Chapitre I

Trinôme

I - TRINÔME

1. Résolution de l'équation du second degré

1. Résolution de l'équation du second degré

Problème : Trouver les dimensions d'un rectangle
d'aire 323 m² et de périmètre 72 m.

1. Résolution de l'équation du second degré

Problème : Trouver les dimensions d'un rectangle
d'aire 323 m² et de périmètre 72 m.

Soit x la longueur et y la largeur du rectangle.

On obtient le système (symétrique) : $\begin{cases} x + y = 36 \\ xy = 323 \end{cases}$

Puis l'équation : $x^2 - 36x + 323 = 0$ (avec $y = 36 - x$)

1. Résolution de l'équation du second degré

Résoudre avec Geogebra : $\mathbf{x^2 - 36x + 323 = 0}$ $(y = 36 - x)$

x est la largeur AB du Rectangle (ABCD),
et k est le côté du PCarré (EIJG) donc $y = x + 2k$.

Le demi périmètre du rectangle (ABCD) est $x + y = 2x + 2k = 36$
donc le côté du GCarré (AKJH) est : $\boxed{\mathbf{x + k = 18}}$
et l'aire du GCarré (AKJH) est alors $18^2 = 324$.

Or R3 = R'3 donc l'aire xy du rectangle (ABCD) est égale à
l'aire du GCarré (AKJH) – l'aire du PCarré (EIJG)

donc $xy = (x + k)^2 - k^2$ soit $\mathbf{k^2} = (x + k)^2 - xy = 324 - 323 = \mathbf{1}$.
Conclusion $\mathbf{k = 1}$ donc $x = 18 - 1 = 17$ donc $y = 36 - 17 = 19$

1. Résolution de l'équation du second degré

Résoudre : $\mathbf{x^2 - 36x + 323 = 0}$

La clé est k tel que $\boxed{x + k = 18}$ soit $-k = x - 18$

d'où $\mathbf{k^2 = x^2 - 36x + 18^2}$

Soit $k^2 = 18^2 - 323 = 1$ d'où $k = 1$ ou $k = -1$.

Et enfin $x = 18 - 1 = 17$ ou $x = 18 + 1 = 19$

1. Résolution de l'équation du second degré

Application : Trouver les dimensions d'un rectangle
d'aire 1 km² et de périmètre 8 km.
(Réponse en mètres avec une précision de 1mm).

1. Résolution de l'équation du second degré

Application : Trouver les dimensions d'un rectangle d'aire 1 m² et de périmètre 8 m.

Soit x la longueur et y la largeur du rectangle.

On obtient le système : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

Puis l'équation : $x^2 - 4x + 1 = 0$ (avec $y = 4 - x$)

1. Résolution de l'équation du second degré

Résoudre : $\mathbf{x^2 - 4x + 1 = 0}$ (avec $y = 4 - x$)

Comme précédemment $y = x + 2c$

donc $2(x + y) = 4x + 4k = 8$ soit $\boxed{\mathbf{x + k = 2}}$

Et $(x + k)^2 = xy + k^2$ soit $4 = 1 + k^2$ d'où $k^2 = 3$

Conclusion : $k = \sqrt{3}$ donc $x = \boxed{\mathbf{2 - \sqrt{3}}}$ et $y = 4 - x = \boxed{\mathbf{2 + \sqrt{3}}}$

$x \approx 267{,}949$ m et $y \approx 3732{,}051$ m à 1 mm près.

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

x est l'inconnue, a, b, c des nombres donnés ($a \neq 0$).

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}} \qquad (a \neq 0).$$

Mise sous forme canonique et résolution de l'équation

(E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

1- Prouver que : $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$ (soit $k^2 - 5^2$)

2- En déduire que : $x^2 - 10x + 21 = (x - 5)^2 - 4$ (soit $k^2 - 4$)

3- Factoriser $(x - 5)^2 - 4$ (penser à $4 = 2^2$)

4- Trouver toutes les solutions de (E)

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (a \neq 0).$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation (E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

1- $(x - 5)^2 - 25 = (x^2 - 10x + 25) - 25 = x^2 - 10x$

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad (a \neq 0).$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation (E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

1- $(x - 5)^2 - 25 = (x^2 - 10x + 25) - 25 = x^2 - 10x$

2- donc $x^2 - 10x + 21 = (x - 5)^2 - 25 + 21 = (x - 5)^2 - 4$

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad (a \neq 0).$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation (E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

