Chapitre III

Fonctions : les bases

1. Notion de Fonction

1. Notion de Fonction

D1 : Lorsque l'on associe à tout nombre x d'un ensemble de réels D un autre nombre **unique**, noté f(x), on définit une fonction f sur D.

Notation : $f : x \longmapsto f(x)$ pour $x \in D$

On lit « f est la fonction qui à tout réel x de D associe le réel f(x) »

1. Notion de Fonction

Vocabulaire

● D est **l'ensemble de définition** de la fonction f. On le note D_f
On dit aussi que la fonction f est définie sur l'ensemble D_f

● x est **la variable**

● f(x) est appelé **l'image de x** par la fonction f (valeur de f en x)

● Si y est l'image de x par f alors x est **un antécédent** de y par f

R1 : Chaque réel x de D_f a une et une seule image.
Chaque réel y de $\mathbb{R}$ peut avoir plusieurs antécédents ou … aucun.

1. Notion de Fonction

D2 : La courbe représentative (le graphe) d'une fonction f dans un repère est l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$

C'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; f(x)), avec $x \in D_f$.

D3 : Soit u et v deux fonctions définies sur le même intervalle D. et k un réel, on définit sur D les fonctions :

u+v : $x \longmapsto u(x) + v(x)$ soit $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$

ku : $x \longmapsto k \times u(x)$ soit $(ku)(x) = k \times u(x)$

uv : $x \longmapsto u(x) \times v(x)$ soit $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$

1. Notion de Fonction

D4 : Sens de variation d'une fonction.

f est une fonction définie sur un intervalle I

On dit que :

f est strictement croissante sur I si pour tout a et b dans I on a : $\boxed{a < b \Rightarrow f(a) < f(b)}$ a et b sont rangés dans le **même ordre** que leurs images	f est strictement décroissante sur I si pour tout a et b dans I on a : $\boxed{a < b \Rightarrow f(b) < f(a)}$ a et b sont rangés dans **l'ordre contraire** de leurs images.

R2 : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ dit la même chose que $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$

1. Notion de Fonction

I est un intervalle de IR

T1 : Si deux fonctions ont les mêmes variations sur I,
leur somme a les mêmes variations sur I.
si les fonctions u et v sont croissantes alors u+v est croissante sur I.

T2 : On ne change pas les variations d'une fonction
si on lui ajoute (ou retranche) une constante.
si u est croissante et k constante alors u + k est croissante sur I.

1. Notion de Fonction

T3 : On ne change pas les variations d'une fonction
si on la multiplie (ou divise) par une constante positive.
si u est croissante et $k > 0$ alors $k.u$ est croissante sur I

T4 : Les variations d'une fonction deviennent opposées
si on la multiplie (ou divise) par une constante négative.
si u est croissante et $k < 0$ alors $k.u$ est décroissante sur I

2. Utilisation de la Calculatrice

2. Utilisation de la Calculatrice

Obtention d'un tableau de valeurs – Construction de la courbe

Représentation graphique de la fonction définie sur [-2 ; 5] par

$$f(x) = x^2 - 4x - 1$$

Attention : Une lecture graphique donne le plus souvent des valeurs approchées.

2. Utilisation de la Calculatrice

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 \; ; \; D_f = [\,-2 \; ; \; 5\,]$$

Action	TI 83	Graph 35
Saisie de la fonction f : $x \mapsto x^2 - 4x - 1$	touche $\boxed{\text{Y=}}$ ligne Y1= taper : $x^2 - 4\,x - 1$ ENTER	$\boxed{\text{MENU}}$ GRAPH $\boxed{\text{EXE}}$ ligne Y1 : taper : $x^2 - 4\,x - 1$ $\boxed{\text{EXE}}$
Configurer et Obtenir un tableau de valeurs	touches $\boxed{\text{2nd}}$ + $\boxed{\text{WINDOW}}$ configurer (TBL SET) donner la valeur initiale : TblStart = -1 donner le pas : ΔTbl = 1 Afficher le tableau : $\boxed{\text{2nd}}$ + $\boxed{\text{GRAPH}}$ (TABLE)	$\boxed{\text{MENU}}$ TABLE $\boxed{\text{EXE}}$ ligne Y1 : taper : $x^2 - 4\,x - 1$ $\boxed{\text{EXE}}$ configurer : $\boxed{\text{F5}}$ (SET) Start : valeur initiale : -1 End : valeur finale = 10 Step : donner le pas : 1 Afficher le tableau : $\boxed{\text{F6}}$ (TABL)

Configurer la fenêtre **Tracer la courbe représentative**	touche $\boxed{\text{WINDOW}}$: donner les valeurs de Xmin = -1, Xmax = 5, Xgrad = 1 Ymin = -6 , Ymax = 11, Ygrad = 1 Afficher la courbe : touche $\boxed{\text{GRAPH}}$	touches $\boxed{\text{2nd}}$ + $\boxed{\text{V-WINDOW}}$ donner les valeurs de Xmin:-1, $\boxed{\text{EXE}}$ Xmax:5, $\boxed{\text{EXE}}$ Ymin:-6, $\boxed{\text{EXE}}$ Ymax:7, $\boxed{\text{EXE}}$ scale : laisser l'échelle 1 $\boxed{\text{EXIT}}$ $\boxed{\text{MENU}}$ GRAPH $\boxed{\text{EXE}}$ Afficher la courbe : $\boxed{\text{F6}}$ (DRAW)

3. Utilisation de la Calculatrice

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 \; ; \; \mathbf{D_f = [-2 \; ; \; 5]}$$

R3 : pour les variables utiliser la touche **X,T,θ,n** ou **X,θ,T**

3. Fonctions de référence

3. Fonctions de référence

3.1. Fonctions affines : f(x) = mx + p, définies sur IR

Tableaux de variation et de signe :

m > 0

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
f(x)		–	0	+	↗

m < 0

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
f(x)		+	0	–	↘

Le graphe est une droite
m est son coefficient directeur
p est son ordonnée à l'origine
$m > 0 \Leftrightarrow$ f est croissante
$m = 0 \Leftrightarrow$ f est constante
$m < 0 \Leftrightarrow$ f est décroissante

3. Fonctions de référence

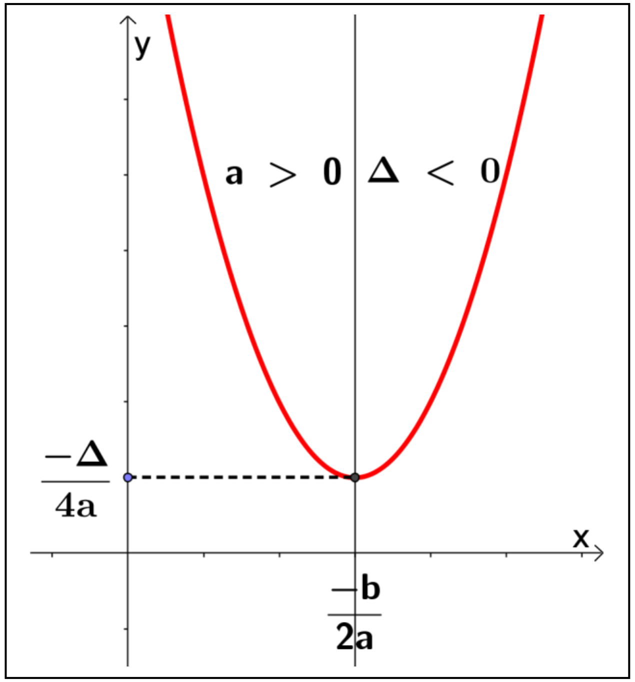
3.2. Fonctions trinômes : f(x) = ax² + bx + c définies sur IR.

