

# Chapitre II

## Vecteurs

# 1. Colinéarité

1. Colinéarité

**D1** : Un vecteur est un objet mathématique caractérisé par :  
une longueur, une direction et un sens.

**D2** : On dit que deux vecteurs  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ .  
sont colinéaires si et seulement si

il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$       ( $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ).

ou bien un réel  $k'$  tel que  $\vec{v} = k'\vec{u}$       ( $\overrightarrow{CD} = k'\overrightarrow{AB}$ ).

1. Colinéarité

**R1** : Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls, alors  $k \neq 0$  et  $k' = \frac{1}{k}$

et si  $k > 0$ , ( $k' > 0$ )  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même sens ;

si  $k < 0$ , ( $k' < 0$ )  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraires ;

**R2** : Deux vecteurs non nuls sont colinéaires  
si et seulement si ils ont la même direction.

**R3** : Si  $k = 0$  alors  $\vec{u} = \vec{0}$  ( pour tout  $\vec{v}$  ) ;  
le vecteur nul est donc colinéaire à tout vecteur.

1. Colinéarité

T1 : Soit deux droites (AB) et (CD)

(AB) // (CD) équivaut à  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

T2 : Soit trois points A, B, C, distincts deux à deux,

A, B, C sont alignés si et seulement si

il existe un réel k tel que  $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ . (k ≠ 0)

Preuve : A, B, C alignés équivaut à (AB) // (AC)

1. Colinéarité

**Exercices**

**n° 16 à 22 p190**

**n° 43-44-45 p193**

**n° 73-74 p198**

## 2. Repérage

## 2. Repérage

**D3** : Un repère du plan  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  est donné par un point : l'origine  $O$  et deux vecteurs non colinéaires : la base  $(\vec{i} ; \vec{j})$

**R4** : en seconde c'était 3 points non alignés  $(O, I, J)$ .

**R5** : les 3 types de repères :  
Repère Orthonormal (RON),  
Repère Orthogonal (ROG),  
Repère quelconque.

## 2. Repérage

**T3** : Dans un repère du plan  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , pour tout point M, le vecteur  $\vec{OM}$  peut s'écrire de façon unique  $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$ .

**D4** : x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de M,  
(x ; y) s'appelle le couple de coordonnées de M.

(x ; y) est aussi le couple de coordonnées du vecteur  $\vec{OM}$

## 2. Repérage

**D5** : On appelle coordonnées d'un vecteur  $\vec{v}$  les coordonnées du point M (celles du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ ) tel que  $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ .

$$\text{Soit } M(x ; y) \Leftrightarrow x \vec{i} + y \vec{j} = \overrightarrow{OM} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}(x ; y)$$

**T4** : Dans un repère du plan  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ,

soit  $\vec{u}(x ; y)$  et  $\vec{v}(x' ; y')$  ; k est un réel.

alors  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $(x+x' ; y+y')$

et  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $(kx ; ky)$

### 3. Vecteurs dans un repère

### 3. Vecteurs dans un repère

**T5** : Dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  soit  $\vec{u}$   $(x ; y)$  et  $\vec{v}$   $(x' ; y')$ .  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' - x'y = 0$ .

**Preuve :**

soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires ( $\exists k \in \mathbf{R}$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$ )  
si  $\vec{u} = \vec{0}$  c'est évident car  $(x ; y) = (0 ; 0)$ . Idem si  $\vec{v} = \vec{0}$ .

Sinon  $x \neq 0$  (ou bien  $y \neq 0$ ) et donc  $k \neq 0$  c'est-à-dire :

$\exists k \in \mathbf{R}^*$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  donc  $x' = kx$  et  $y' = ky$

donc  $x'y' = kxy' = kx'y$  donc  $xy' = x'y$  (en divisant par  $k \neq 0$ ).

### 3. Vecteurs dans un repère

Réciproque : Soit  $xy' = x'y$  :

si  $\vec{u} = \vec{0}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires. (Idem si  $\vec{v} = \vec{0}$ )

Sinon  $x \neq 0$  (ou bien  $y \neq 0$ ) : posons alors  $k = \frac{x'}{x}$

alors  $x' = kx$  et  $y' = \frac{x'y}{x} = ky$  donc  $\vec{u} = k\vec{v}$

donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont bien colinéaires.

