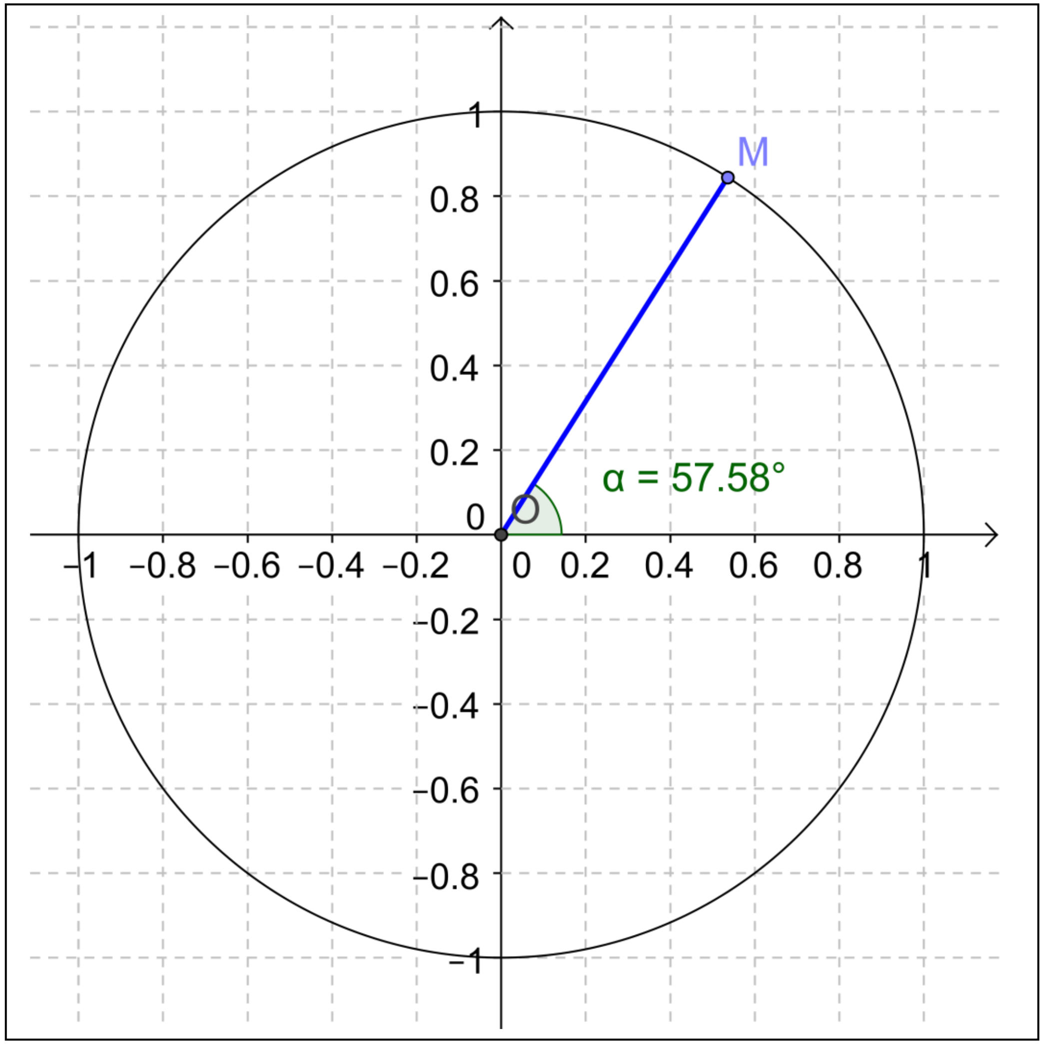
Chapitre 5

Trigonométrie

1. Cercle trigonométrique

D1

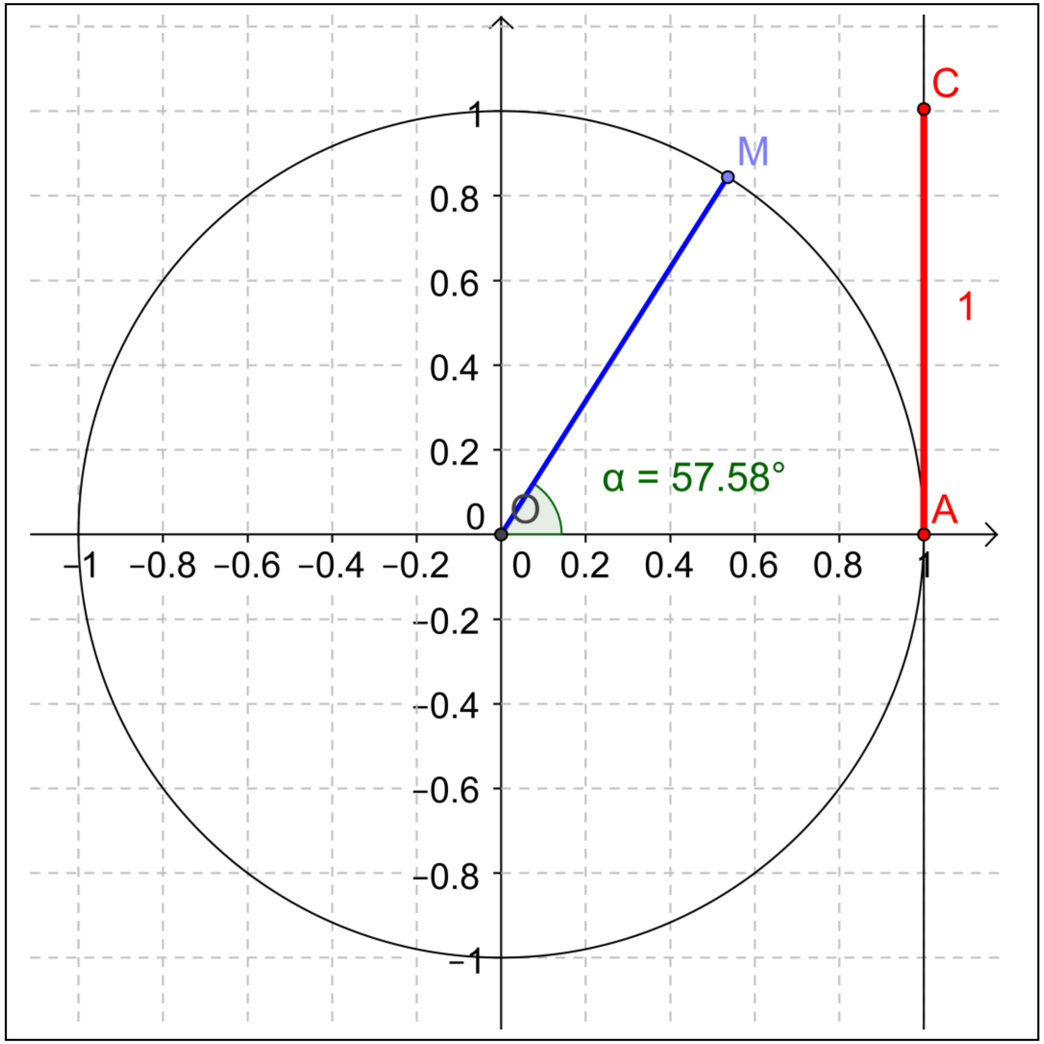
C'est un cercle de rayon unité, orienté en sens inverse à celui des aiguilles d'une montre.



1. Cercle trigonométrique

Pour mesurer
l'angle $\widehat{AOM}$,
on utilise
la longueur
de l'arc AM.
Unité : radian.

360° = 2 π radians
360° ≈ 6,28 radians
57,58° ≈ 1 radian



1. Cercle trigonométrique

Conversion des degrés en radians

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	270°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

1. Cercle trigonométrique

Remarque 1 : les angles sont maintenant orientés.

Exemple pour l'angle $\widehat{AOM}$: on l'écrit ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$)
pour indiquer que l'on tourne en allant de A vers M.
Dans l'autre sens on l'écrira : ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OA}$)

Si ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$) = 57,58° = 1 radian
Alors ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OA}$) = -57,58° = -1 radian

1. Cercle trigonométrique

Remarque 2 : un angle peut maintenant dépasser 360° (ou 2π).
Il suffit qu'il représente plus d'un tour sur le cercle.