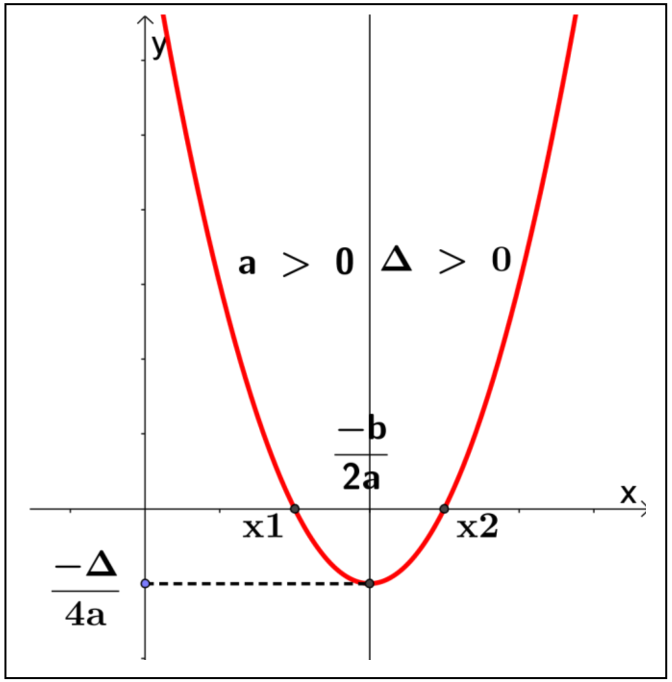
$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

Tableau de variations pour $\boxed{a > 0}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$

Leur graphe
est une parabole





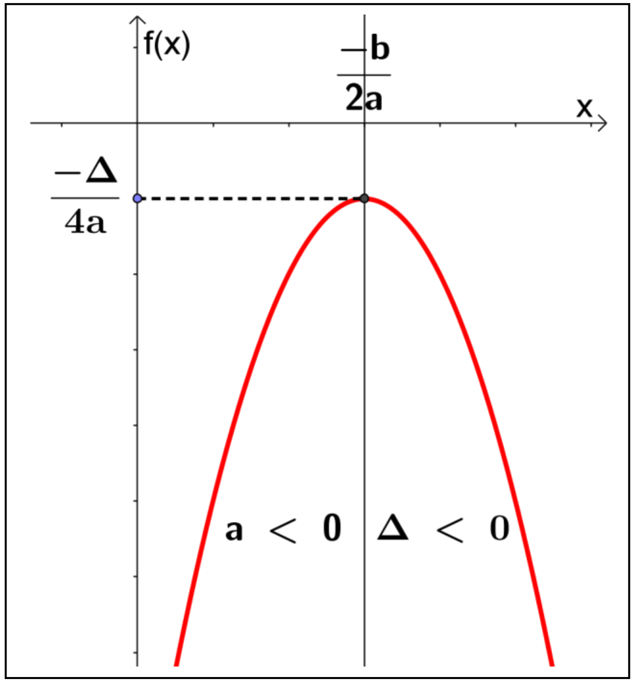
3. Fonctions de référence

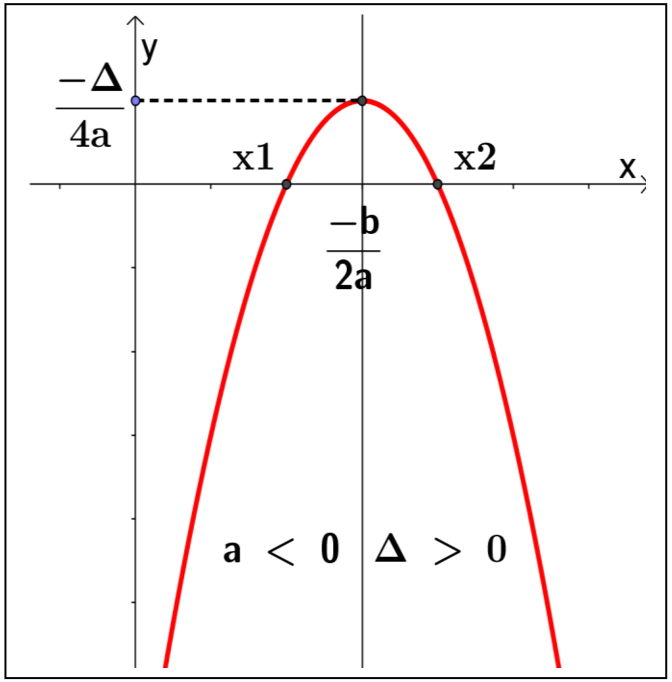
3.2. **Fonctions trinômes : $f(x) = ax^2 + bx + c$** définies sur IR.

Tableau de variations pour $\boxed{a < 0}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$

La droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ est axe de symétrie de la courbe.





3. Fonctions de référence

3.2. Fonctions trinômes : $f(x) = ax^2 + bx + c$ définies sur IR.

Tableaux de signe pour $\boxed{a > 0}$

$\boxed{\Delta > 0}$

x	$-\infty$		x_1		$-\dfrac{b}{2a}$		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	–	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	–	0	+	

$\boxed{\Delta = 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

$\boxed{\Delta < 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		+	

3. Fonctions de référence

3.2. **Fonctions trinômes : f(x) = ax² + bx + c** définies sur IR.

Tableaux de signe pour $\boxed{\mathbf{a < 0}}$

$\boxed{\mathbf{\Delta > 0}}$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b}{2a}$		x_2		$+\infty$
f(x)		–	0	+	$-\frac{\Delta}{4a}$	+	0	–	

$\boxed{\mathbf{\Delta = 0}}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		–	0	–	

$\boxed{\mathbf{\Delta < 0}}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		–	

3. Fonctions de référence

3.3. Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur IR*

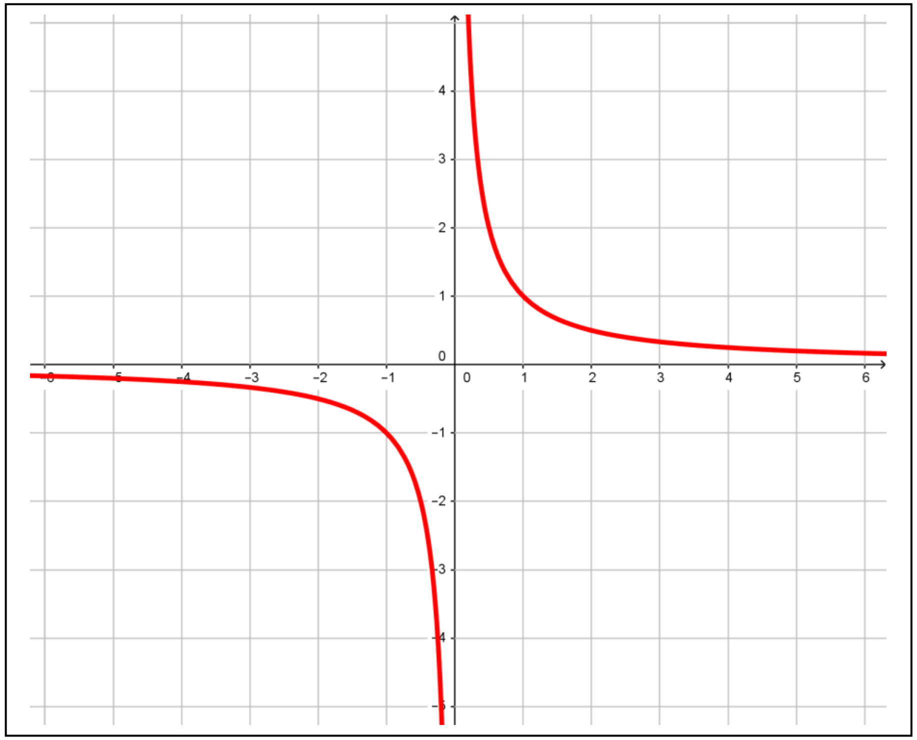
Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		$-$	$\|\|$	$+$	

Courbe : Hyperbole



L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe.

