite :

$$y = mx + p.$$

où m est le coefficient directeur (la pente) de d.

T1 : Soit A et B deux points de d, alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

T2 : Le signe de m donne les variations de la fonction affine :

$$x \longmapsto mx + p$$

1. Dérivée et tangente

(Dans ce chapitre, I est un intervalle de **R**)

D1 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle I,

a et h sont deux réels tels que : $h \neq 0$, $a \in I$ et $a + h \in I$.

le taux de variation de f entre a et a+h est :

$$\boxed{T_f(a\,;h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

1. Dérivée et tangente

D1 : $h \neq 0$, $a \in I$ et $a + h \in I$.

Taux de variation de f entre a et a+h : $\boxed{T_f(a;h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

$T_f(a\,;h)$ est le coefficient directeur de la droite (AM),
avec : $A(a\,;f(a))$ et $M(a+h\,;f(a+h))$.

ex1 : pour $f(x) = x^2$, $T_f(1\,;h) = \dfrac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2 + h$

et si h tend vers 0 alors $T_f(1\,;h)$ tend vers 2,
ce que l'on note : si $h \to 0$ alors $T_f(1\,;h) \to 2$

1. Dérivée et tangente

D1 : $h \neq 0$, $a \in I$ et $a + h \in I$.

Taux de variation de f entre a et a+h : $\boxed{T_f(a;h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

$T_f(a ; h)$ est le coefficient directeur de la droite (AM), avec : A(a ; f(a)) et M(a+h ; f(a+h)).

ex2 :

pour $f(x) = x^3$, $T_f(2 ; h) = \dfrac{(2 + h)^3 - 2^3}{h} = 12 + 6h + h^2$

et si $h \to 0$ alors $T_f(2 ; h) \to 12$

1. Dérivée et tangente

D1 : $h \neq 0$, $a \in I$ et $a + h \in I$.

Taux de variation de f entre a et a+h : $\boxed{T_f\,(a;h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

$T_f\,(a\ ;\ h)$ est le coefficient directeur de la droite (AM),
avec : $A(a\ ;\ f(a))$ et $M(a+h\ ;\ f(a+h))$.

Remarque :
Si h devient proche de zéro, M se rapproche de A et, à la limite,
la droite (AM) devient "tangente" à la courbe de f au point A.

1. Dérivée et tangente

D2 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle I,
a et h sont deux réels tels que : $h \neq 0$, $a \in I$ et $a + h \in I$.

Si il existe un réel L tel que $T_f\,(a\,;\,h)$ a pour limite L quand $h \to 0$,
on dit que f est dérivable en a
et que L est la dérivée de f en a, que l'on note : $f\,'(a)$.

Autrement dit, la **dérivée de f en a** est
la limite (quand h tend vers 0)
du taux de variation de f entre a et a+h :

$$\mathbf{T_f\,(a;h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

1. Dérivée et tangente

D2 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle I,
a et h sont deux réels tels que : $h \neq 0$, $a \in I$ et $a + h \in I$.

Si il existe un réel L tel que $T_f(a ; h)$ a pour limite L quand $h \to 0$,
on dit que f est dérivable en a
et que L est la dérivée de f en a, que l'on note : f '(a).

Notation :

$$\boxed{\mathbf{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}}$$

1. Dérivée et tangente

D2 :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

ex3 : $f(x) = 3x^2 + 5x - 9$; $T_f(a\,;h) = 6a + 5 + 3h$

$$\lim_{h \to 0} T_f(a\,;h) = 6a + 5 \text{ donc } f'(a) = 6a + 5$$

1. Dérivée et tangente

T3 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, $a \in I$
et $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère.
A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a soit A(a ; f(a)).

Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est la droite passant par A, de coefficient directeur f '(a).
Son équation réduite est donc :

$$\boxed{\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}}$$

preuve :

1. Dérivée et tangente

T3 : f définie sur I, $a \in I$, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f, $A(a\,;\,f(a)) \in \mathscr{C}_f$

Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$\boxed{\mathbf{y = f\,'(a)(x - a) + f(a)}}$$

preuve : l'équation de T est de la forme $y = mx + p$

avec $m = f\,'(a)$ donc $y = f\,'(a)\,x + p$

de plus $A \in T$ donc $f(a) = a.f\,'(a) + p$ soit $p = f(a) - a.f\,'(a)$

d'où T : $y = f\,'(a)x + f(a) - a.f\,'(a)$ soit $y = f\,'(a)(x - a) + f(a)$

1. Dérivée et tangente

T3 : f définie sur I, a $\in$ I, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f, A(a ; f(a)) $\in$ $\mathscr{C}_f$

Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$\boxed{\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}}$$

Ainsi f '(a), la dérivée de f en a, est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe de f, au point d'abscisse a.

Voilà l'interprétation géométrique de la dérivée.

1. Dérivée et tangente

T3 : f définie sur I, a $\in$ I, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f, A(a ; f(a)) $\in \mathscr{C}_f$

Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$\boxed{\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}}$$

ex4 : déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f : $x \longmapsto x^3$ en son point d'abscisse 2.

On a vu que f '(2) = 12 or f(2) = 2^3 = 8

d'où l'équation y = 12(x – 2) + 8 soit y = 12x – 16

2. Calcul des dérivées

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

D3 : Soit une fonction f définie sur I, dérivable en tout a $\in$ I, on peut alors définir sur I la fonction dérivée de f par :

$$\boxed{\mathbf{f\,' : x \longmapsto f\,'(x)}}$$

ex5 : pour $f(x) = x^2$, on a vu (ex1) que f '(1) = 2.
De même f '(2) = 4, f '(3) = 6, etc.… f '(a) = 2a … d'où f '(x) = 2x.

ex6 : $f(x) = 3x^2 + 5x – 9$, on a vu (ex3) que f '(a) = 6a + 5
d'où f '(x) = 6x + 5

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T4 : Les fonctions affines f : $x \longmapsto \boxed{\mathbf{mx + p}}$ sont dérivables sur **R** et leur dérivée s'écrit : $\boxed{\mathbf{f\,'(x) = m}}$

ex7 : si f(x) = 7x – 9, alors f '(x) = 7
si g(x) = -5x + 12, alors g '(x) = -5.

preuve : f(x) = mx + p, $T_f(a\,;h) = \dfrac{m(a+h) + p - (ma + p)}{h} = m$

m ne dépend pas de h donc $\lim\limits_{h \to 0} m = m$,

$$\forall a \in \mathbf{R},\ f\,'(a) = \lim_{h \to 0} T_f(a\,;h) = m.$$

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T4 : Les fonctions affines $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{mx + p}}$ sont dérivables sur **R** et leur dérivée s'écrit : $\boxed{\mathbf{f\,'(x) = m}}$

ex7 : si $f(x) = 7x - 9$, alors $f\,'(x) = 7$
si $g(x) = -5x + 12$, alors $g\,'(x) = -5$.

Cas Particuliers :

la dérivée de la fonction linéaire $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{mx}}$ est la constante $\boxed{\mathbf{m}}$.

la dérivée de la fonction linéaire $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{x}}$ est la constante $\boxed{\mathbf{1}}$.

la dérivée de la fonction constante $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{p}}$ est égale à $\boxed{\textbf{zéro}}$.

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T5 : La fonction carré $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{x^2}}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(x) = \boxed{\mathbf{2x}}$.

preuve : $T_f(a,h) = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h$

et $\forall a \in \mathbf{R}$, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} 2a + h = 2a$.

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T6 : Les fonctions trinômes f : $x \longmapsto \boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c}}$ sont dérivables sur **R** et $f'(x) = \boxed{\mathbf{2ax + b}}$.

preuve : $T_f(\alpha\,;h) = \dfrac{a(\alpha + h)^2 + b(\alpha + h) + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c)}{h}$

$= 2a\alpha + b + ah$

et $f'(\alpha) = \lim\limits_{h \to 0} 2a\alpha + b + ah = 2a\alpha + b$.

ex8 : $f(x) = 5x^2 - 3x + 9 \Rightarrow f'(x) = 10x - 3$;
$g(x) = 18 - 2x^2 \Rightarrow g'(x) = -4x$;
$h(x) = 7x - 4x^2 \Rightarrow h'(x) = 7 - 8x$

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

Résumé :

les fonctions suivantes sont dérivables sur **R**

affines $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{mx + p}}$ et $f\,'(x) = \boxed{\mathbf{m}}$.

carré $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{x^2}}$ et $f\,'(x) = \boxed{\mathbf{2x}}$.

trinômes $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c}}$ et $f\,'(x) = \boxed{\mathbf{2ax + b}}$.