C'est très utile en mécanique pour les pièces en rotation.
Ou pour étudier le nombre de tours parcourus par un véhicule sur une piste circulaire.

Les angles sont maintenant mesurés par des nombres réels dans $]-\infty ; +\infty[$

1. Cercle trigonométrique

Remarque 3 :
l'angle ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$) peut être mesuré par plusieurs nombres.
En ajoutant un tour on ajoute 360° ou 2π radians.

Donc si on connait une mesure, α, les autres mesures seront :

$\boxed{\alpha + k \times 360°}$ ou $\boxed{\alpha + k \times 2\,\pi \text{ en radians}}$

k étant un nombre entier qui représente le nombre de tours.
($k > 0$ si on tourne dans le sens direct, $k < 0$ sinon)

1. Cercle trigonométrique

D2

La mesure principale d'un angle orienté est son unique mesure qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi ; +\pi]$

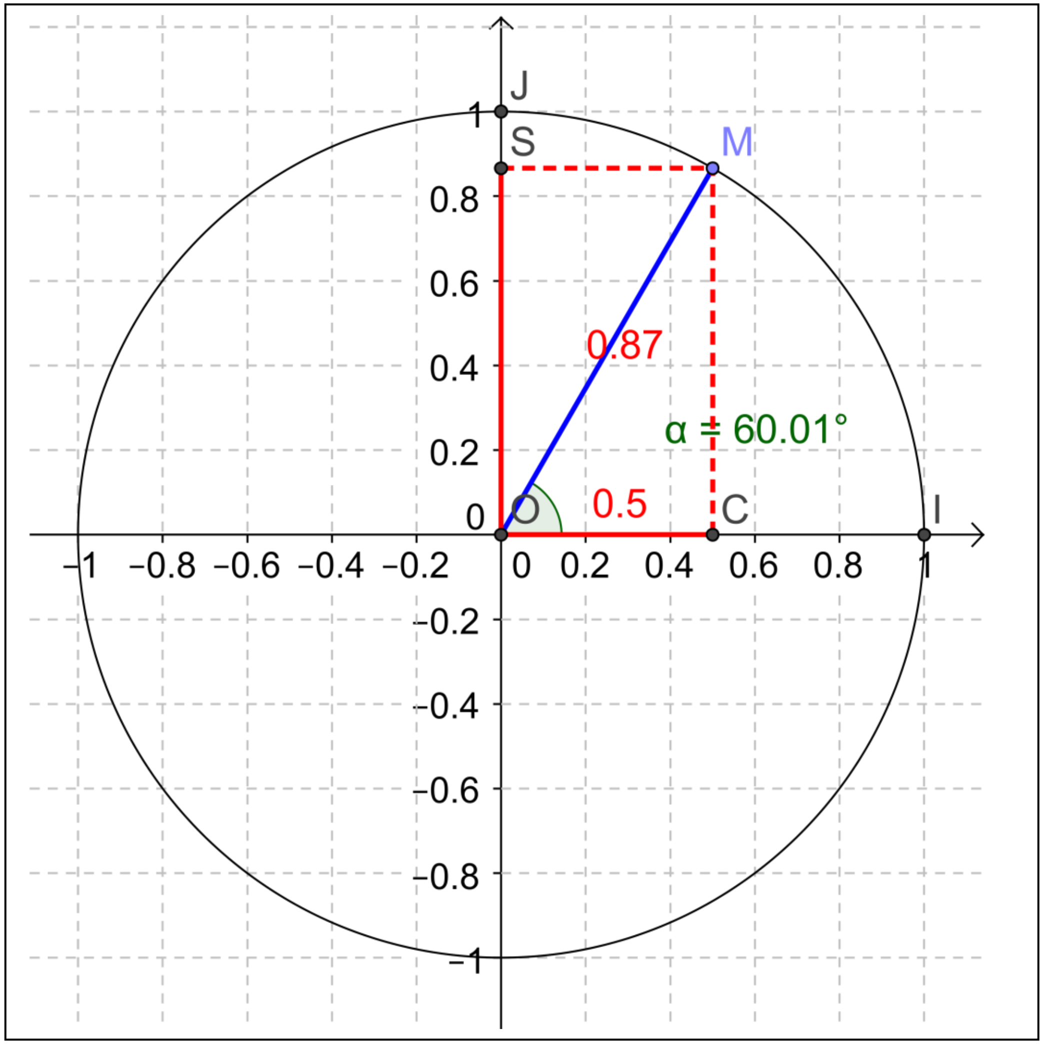
Ex : $\alpha = 48{,}5\,\pi$, sa mesure principale est $0{,}5\,\pi = \pi/2$