3. Fonctions de référence

3.3. Fonctions homographiques : $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ définie sur IR \ $\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\,\frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

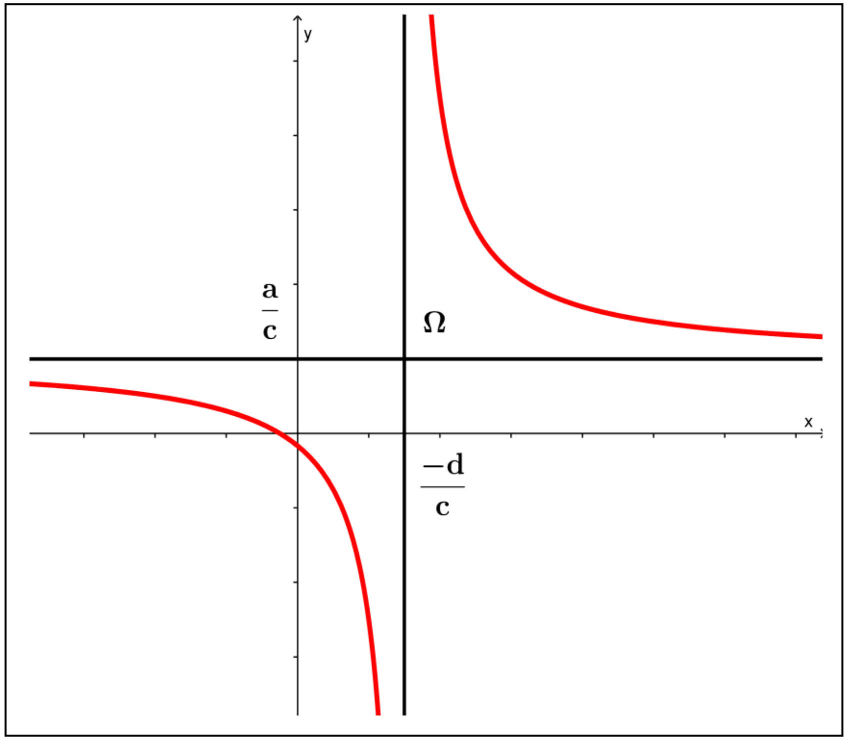
$$D_f = \left]-\infty\,;\,\frac{-d}{c}\right[\cup \left]\frac{-d}{c}\,;\,+\infty\right[$$

La courbe est une Hyperbole

Tableau de variation

si bc – ad > 0

x	$-\infty$	$\dfrac{-d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘



Le point Ω (-d/c ; a/c) est centre de symétrie de la courbe.

3. Fonctions de référence

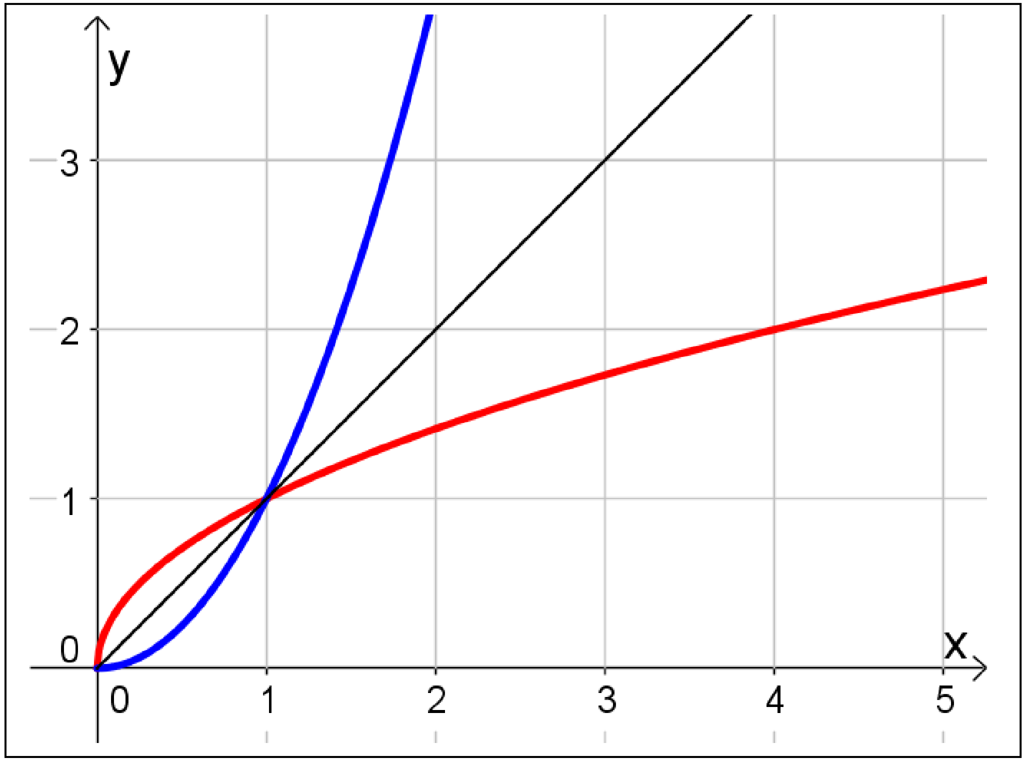
3.4. Fonction racine : f(x) = $\sqrt{x}$, définie sur IR_+

$D_f = [\ 0\ ;\ +\infty\ [$

Courbe : demi-Parabole couchée

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

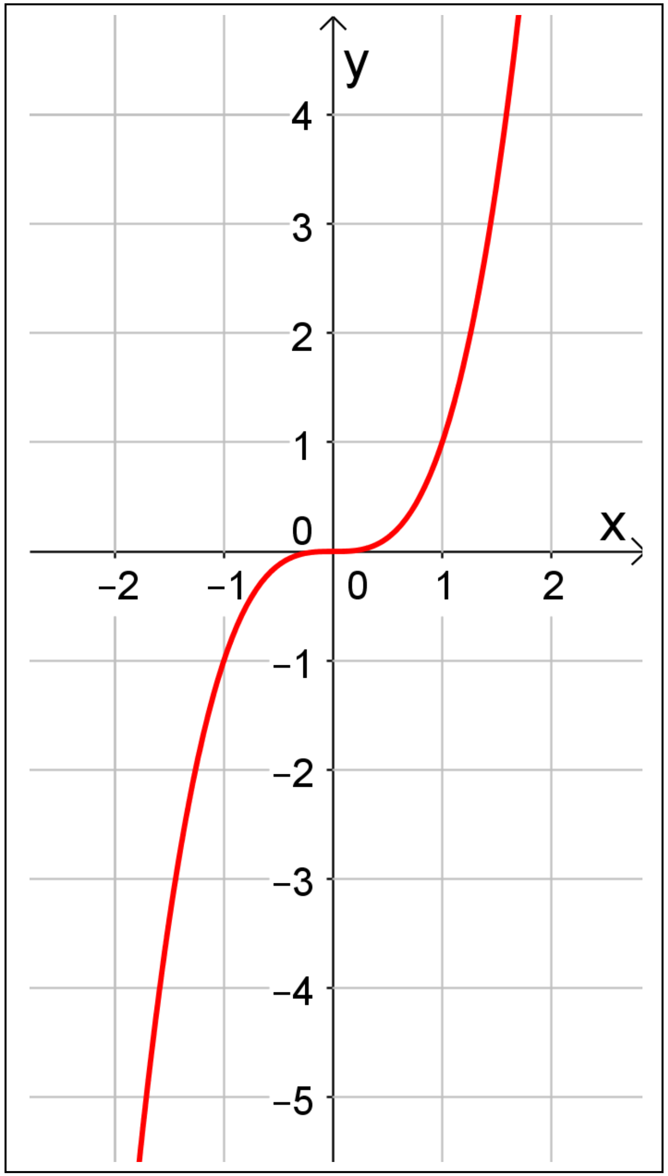


3. Fonctions de référence

3.5. **Fonction cube : f(x) = x^3**, définie sur IR

Tableau de variation

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	**0**	$\nearrow$



L'origine du repère est
centre de symétrie de la courbe.