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T7 : La fonction cube f : x $\longmapsto$ $\boxed{\mathbf{x^3}}$ est dérivable sur **R** et f '(x) = $\boxed{\mathbf{3x^2}}$.

preuve : on utilise les identités remarquables à connaitre.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$T_f\,(a\ ;\ h) = \frac{(a + h)^3 - a^3}{h} = \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$$

$$\text{et } \forall a \in \mathbf{R},\ f\,'(a) = \lim_{h \to 0} T_f\,(a\ ;\ h) = 3a^2.$$

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T8 : Pour $n \in \mathbf{N}$, les fonctions puissances $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{x^n}}$ sont dérivables sur **R** et $f'(x) = \boxed{\mathbf{nx^{n-1}}}$.

preuve : on utilise $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

ex8 : $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$;
$f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$.

Rq2 : ce résultat est valable pour n entier négatif, mais sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T9 : La fonction inverse $f : x \longmapsto \boxed{\mathbf{\frac{1}{x}}}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et $f'(x) = \boxed{\mathbf{\frac{-1}{x^2}}}$

Preuve : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{1}{h} \times \left[\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}\right]$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{a - (a+h)}{(a+h)a} = \frac{-1}{(a+h)a}$$

et pour tout $a \neq 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{(a+h)a} = \dfrac{-1}{a^2}$

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

T10 : La fonction racine $f : x \longmapsto \boxed{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

et $f'(x) = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

Preuve : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad = \dfrac{1}{h} \times \left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{a + h - a}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

et $\forall a > 0$, $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

2. Calcul des dérivées (fonctions de référence)

Fonction f(x)	Dérivée f '(x)	Validité
$mx + p$	m	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\frac{1}{x^n}$ ou x^{-n}	$\frac{-n}{x^{n+1}}$ ou $-nx^{-n-1}$	$x \neq 0, n \in \mathbb{N}$

3. Opérations sur les dérivées

3. Opérations sur les dérivées (I est un intervalle de **R**)

T11 : La somme de deux fonctions dérivables sur I est dérivable sur I et sa dérivée est égale à la somme des dérivées.

$$\boxed{\mathbf{(u + v)' = u' + v'}}$$

ex9 : $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} - \sqrt{x} \Rightarrow f\,'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Preuve : $\frac{(u(a+h) + v(a+h)) - (u(a) + v(a))}{h}$

$$= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

dont la limite est : $u'(a) + v'(a)$, quand h tend vers 0.

3. Opérations sur les dérivées

T11 : La somme de deux fonctions dérivables sur I est dérivable sur I et sa dérivée est égale à la somme des dérivées.

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Attention :

T11 est vrai pour une différence mais totalement faux pour un produit ou un quotient de deux fonctions.

3. Opérations sur les dérivées

T12 :

Si on multiplie une fonction f dérivable sur I par une constante k, la fonction kf obtenue, est aussi dérivable sur I et sa dérivée est celle de f multipliée par k.

$$\boxed{\mathbf{(k.u)' = k.u'}}$$

ex10 : $f(x) = 7x^3 \Rightarrow f\,'(x) = 21x^2$

$$g(x) = \frac{12}{x} \Rightarrow g\,'(x) = -\frac{12}{x^2}$$

Preuve : $\dfrac{k.u(a+h) - k.u(a)}{h} = k.\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$

qui tend vers $k.u'(a)$ quand $h \to 0$

3. Opérations sur les dérivées

T13 : Dérivée d'un produit

Si deux fonctions u et v sont dérivables sur I,

alors leur produit est dérivable sur I et $\boxed{\mathbf{(uv)' = u'v + uv'}}$

ex11 : $f(x) = x^2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2{,}5x\sqrt{x}$