1- $(x - 5)^2 - 25 = (x^2 - 10x + 25) - 25 = x^2 - 10x$

2- donc $x^2 - 10x + 21 = (x - 5)^2 - 25 + 21 = (x - 5)^2 - 4$

3- $(x - 5)^2 - 4 = (x - 5)^2 - 2^2$

$= (x - 5 - 2)(x - 5 + 2) = (x - 7)(x - 3)$

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple 2 : Résoudre l'équation (E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

1- $(x - 5)^2 - 25 = (x^2 - 10x + 25) - 25 = x^2 - 10x$

2- donc $x^2 - 10x + 21 = (x - 5)^2 - 25 + 21 = (x - 5)^2 - 4$

3- $(x - 5)^2 - 4 = (x - 5)^2 - 2^2$

$= (x - 5 - 2)(x - 5 + 2) = (x - 7)(x - 3)$

4- $x^2 - 10x + 21 = 0$ équivaut à $\mathbf{(x - 7)(x - 3) = 0}$

qui équivaut à $x - 7 = 0$ ou $x - 3 = 0$

Les solutions de (E) sont donc 7 et 3

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple 2 : Résoudre l'équation (E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

Les solutions de (E) sont 3 et 7.

Vérifiez :
Entrez dans votre calculatrice : $Y1 = x^2 - 10x + 21$
La courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
Combien de fois ?
Quelles sont les abscisses de ces points ?

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple 2 : Résoudre l'équation (E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

Les solutions de (E) sont 3 et 7.

Définition 1 : l'écriture $(x - 3)(x - 7)$ s'appelle
factorisation du trinôme $x^2 - 10x + 21$

Vérifiez l'égalité.

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple 2 : Résoudre l'équation (E) : $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

Définition 2 : l'écriture $(x - 5)^2 - 4$ s'appelle
mise sous forme canonique du trinôme $x^2 - 10x + 21$

(Vérifiez)

Remarque 2 : $\dfrac{-b}{2a} = 5$ (soit $x + k = \dfrac{-b}{2a}$)

et $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 4$ (c'est k^2) soit $k = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 2$ ou -2

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

x est l'inconnue, a, b, c des nombres donnés ($a \neq 0$).

Cas général

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = \mathbf{a}\left[\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{(2a)^2}}\right]$$

avec $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}} \qquad (a \neq 0).$$

et **si** $\boxed{\mathbf{\Delta \geq 0}}$ **alors**

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\text{d'où } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$ (a ≠ 0).

Méthode :

1 – Calculer le discriminant : $$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

2 – Si Δ > 0 l'équation a deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

I - TRINÔME

1. Résolution de l'équation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

1 – Calculer le discriminant : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

2 – les solutions :

Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Si $\Delta = 0$ l'équation a une solution (double) : $\boxed{x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}}$

Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution.

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple3 : Résoudre $x^2 + 2x + 6 = 0$

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple3 : Résoudre $x^2 + 2x + 6 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 6 = -20 < 0$
donc pas de solution

Vérifiez :
dans votre calculatrice, entrez la fonction $y1 = x^2 + 2x + 6$
Sa courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses (Ox) ?

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple4 : Résoudre $-2x^2 + 6x + 20 = 0$

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple4 : Résoudre $-2x^2 + 6x + 20 = 0$

$\Delta = (6)^2 - 4 \times (-2) \times 20 = 36 + 160 = 196$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \times (-2)} \text{ et } x_2 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \times (-2)}$$

$$\text{soit } x_1 = \frac{-6 + 14}{-4} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-6 - 14}{-4} = 5$$

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple4 : Résoudre $-2x^2 + 6x + 20 = 0$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions : $x_1 = -2$ et $x_2 = 5$

Vérifiez :
Dans votre calculatrice, entrez la fonction $y2 = -2x^2 + 6x + 20$
Sa courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses (Ox) ?
Combien de fois ?
Quelles sont les abscisses des points d'intersection ?

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple5 : Résoudre $3x^2 - 42x + 147 = 0$

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple5 : Résoudre $3x^2 - 42x + 147 = 0$

$\Delta = (-42)^2 - 4 \times 3 \times 147 = 1764 - 1764 = 0$

il y a donc une seule solution : $x = \dfrac{-(-42)}{2\times3} = 7$

1. Résolution de l'équation du second degré

Exemple5 : Résoudre $3x^2 - 42x + 147 = 0$
il y a une seule solution : $x = 7$

Vérifiez :
Dans votre calculatrice, entrez la fonction $y3 = 3x^2 - 42x + 147$
Sa courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses (Ox) ?
Combien de fois ?
Quelle est l'abscisse du point d'intersection ?