3. Fonctions de référence

<u>3.6.</u> Fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$, définie sur IR

D5. La valeur absolue du réel x est le réel positif noté $|x|$ tel que :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } |x| = -x \text{ si } x \geq 0.$$

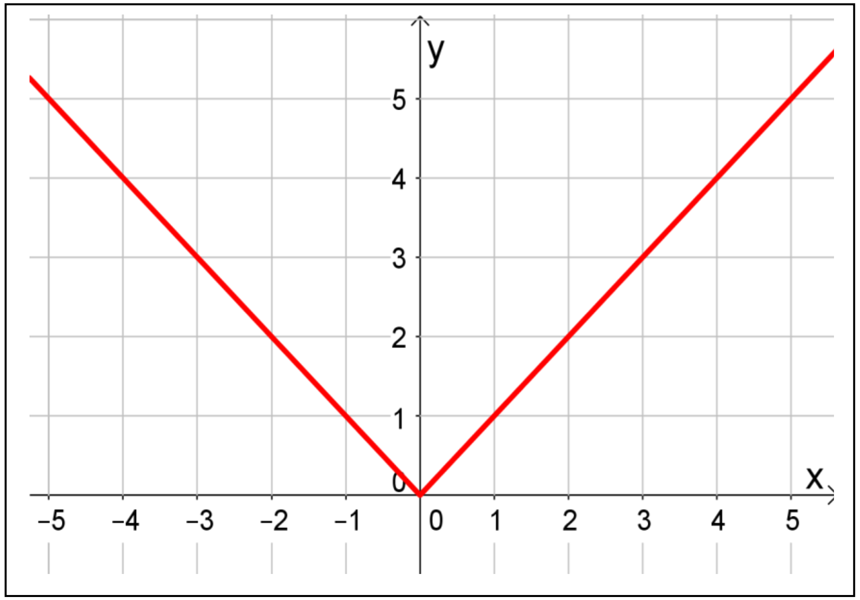
Sur une droite graduée,

c'est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine.

T5. $\forall x,\ |x| = |-x| \geq 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$\|x\|$	$\searrow$	**0**	$\nearrow$



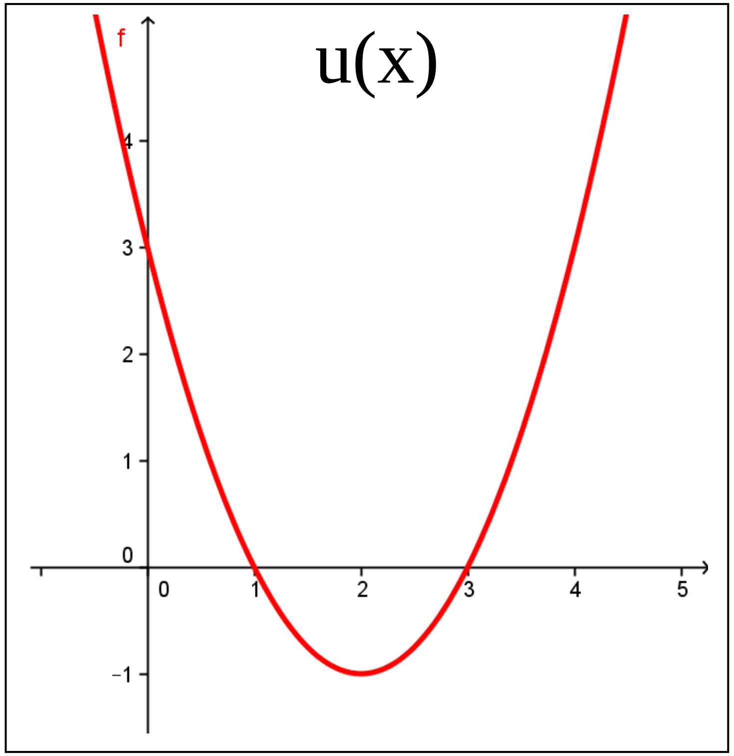
L'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe.

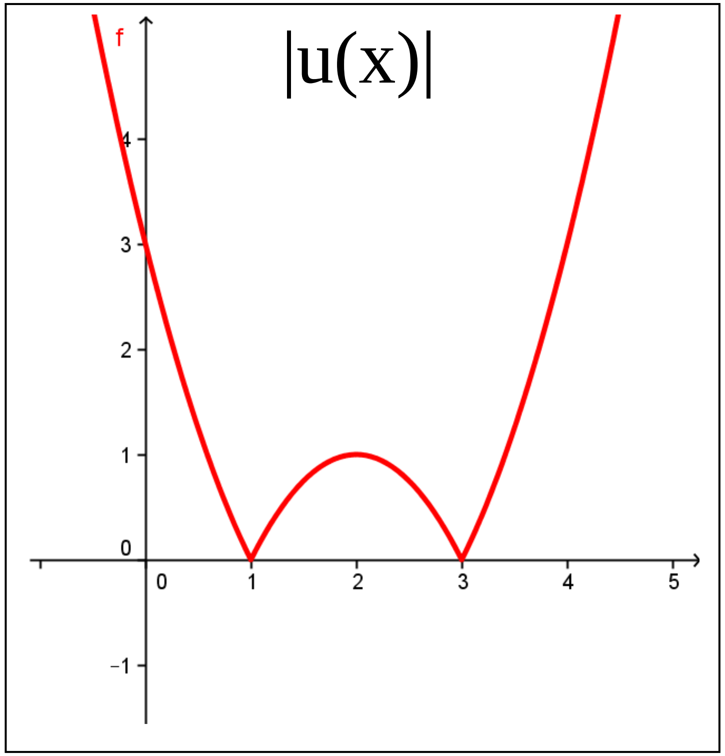
4. Composition de fonctions

4. Composition de fonctions

4.1. Valeur absolue d'une fonction $|u| : x \longmapsto |u(x)| = |u|(x)$

Exemple :





4. Composition de fonctions

4.1. Valeur absolue d'une fonction $|u| : x \longmapsto |u(x)| = |u|(x)$

On remplace la partie négative de la fonction par son opposée et la courbe par sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses (Ox).
Pas de changement pour la partie positive.

T.6. La partie négative de la fonction, remplacée par son opposée a des variations contraires à celles de la fonction de départ.
Son signe est évidemment positif sur $\mathbb{R}$.

4. Composition de fonctions

<u>4.2.</u> Racine carrée d'une fonction positive $\sqrt{\mathbf{u}} : \mathbf{x} \longmapsto \sqrt{\mathbf{u(x)}} = \sqrt{u}(x)$

condition : $u(x) \geq 0$

T.7. f a les mêmes variations que u.

<u>4.3.</u> Inverse d'une fonction non nulle $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}} : \mathbf{x} \longmapsto \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}}\,\mathbf{(x)}$

condition : $u(x) \neq 0$

T.8. f a des variations contraires à celles de u.

5. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

4. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

4.1. Résoudre une équation du type f(x) = k , k réel

Résoudre l'équation f(x) = k , k réel,

c'est chercher les nombres x qui ont pour image k

Graphiquement, cela revient à trouver les abscisses des points de C_f

qui ont k pour ordonnée

Ces points sont nécessairement sur la droite (d) d'équation y = k

donc le nombre de solution est égal

au nombre de points d'intersection de C_f et (d)

4. Résolution graphique d'équations : **f(x) = k,** ($k \in \mathbb{R}$)

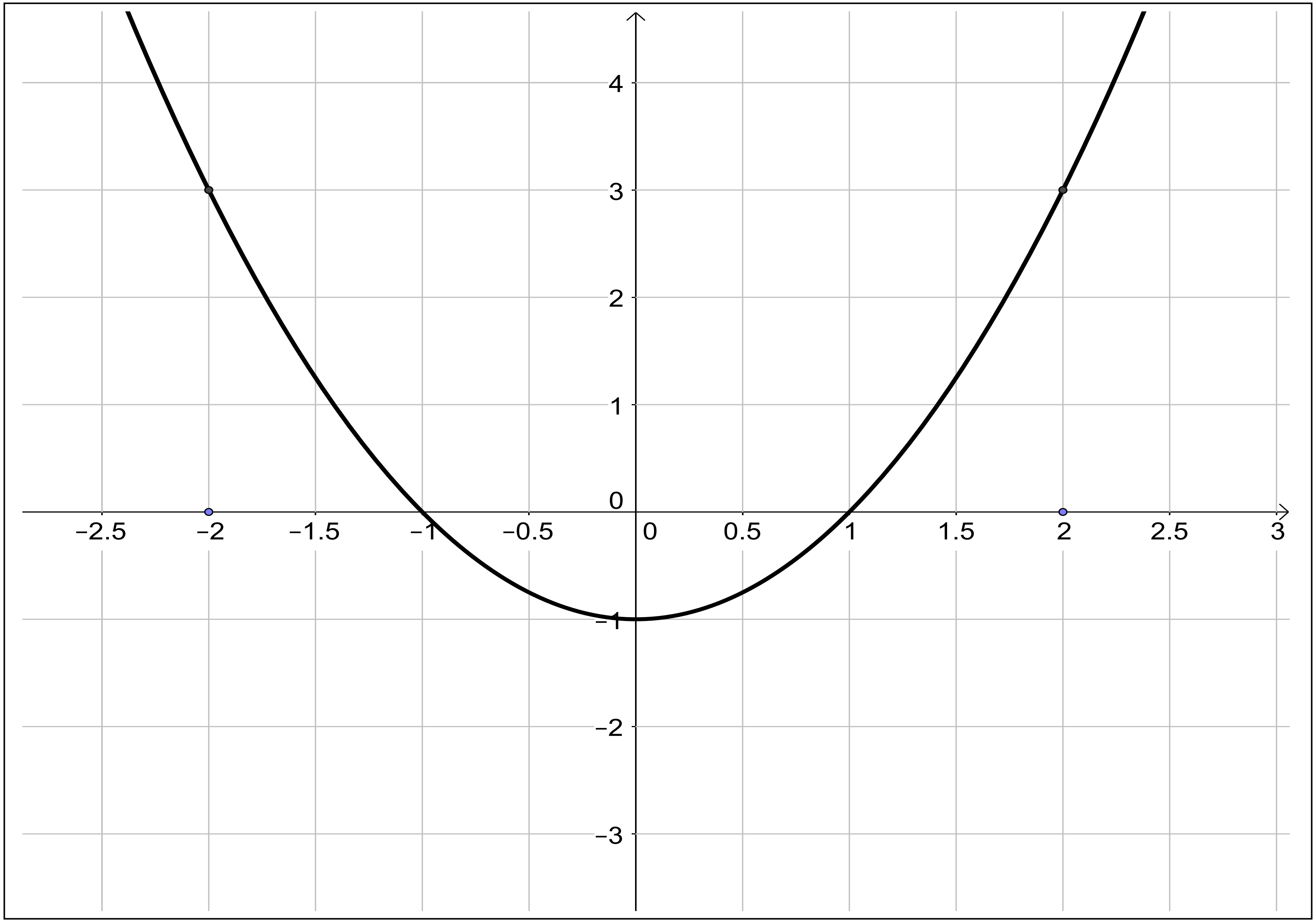
Exemple

$f(x) = x^2 - 1$

Résoudre

$f(x) = 3$

$f(x) = -3$



4. Résolution graphique d'équations : **f(x) = k**

Résoudre graphiquement f(x) = 3

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points de C_f d'ordonnée 3.

Donc les solutions sont -2 et 2.

On note S = $\{-2; 2\}$

(dessiner la droite (d) : y=3 et faire apparaître les solutions en pointillés)

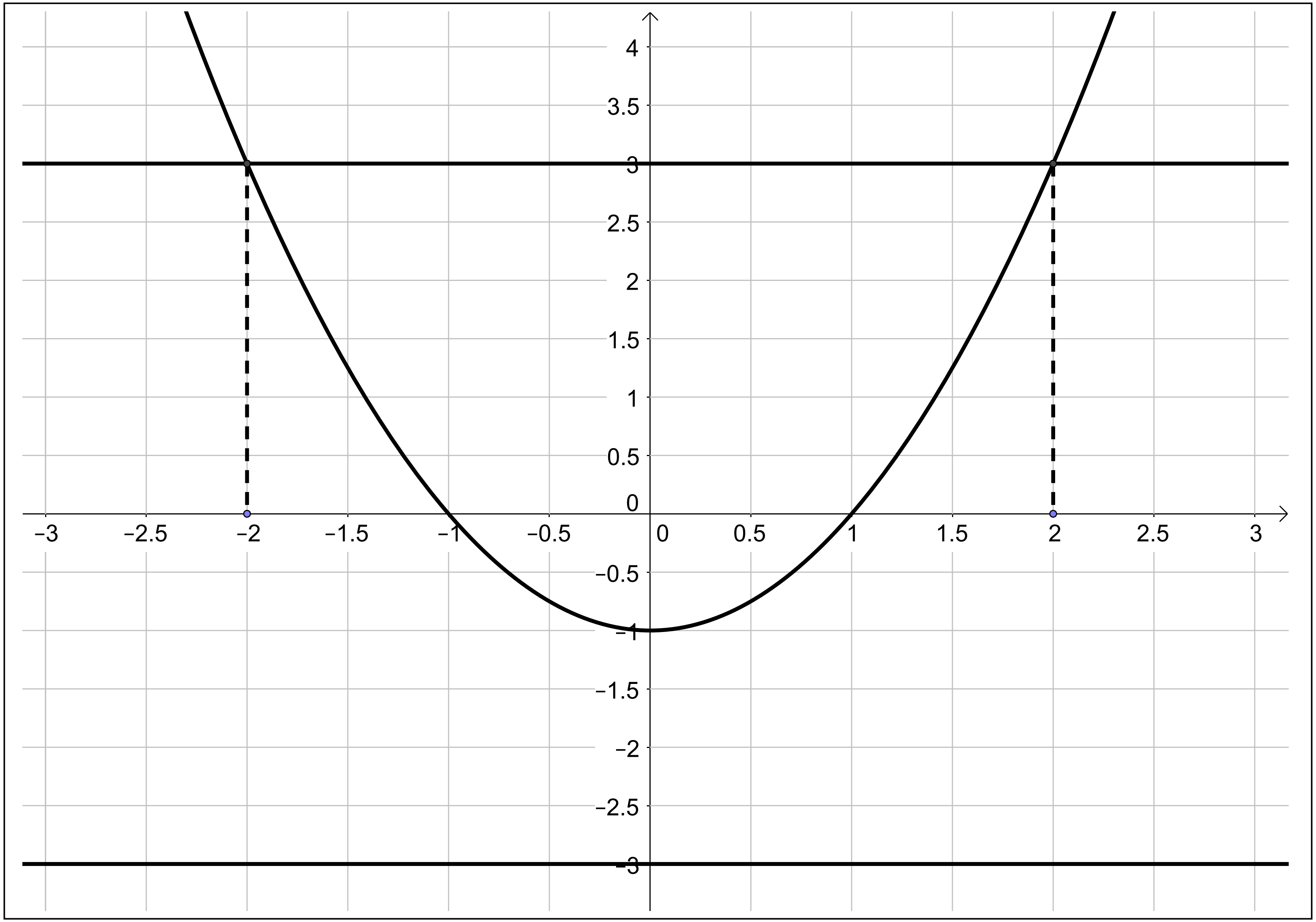
Résoudre graphiquement f(x) = - 3

La droite d'équation y = - 3 ne rencontre pas C_f.