$g(x) = (x^3 + 7).\dfrac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 3x^2.\dfrac{1}{x} + (x^3 + 7).\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x - \dfrac{7}{x^2}$

3. Opérations sur les dérivées

T13 : Si deux fonctions u et v sont dérivables sur I, alors leur produit est dérivable sur I et $\boxed{\mathbf{(uv)' = u'v + uv'}}$

Preuve : $\dfrac{u(a+h).v(a+h) - u(a).v(a)}{h}$

$$= \frac{u(a+h).v(a+h) - u(a).v(a+h)}{h} + \frac{u(a).v(a+h) - u(a).v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.v(a+h) + u(a).\frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

qui tend vers $u'(a).v(a) + u(a).v'(a)$. (quand $h \to 0$).

3. Opérations sur les dérivées

T13 : Dérivée d'un produit

Si deux fonctions u et v sont dérivables sur I,
alors leur produit est dérivable sur I et $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

Cas Particuliers : $(u^2)' = 2uu'$ et $(u^3)' = 3u^2u'$, etc…

Attention : la dérivée d'un produit n'est pas égal au produit des dérivées.

3. Opérations sur les dérivées

T13 : Si deux fonctions u et v sont dérivables sur I, alors leur produit est dérivable sur I et $\boxed{\mathbf{(uv)' = u'v + uv'}}$

T14 : Si la fonction u est dérivable sur I, et $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $\boxed{\mathbf{(u^n)' = n.u^{n-1}.u'}}$

ex12 : $f(x) = (x^2 - 3x + 4)^5 \Rightarrow f'(x) = 5.\,(x^2 - 3x + 4)^4.(2x - 3)$

$g(x) = (3x - 5)^8 \Rightarrow g'(x) = 24.(3x - 5)^7$

3. Opérations sur les dérivées (I est un intervalle de **R**)

T15 : Si la fonction v est dérivable et jamais nulle sur I,

alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}}$

ex13 : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+7}$; $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 7 \neq 0$ donc $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+7)^2}$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$; I =]-3 ; 3[; donc sur I $g'(x) = \dfrac{-2x}{x^2-9}$

$h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; I =]0 ; +∞[, $\sqrt{x} \neq 0$ donc $h'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

3. Opérations sur les dérivées (I est un intervalle de R)

T15 : Si la fonction v est dérivable et jamais nulle sur I,

alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$

Preuve : $\frac{1}{h}\times\left(\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}\right) = \frac{1}{h}\times\frac{v(a) - v(a+h)}{v(a+h).v(a)}$

$$= \frac{-1}{v(a+h).v(a)} \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

enfin $\lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{v(a+h).v(a)} = \frac{-1}{[v(a)]^2}$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

3. Opérations sur les dérivées (I est un intervalle de **R**)

T16 : Si les fonctions u et v sont dérivables sur I,
et si $v(x) \neq 0$ pour tout x de I,

alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

ex14 : $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 7}$: $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 7 > 0$.

Soit :

$u(x) = 5x$	$\Rightarrow u'(x) = 5$
$v(x) = x^2 + 7$	$\Rightarrow v'(x) = 2x$

donc $f'(x) = \frac{5(x^2+7) - 2x.5x}{(x^2 + 7)^2} = \frac{35 - 5x^2}{(x^2 + 7)^2}$

3. Opérations sur les dérivées (I est un intervalle de **R**)

T16 : Si les fonctions u et v sont dérivables sur I,
et si $v(x) \neq 0$ pour tout x de I,
alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Preuve : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ et on applique T13 et T15 soit

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + \left(\frac{-v'}{v^2}\right) \times u = \frac{u'v}{v^2} - \frac{v'u}{v^2}$$

3. Opérations sur les dérivées (I est un intervalle de **R**)

T11 : $(u + v)' = u' + v'$ **T12 :** $(\lambda.u)' = \lambda.u'$ **T13 :** $(u.v)' = u'.v + u.v'$ **T14 :** $(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$	**T15 :** $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$ **T16 :** $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

4. Application des dérivées

4. Application des dérivées (I est un intervalle de **R**)

T17 : Soit f une fonction dérivable sur I et f ' sa dérivée

Si **f '** est **sur I**	alors **f** est **sur I**
strictement positive *	strictement croissante
strictement négative *	strictement décroissante
nulle	constante

** (sauf peut-être en quelques points isolés où f ' est nulle)*

4. Application des dérivées

T17 : Soit f une fonction dérivable sur I et f ' sa dérivée

Si **f '** est **sur I**	alors **f** est **sur I**
strictement positive *	strictement croissante
strictement négative *	strictement décroissante
nulle	constante

ex15 :

$f(x) = 2x - 5$; $f'(x) = 2 > 0$ sur **R** ; f est strictement croissante sur **R**.