mesure en radians	25π	$17{,}4\pi$	-5π	$19\pi/4$	$-7\pi/2$	$29\pi/3$	$-14\pi/6$
mesure principale							

2. Fonctions trigonométriques

D3

Un point M étant choisi sur un cercle trigonométrique. avec $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.



Dans le repère (O, I, J)
cos (α) est l'abscisse de M
sin (α) est l'ordonnée de M

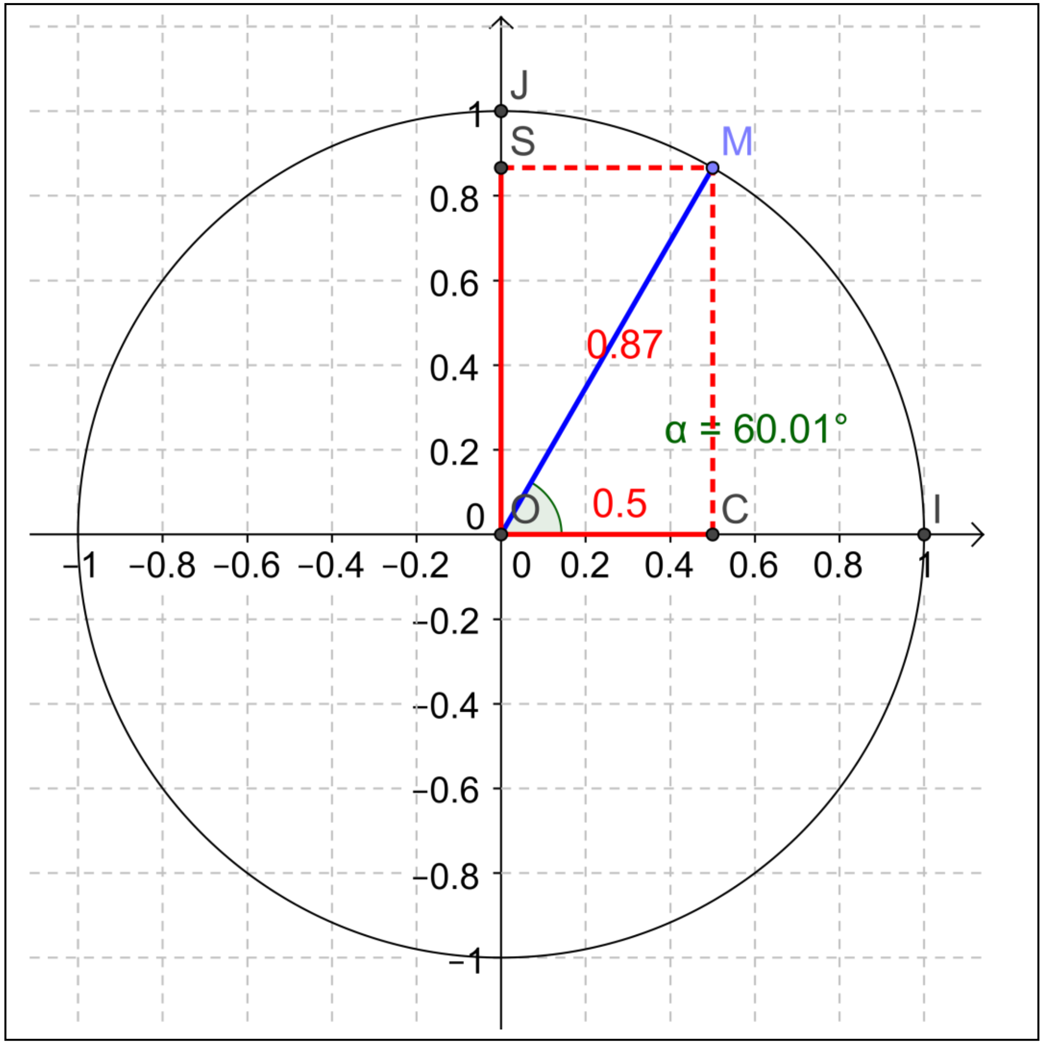
2. Fonctions trigonométriques

Propriétés :

$-1 \leq \cos(t) \leq 1$
$-1 \leq \sin(t) \leq 1$

Tableau de valeurs

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos t	1	0	-1	0	1
sin t	0	1	0	-1	0



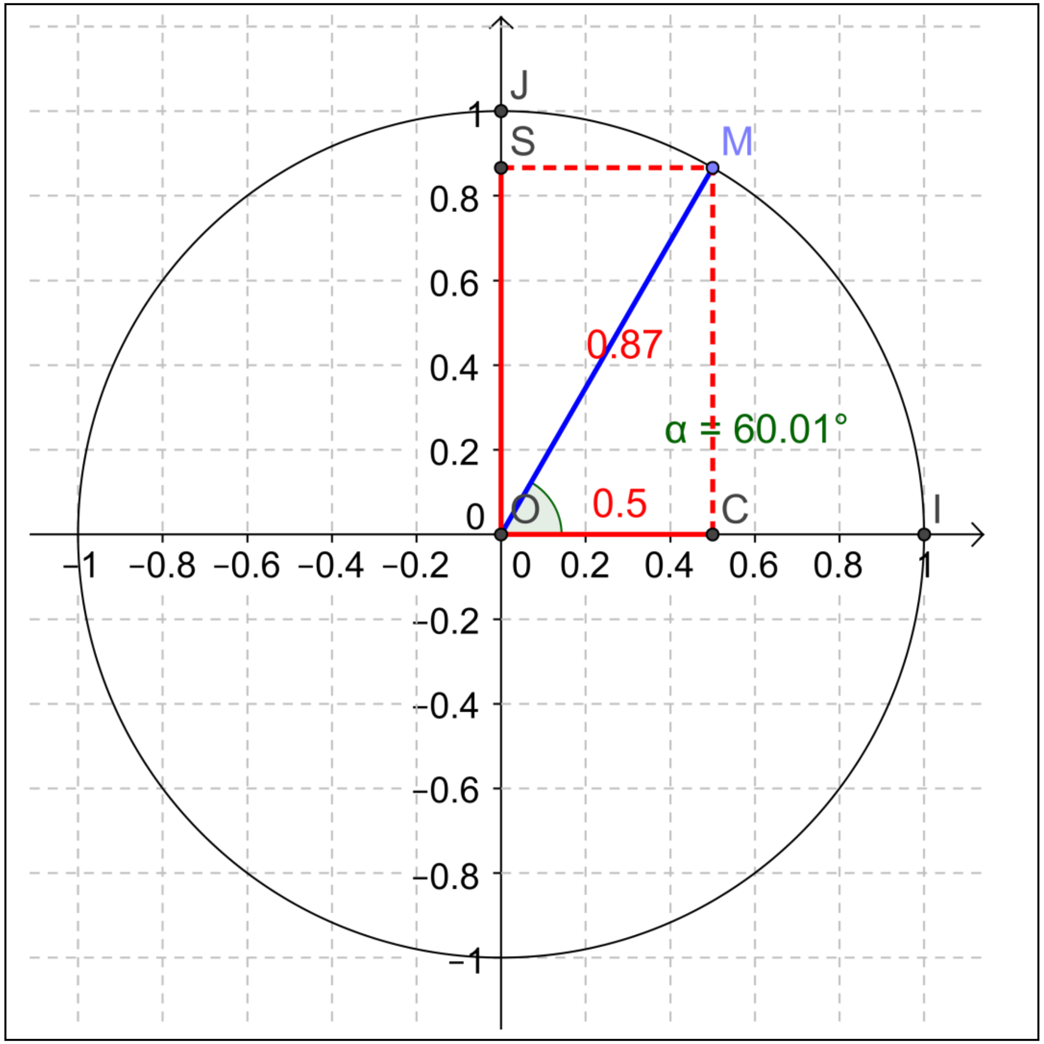
2. Fonctions trigonométriques

Période :