2. Factorisation du trinôme (dans R)

Si elles existent, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'appellent les racines du trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$

Si T a deux racines x_1 et x_2 alors $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si T a une racine double x_1 alors $T(x) = a(x - x_1)^2$

Si T n'a pas de racine, alors T(x) n'a pas de factorisation.

2. Factorisation du trinôme (dans R)

Pratique :
Factoriser les trinômes des exemples 1 à 5 (si possible)

$x^2 - 36x + 323 =$

$x^2 - 4x + 1 =$

$x^2 - 10x + 21 =$

$x^2 + 2x + 6 =$

$-2x^2 + 6x + 20 =$

$3x^2 - 42x + 147 =$

2. Factorisation du trinôme (dans R)

Factoriser les trinômes des exemples 1 à 5 (si possible)

$x^2 - 36x + 323 = (x - 17)(x - 19)$
$x^2 - 4x + 1 = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})$
$x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$
$x^2 + 2x + 6$ n'a pas de factorisation
$-2x^2 + 6x + 20 = -2(x - 5)(x + 2)$
$3x^2 - 42x + 147 = 3(x - 7)^2$

2. Factorisation du trinôme (dans R)

Remarque :

Factoriser le trinôme $ax^2 + bx + c$ revient à trouver ses racines

ce qui revient à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Si on connait une factorisation du trinôme,

on connait ses racines !

3. Signe du trinôme

Règle : le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

est toujours du signe de a

sauf pour les valeurs de x comprises entre les racines

(si elles existent).

Tableau de signe du trinôme pour deux racines $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a

3. Signe du trinôme

Pratique :
Dresser les tableaux de signe des trinômes précédents.

$x^2 - 36x + 323 = (x - 17)(x - 19)$
$x^2 - 4x + 1 = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})$
$x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$
$x^2 + 2x + 6$ n'a pas de factorisation
$-2x^2 + 6x + 20 = -2(x - 5)(x + 2)$
$3x^2 - 42x + 147 = 3(x - 7)^2$

3. Signe du trinôme

$x^2 - 36x + 323 = (x - 17)(x - 19)$ $\qquad$ $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	17		19	$+\infty$
$x^2 - 36x + 323$	$+$	0	$-$	0	$+$

On retrouve le tableau de signes bien connu :

x	$-\infty$	17		19	$+\infty$
$x - 17$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 19$	$-$		$-$	0	$+$
$x^2 - 36x + 323$	$+$	0	$-$	0	$+$

3. Signe du trinôme

$x^2 - 4x + 1 = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})$ $\qquad$ $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$		$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

On retrouve le tableau de signes bien connu :

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$		$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x - 2 + \sqrt{3}$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 2 - \sqrt{3}$	$-$		$-$	0	$+$
$x^2 - 4x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

3. Signe du trinôme

$x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$ $\qquad a = 1 > 0$

x	$-\infty$	3		7	$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$	+	0	–	0	+

On retrouve le tableau de signes bien connu :

x	$-\infty$	3		7	$+\infty$
$x - 3$	–	0	+		+
$x - 7$	–		–	0	+
$x^2 - 10x + 21$	+	0	–	0	+

3. Signe du trinôme

$x^2 + 2x + 6$ n'a pas de factorisation $a = 1 > 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$x^2 + 2x + 6$	$+$

3. Signe du trinôme

$-2x^2 + 6x + 20 = -2(x - 5)(x + 2)$ $\qquad$ $a = -2 < 0$

x	$-\infty$	-2		5	$+\infty$
$-2x^2 + 6x + 20$	–	0	+	0	–

On retrouve le tableau de signes bien connu :

x	$-\infty$	-2		5	$+\infty$
-2	–		–		–
$x - 3$	–	0	+		+
$x - 7$	–		–	0	+
$-2x^2 + 6x + 20$	–	0	+	0	–

3. Signe du trinôme

$3x^2 - 42x + 147 = 3(x-7)^2$

x	$-\infty$		7	$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$		+	0	+

On retrouve le tableau de signes bien connu :

x	$-\infty$		7	$+\infty$
$(x-7)^2$		+	0	+
$x^2 - 10x + 21$		+	0	+

3. Signe du trinôme

Remarque :

Résoudre une inéquation du second degré comme

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c > 0$$

revient à étudier le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

FIN