Donc l'équation n'a pas de solution. On note S= $\emptyset$

4. Résolution graphique d'équations : **f(x) = k**

f(x) = 3



f(x) = -3

4. Résolution graphique d’équations :

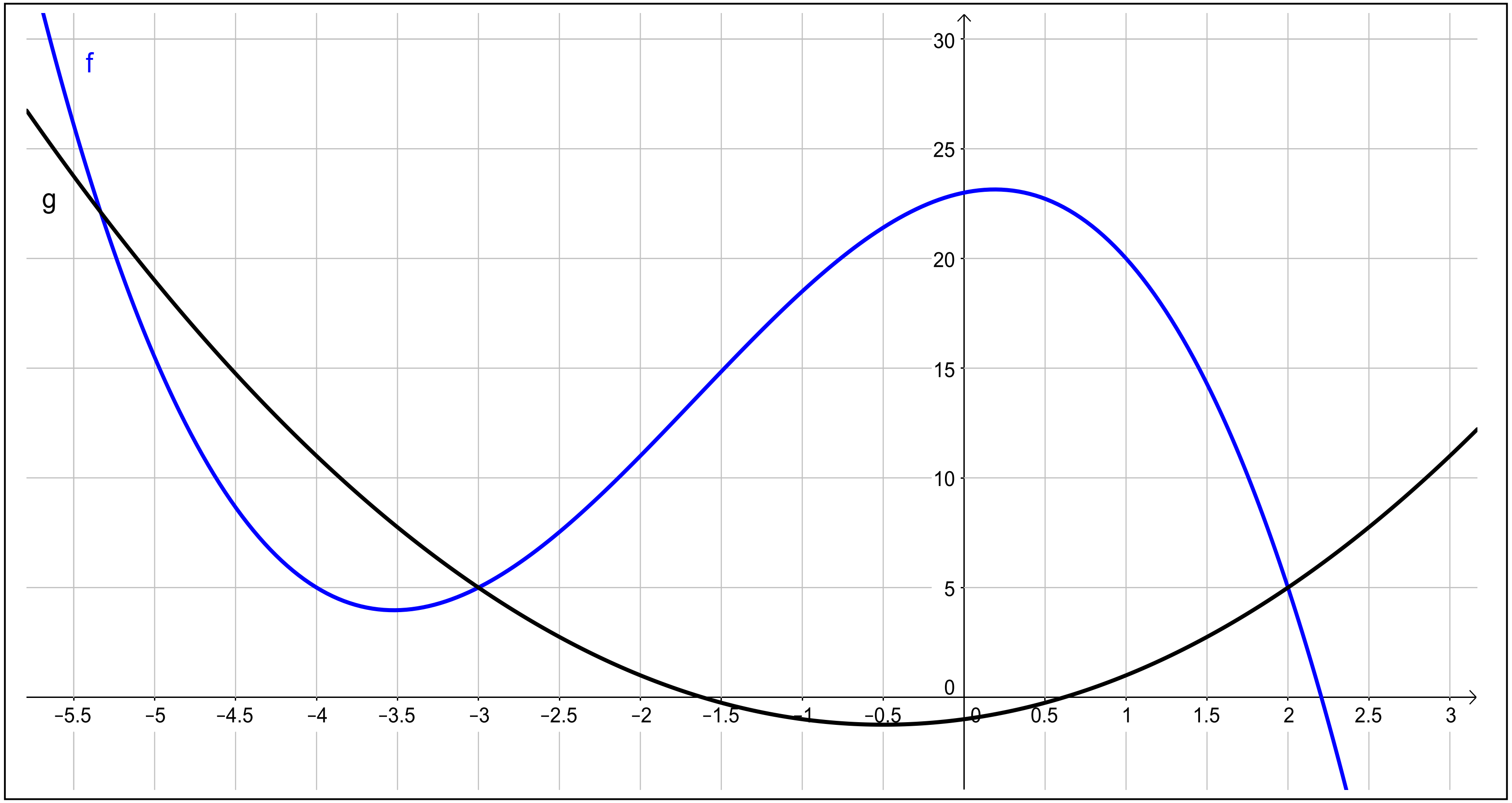
4.2. Résoudre une équation du type f(x) = g(x)

Résoudre l'équation f(x) = g(x), c'est chercher les nombres *x* qui ont même image par f et par g

Graphiquement, cela revient à trouver les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g

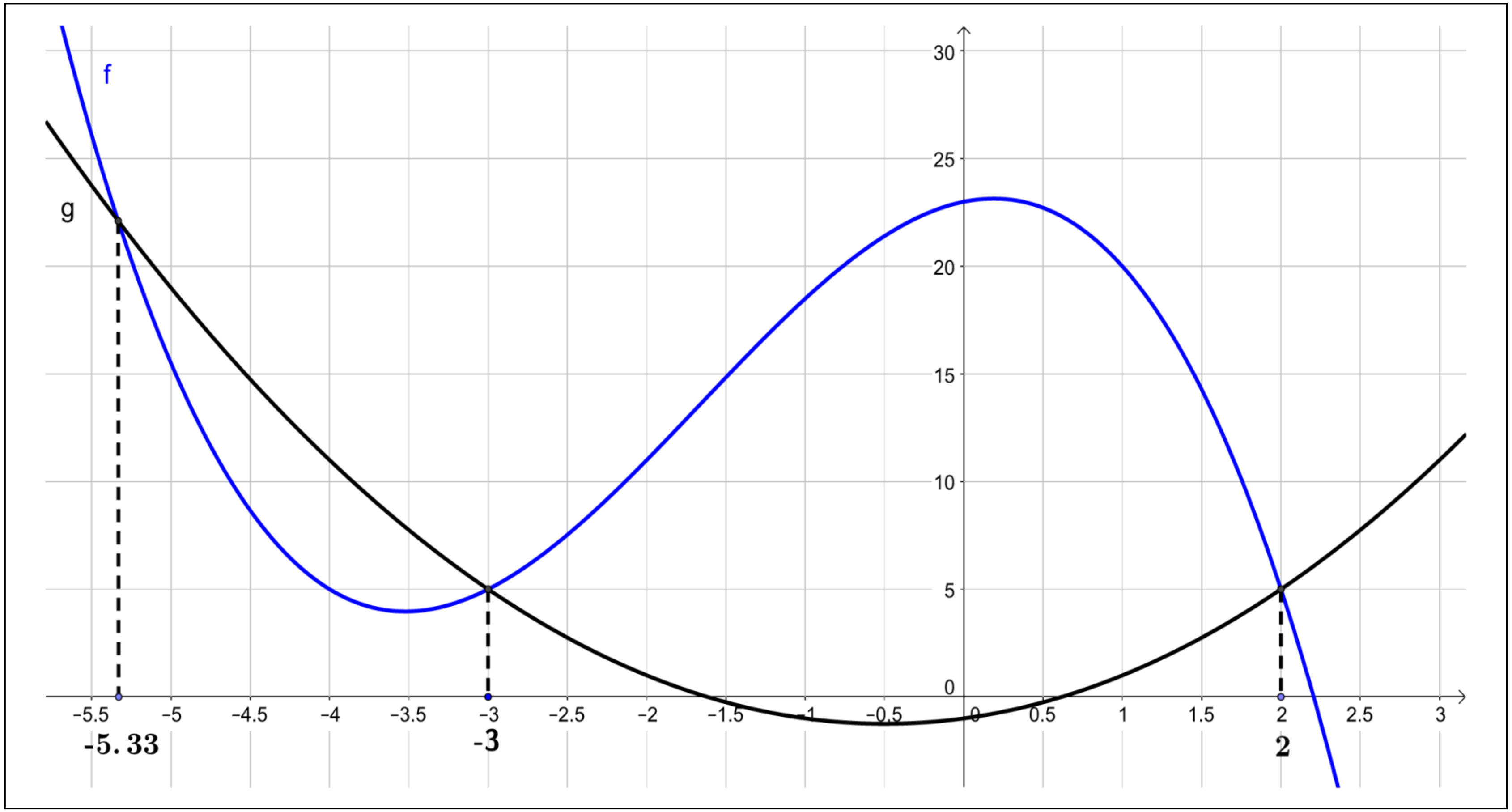
4. Résolution graphique d'équations : **f(x) = g(x)**