$\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$
$\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$

Parité :

$\cos(-t) = \cos(t)$
$\sin(-t) = -\sin(t)$



2. Fonctions trigonométriques

Formules à connaitre : $\boxed{\mathbf{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}}$

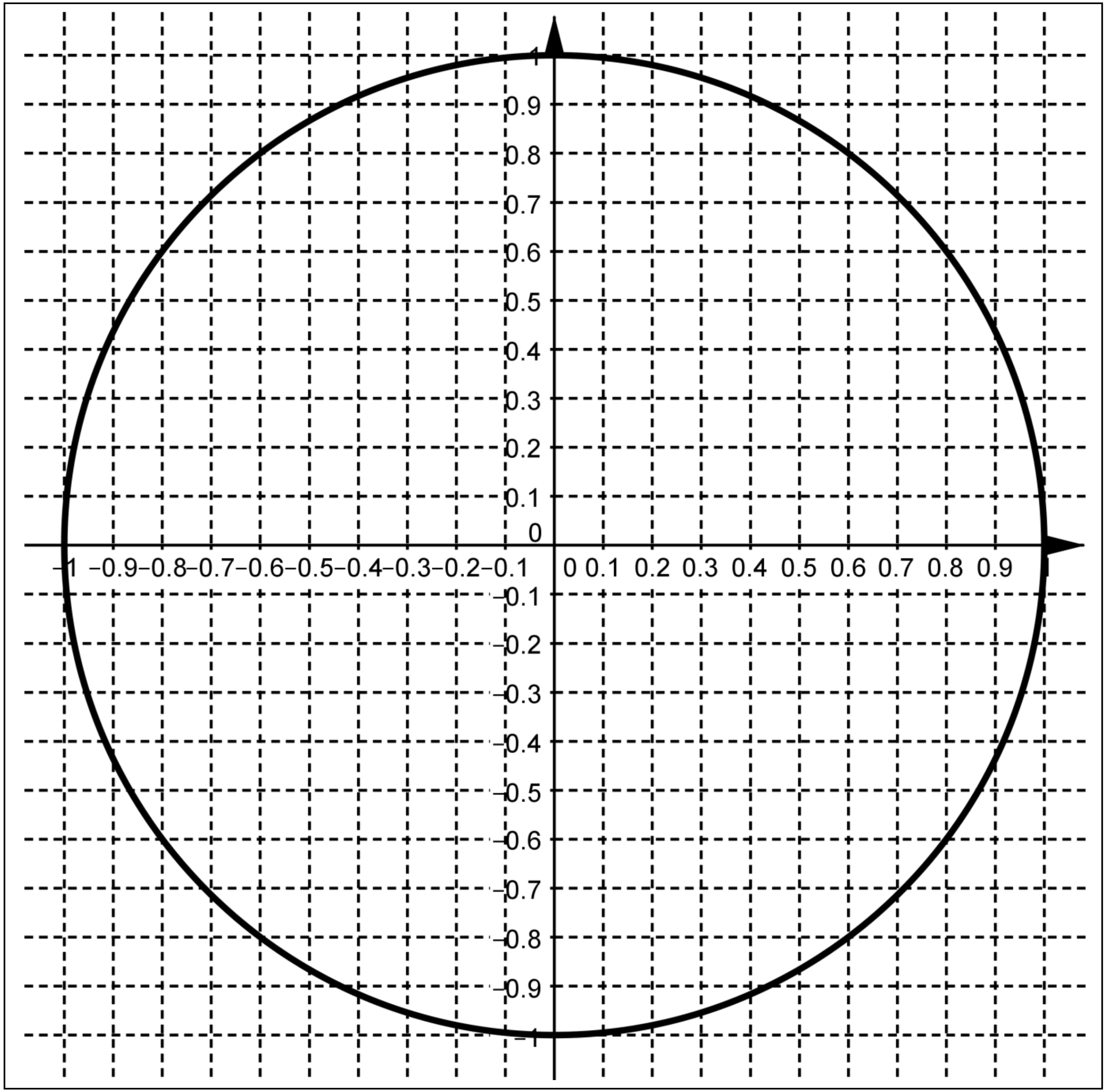
$\cos(-t)$	$= \cos(t)$	$\sin(-t)$	$= -\sin(t)$
$\cos(\pi + t)$	$= -\cos(t)$	$\sin(\pi + t)$	$= -\sin(t)$
$\cos(\pi - t)$	$= -\cos(t)$	$\sin(\pi - t)$	$= \sin(t)$
$\cos(\pi/2 - t)$	$= \sin(t)$	$\sin(\pi/2 - t)$	$= \cos(t)$