$g(x) = x^2 - 37$; $g'(x) = 2x$; $g'(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[$

donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

$h(x) = \sqrt{x} + 23$; $h'(x) = 1/2\sqrt{x}$; $h'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

donc h est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$k(x) = 3/x - 19$; $k'(x) = -3/x^2 < 0$ sur $]0 ; +\infty[$,

donc k est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

4. Application des dérivées (I est un intervalle de **R**)

D4 : Soit f définie sur I et $a \in I$, $b \in I$, $c \in I$ tels que $c \in]a ; b[\subset I$

On dit que f(c) est un Maximum local de f si $\forall x \in]a ; b[$, $f(x) \leq f(c)$.
On dit que f atteint son Maximum en c. (pour $x = c$)

Rq3 : pour un minimum on a : $f(x) \geq f(c)$.
Rq4 : Extremum = Maximum ou minimum.

4. Application des dérivées

T18 : Soit f dérivable sur I et f ' sa dérivée

Si f admet un extremum local en c alors f '(c) = 0

Rq5 : Attention : la réciproque est fausse.

Contre exemple : $x \longmapsto x^3$ en 0.

4. Application des dérivées

T19 : Soit f dérivable sur I et f ' sa dérivée et c $\in$ I.

Si f ' s'annule en c "en changeant de signe"
alors f(c) est un extremum local de f sur I.

4. Application des dérivées

Méthode pratique d'étude d'une fonction

ex16 : soit la fonction f : $x \longmapsto \dfrac{3x^2 - 6}{x^2 + 1}$

#1 – Ensemble de définition : **R**

#2 – Calcul de la dérivée :

f est de la forme u/v avec

$u(x) = 3x^2 - 6 \quad \Rightarrow u'(x) = 6x$
$v(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{6x(x^2+1) - 2x(3x^2 - 6)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{18x}{(x^2 + 1)^2}$$

#3 – Signe de la dérivée : $(x^2 + 1)^2 > 0$ pour tout x donc f '(x) est du signe de 18x soit f '(x) > 0 pour x > 0 et f '(x) < 0 pour x < 0

#4 – Tableau de variation :

x	**-∞**		**0**		**+∞**
f '		**–**	**0**	**+**	
f		↘	**-6**	↗	

4. Application des dérivées

ex17 : soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$

#1 – Ensemble de définition : $\mathbf{R} \setminus \{2\} =]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[$

#2 – Calcul de la dérivée :

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $\boxed{\begin{array}{l} u(x) = x^2 + 5 \ \Rightarrow u'(x) = 2x \\ v(x) = x - 2 \quad \Rightarrow v'(x) = 1 \end{array}}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - 1(x^2+5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$$

#3 – Signe de la dérivée : $(x - 1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 2$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 4x - 5$ qui est un trinôme de racines -1 et 5 soit $f'(x) > 0$ pour $x < -1$ ou $x > 5$ et $f'(x) < 0$ pour $-1 < x < 5$

#4 – Tableau de variation :

x	**-∞**		**-1**		**2**		**5**		**+∞**
f '		**+**	**0**	**–**	**‖**	**–**	**0**	**+**	
f		↗	**-2**	↘	**‖**	↘	**10**	↗	

4. Application des dérivées

Méthode pratique d'étude d'une fonction

ex18 : étudier les variations des fonctions :

$f : x \longmapsto 9x - 13 + \dfrac{2}{x}$; $g : x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 54$;

$h : x \longmapsto \dfrac{2x - 6}{x^2 - 4}$; $k : x \longmapsto \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x - 10}$;

$l : x \longmapsto 2x^2 - \sqrt{x} + 17$

FIN