Exemple : $f(x) = -0.75\,x^3 - 3.75\,x^2 + 1.5\,x + 23$ et $g(x) = x^2 + x - 1$



4. Résolution graphique d'équations : **f(x) = g(x)**

Exemple



Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g. Donc les solutions sont -5.3, -3 et 2 : S = {-5.3 ; -3 ; 2}

4. Résolution graphique d'inéquations :

4.3. Résolution de l'inéquation f(x) ≥ k, k $\in$ IR

Résoudre l'inéquation f(x) ≥ k , c'est chercher les nombres *x* qui ont une image supérieure ou égale à k

Graphiquement, cela revient à trouver les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à k

Ces points sont au dessus de (ou sur) la droite d'équation y = k

4. Résolution graphique d'inéquations : $\mathbf{f(x) \geq k}$, $k \in \mathbb{R}$

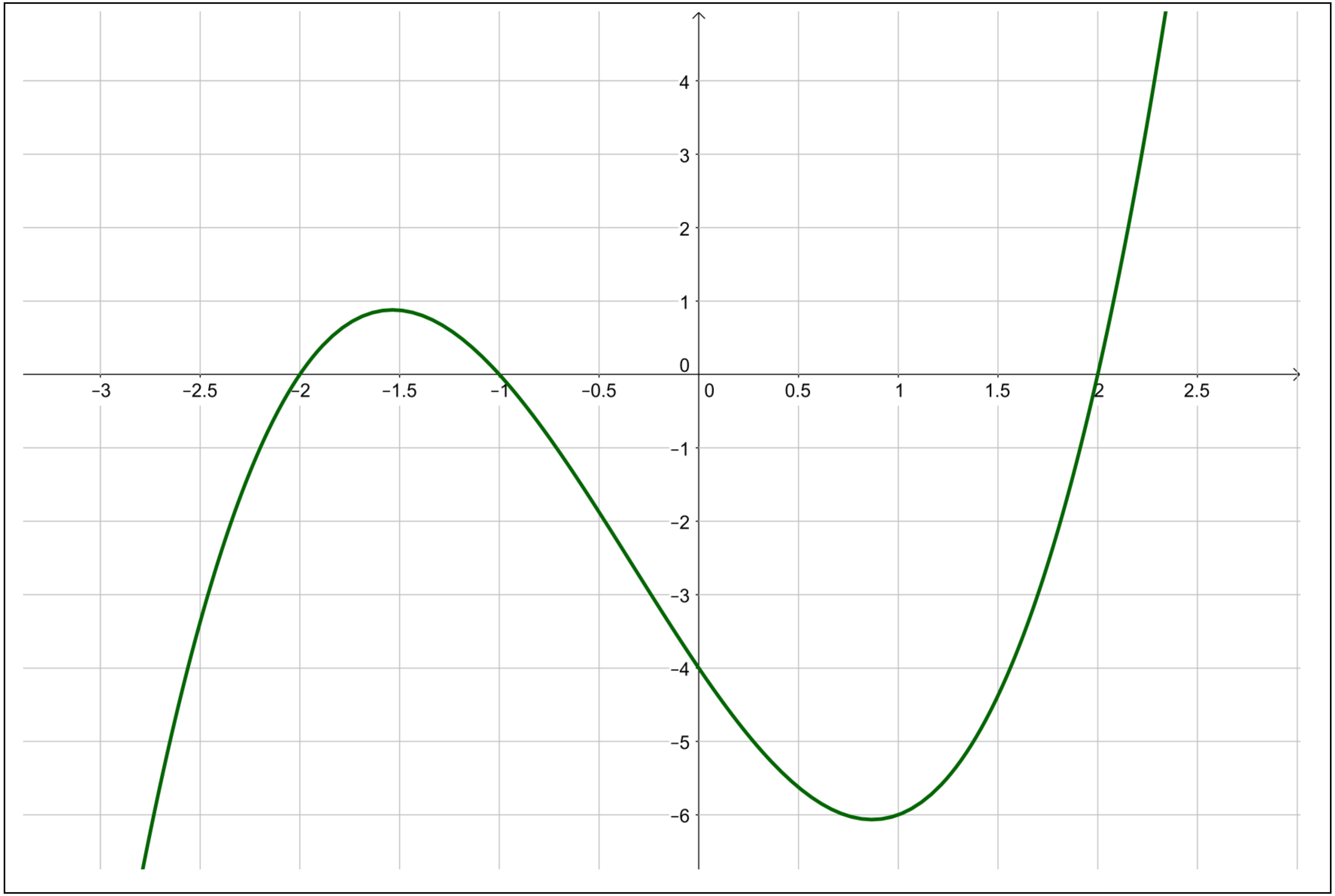
Exemple

$f(x) = x^3+x^2-4x-4$

Résoudre

$f(x) \geq 2$

$f(x) \leq -1$



4. Résolution graphique d'inéquations : $f(x) \geq k$

Résoudre graphiquement $\mathbf{f(x) \geq 2}$

Je trace la droite (d) d'équation y = 2

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de C_f situés au dessus ou sur la droite (d)

Donc l'ensemble des solutions est
$[\ 2{,}2\ ;\ +\infty\ [$

Résoudre graphiquement $\mathbf{f(x) \leq -1}$

Je trace la droite (d) d'équation y = -1

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de C_f situés au dessous ou sur la droite (d)

Donc l'ensemble des solutions est
$]\ -\infty\ ;\ -2{,}2\ [\ \cup\ ]\ -0{,}75\ ;\ 1{,}9\ [$