2. Fonctions trigonométriques

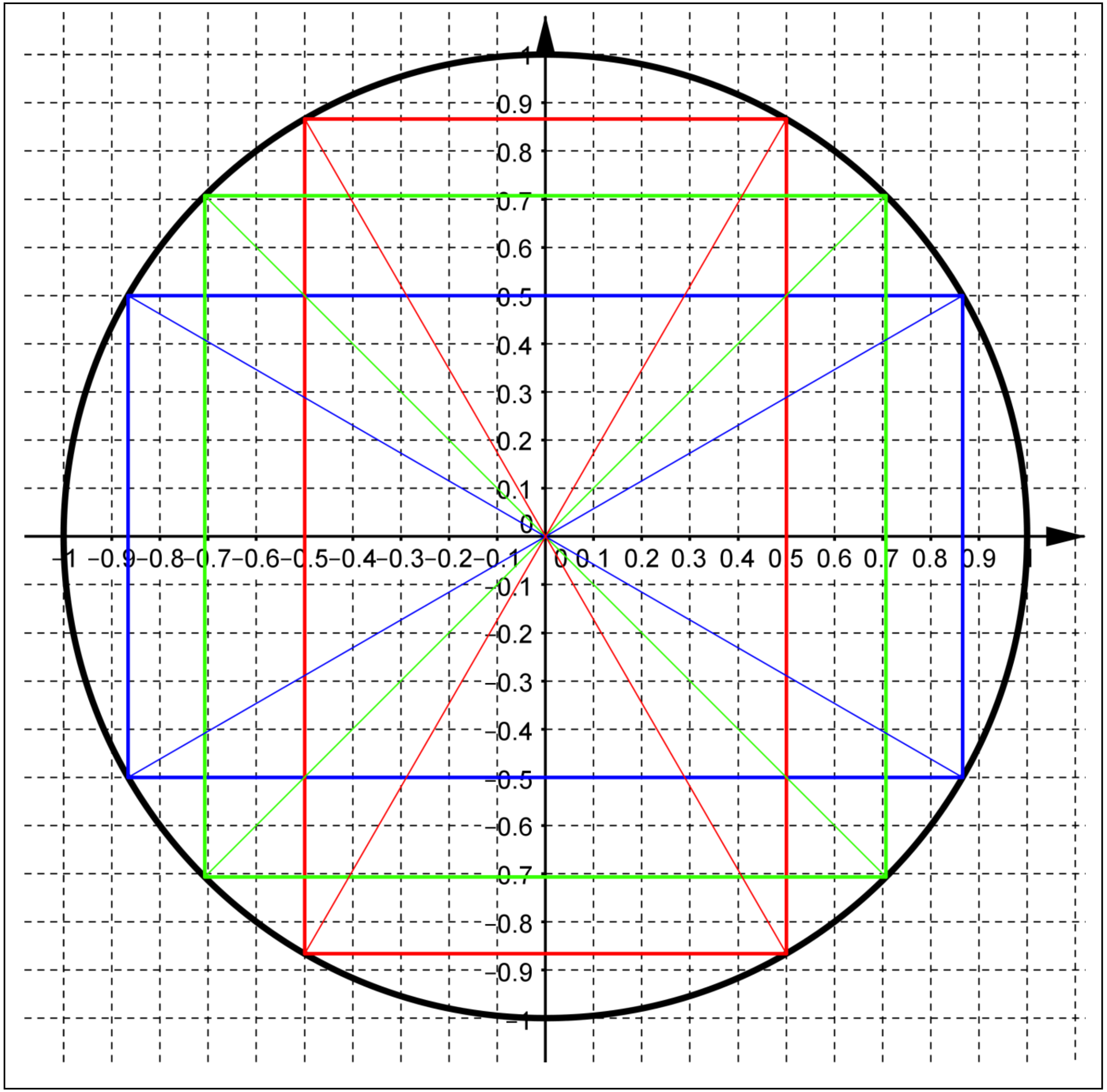
Valeurs à connaitre :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin t	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\mathbf{1}$												
cos t	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{0}$												