Rq : les coordonnées de  $\vec{u}$  sont proportionnelles à celle de  $\vec{v}$ .

3. Vecteurs dans un repère

**T6** : Tout triplet de points non alignés constitue un repère du plan.

c'est-à-dire que si A, B, C sont 3 points non alignés,  
alors pour tout point M du plan, il existe

un unique couple de réels  $(x ; y)$  tel que  $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$

**R6** :  $(x ; y)$  est le couple des coordonnées du point M  
(et du vecteur  $\overrightarrow{AM}$ ) dans le repère  $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ .

3. Vecteurs dans un repère

**T7** : Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont 2 vecteurs du plan non colinéaires, alors tout vecteur  $\vec{w}$  peut s'écrire de manière unique :

$$\boxed{\vec{w} = x \vec{u} + y \vec{v}}$$

**R7** : x et y sont les coordonnées de  $\vec{w}$  dans la base  $(\vec{u} ; \vec{v})$ .

Ex : Soit un triangle ABC de centre de gravité G.

Prouver que  $\vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC}$ .

3. Vecteurs dans un repère

**Exercices**

**n° 24 à 31 p192**

**n°69-70-71 p197**

## 4. Equation cartésienne d'une droite

#### 4. Equation cartésienne d'une droite

**D6** : Un vecteur est appelé directeur de la droite (AB) s'il a la même direction que  $\overrightarrow{AB}$ .

(ce vecteur est donc non nul, colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ )

**T8** : si  $k \neq 0$  et si  $\overrightarrow{u}$  est directeur de la droite (d) alors tous les vecteurs  $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$  le sont aussi.

**T9** : soit 2 droites (d) et (d') de vecteurs directeurs  $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$ .  
(d) // (d') équivaut à  $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$  sont colinéaires.

## 4. Equation cartésienne d'une droite

**T10** : L'ensemble des points  $M(x ; y)$  d'une droite  $(AB)$  vérifient une équation du type :

$$\boxed{\mathbf{ax + by + c = 0}} \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0.$$

**Preuve :**

$$M(x ; y) \in (AB)$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y + (x_By_A - x_Ay_B) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

$$\text{avec } a = y_B - y_A, b = x_A - x_B, c = x_By_A - x_Ay_B.$$

$$\text{Rappel : } \overrightarrow{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A)$$

4. Equation cartésienne d'une droite

**R8** : On sait déjà que toute équation de ce type est l'équation d'une droite d'équation réduite :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ si } b \neq 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{c}{a} \text{ si } b = 0.$$

**D7** :  $ax + by + c = 0$  s'appelle équation cartésienne de d.

#### 4. Equation cartésienne d'une droite

**T11** : Soit  $ax + by + c = 0$  une équation de la droite  $d$ ,  
alors le vecteur  $\vec{u}(-b ; a)$  est un vecteur directeur de  $d$ .

**Preuve** : Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $d$ ,

$$\text{alors } ax_B + by_B = ax_A + by_A (= -c)$$

$$\text{donc } a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0$$

$$\text{soit } a(x_B - x_A) - (-b)(y_B - y_A) = 0$$

et donc  $\vec{u}(-b ; a)$  est colinéaire à  $\vec{AB}$ , (d'après **T5** )

lui-même vecteur directeur de  $d$ .

4. Equation cartésienne d'une droite

**T12** : si  $b \neq 0$ , le coefficient directeur de (d) est  $m = -\frac{a}{b}$  ;

et le vecteur  $\vec{v}$  (1 ; m) est directeur de la droite (d).

En effet  $\vec{u}$ (-b ; a) et  $\vec{v}$  (1 ; m) vérifient :  $\vec{u} = -b \vec{v}$

4. Equation cartésienne d'une droite

**Exercices**

**n°33-34-35 p192**

**n°38-39-41 p193**

**n°48-49-50 p194**

**n°55-56-57 p194**

**n°69-70-71 p197**

**FIN**