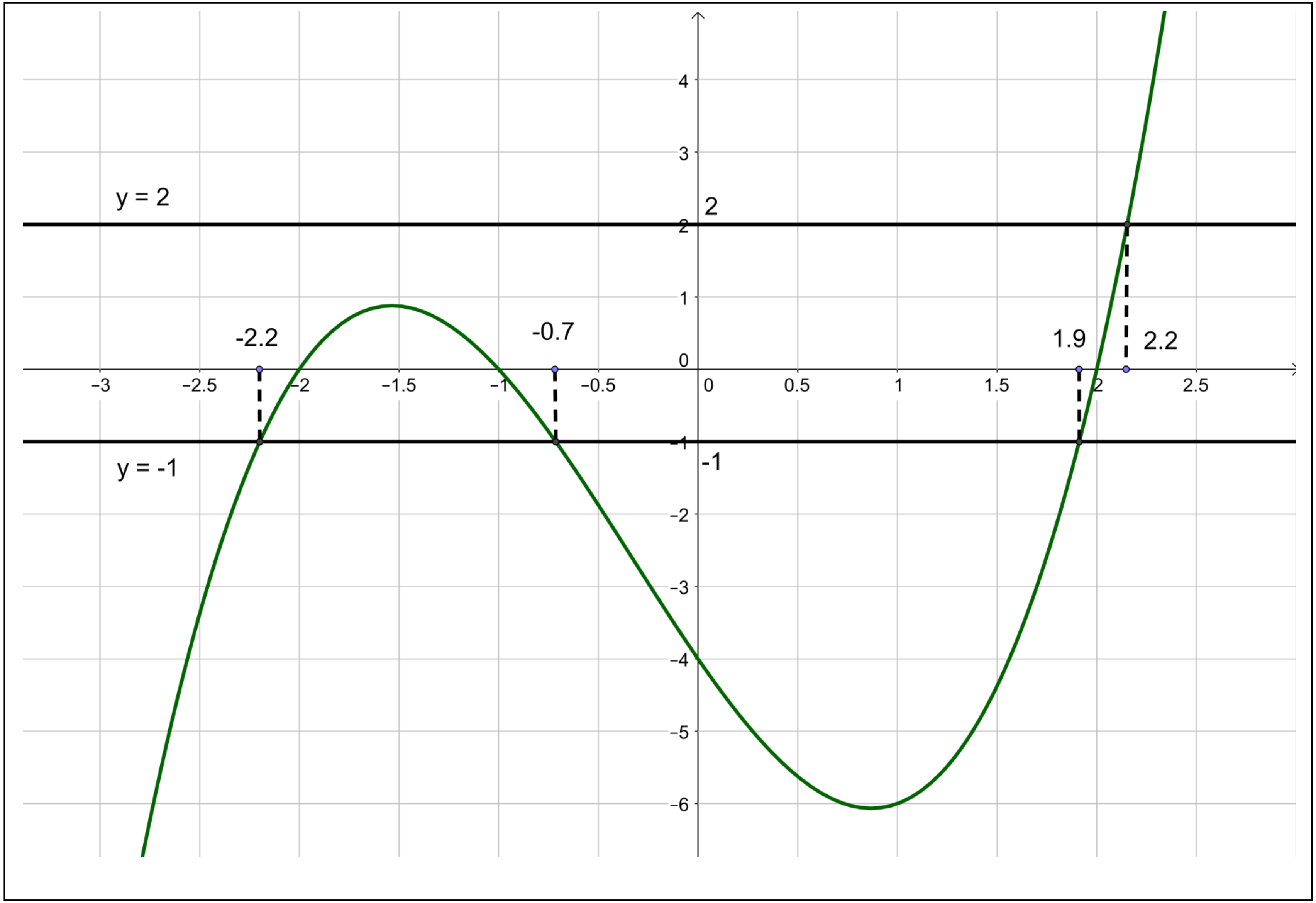
4. Résolution graphique d'inéquations : $\mathbf{f(x) \geq k}$

Exemple

$f(x) = x^3+x^2-4x-4$

$f(x) \geq 2$

$f(x) \leq -1$



4. Résolution graphique d'inéquations :

4.4. Résoudre f(x) < 0 ou f(x) > 0 , c'est déterminer les signes d'une fonction

Graphique ci-dessus

Résoudre graphiquement f(x) > 0

les solutions sont les abscisses des points de Cf situés au dessus de l'axe des abscisses,

$S =]-2 ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

Résoudre graphiquement f(x) < 0

les solutions sont les abscisses des points de Cf situés au dessous de l'axe des abscisses,

$S =]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 2[$

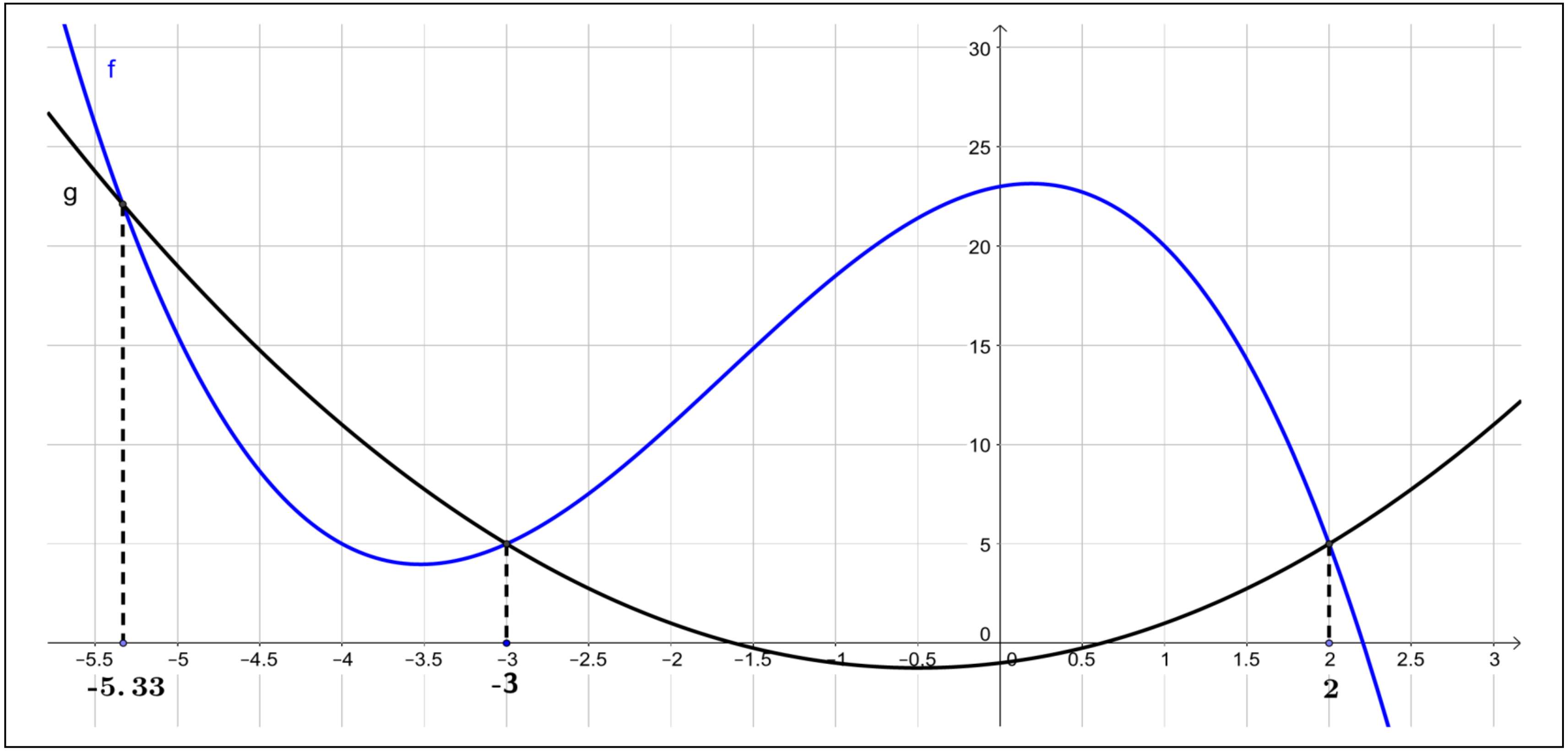
4. Résolution graphique d'une inéquation (signes d'une fonction)

On résume cette recherche dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
Signe de f(x)		–	0	+	0	–	0	+	

4.5. **Résoudre graphiquement f(x) ≥ g(x)**

Les solutions sont les abscisses des points de C_f situés au dessus ou sur C_g



L'ensemble des solutions de l'inéquation est] -∞ ; -5,3 [∪] -3 ; 2 [

FIN