2. Fonctions trigonométriques



2. Fonctions trigonométriques



3. Equations trigonométriques

a est un nombre donné.

Equation	Solutions
$\cos t = \cos a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = -a + 2k\pi$
$\sin t = \sin a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = \pi - a + 2k\pi$

Expl : $\cos t = \cos \pi/3$

$\sin t = \sin \pi/4$

$\cos t = 0$

$\sin t = 1/2$

3. Equations trigonométriques

a est un nombre donné.

Equation	Solutions
$\cos t = \cos a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = -a + 2k\pi$
$\sin t = \sin a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = \pi - a + 2k\pi$

Expl : $\cos t = \cos \pi/3 \Leftrightarrow t = \pi/3 + 2k\pi$ ou $t = -\pi/3 + 2k\pi$

$\sin t = \sin \pi/4 \Leftrightarrow t = \pi/4 + 2k\pi$ ou $t = 3\pi/4 + 2k\pi$

$\cos t = 0 = \cos \pi/2 \Leftrightarrow t = \pi/2 + 2k\pi$ ou $t = -\pi/2 + 2k\pi$

$\sin t = 1/2 = \sin \pi/6 \Leftrightarrow t = \pi/6 + 2k\pi$ ou $t = 5\pi/6 + 2k\pi$

3. Equations trigonométriques

a est un nombre donné.

Equation	Solutions
$\cos t = \cos a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = -a + 2k\pi$
$\sin t = \sin a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = \pi - a + 2k\pi$

Expl : $\cos (2t + \pi/6) = \cos \pi/3$

$\sin (3t - \pi/4) = \sin 2\pi/3$

3. Equations trigonométriques

Equation	Solutions
$\cos t = \cos a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = -a + 2k\pi$
$\sin t = \sin a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = \pi - a + 2k\pi$

Expl : $\cos(2t + \pi/6) = \cos \pi/3$

$\Leftrightarrow 2t + \pi/6 = \pi/3 + 2k\pi$ ou $2t + \pi/6 = -\pi/3 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 2t = \pi/3 - \pi/6 + 2k\pi$ ou $2t = -\pi/3 - \pi/6 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 2t = \pi/6 + 2k\pi$ ou $2t = -\pi/2 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow t = \pi/12 + k\pi$ ou $t = -\pi/4 + k\pi$

3. Equations trigonométriques

Equation	Solutions
$\cos t = \cos a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = -a + 2k\pi$
$\sin t = \sin a$	$t = a + 2k\pi$ ou $t = \pi - a + 2k\pi$

Expl : $\sin(3t - \pi/4) = \sin 2\pi/3$

$\Leftrightarrow 3t - \pi/4 = 2\pi/3 + 2k\pi$ ou $3t - \pi/4 = \pi - 2\pi/3 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 3t = \pi/4 + 2\pi/3 + 2k\pi$ ou $3t = \pi/4 + \pi/3 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 3t = 11\pi/12 + 2k\pi$ ou $3t = 7\pi/12 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow t = 11\pi/36 + 2k\pi/3$ ou $t = 7\pi/36 + 2k\pi/3$

FIN