

**D'un siècle
à un autre**

En mécanique quantique, la trajectoire d'un électron n'est pas mesurable. En revanche, cette partie de la physique peut déterminer la probabilité de trouver un électron dans une zone de l'espace proche du noyau atomique (figure ci-dessus : vue d'artiste de l'orbitale atomique 4f). C'est en réalisant un produit scalaire, notion introduite par Hermann Grassmann, qu'on détermine cette probabilité.



En savoir plus sur
**Hermann Günther
Grassmann**

→ Chercheurs d'hier p. 227

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Distance AB

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors :

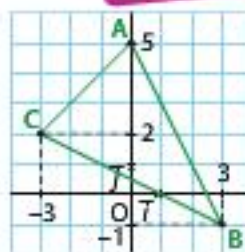
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

1. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

2. Le triangle ABC est-il isocèle ?

3. Démontrez que le périmètre du triangle ABC est égal à $3(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$.



Mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

• α est une mesure quelconque en radians de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. La mesure principale β de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ s'obtient en écrivant :

$$\alpha = \beta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{avec} \quad -\pi < \beta \leq \pi.$$

• La valeur absolue de la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure en radians de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

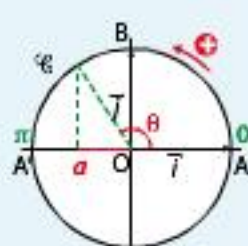
1. On donne $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{35}{6}\pi$.

2. Quelle est la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$?

3. Quelle est la mesure en degrés de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Cosinus d'un angle et mesure de cet angle

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre a de $[-1; 1]$, il existe un seul nombre θ de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que $\cos \theta = a$.

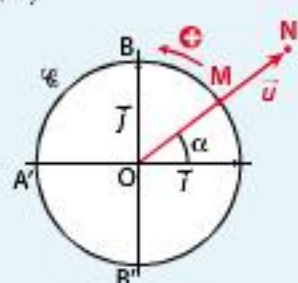


1. Dans chacun des cas suivants, on donne $\cos(\vec{u}, \vec{v})$. Quelle est la mesure en radians, puis en degrés, de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$; b) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$.

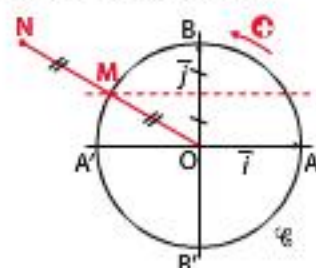
Cercle trigonométrique et coordonnées d'un vecteur

Sur la figure ci-dessous, $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note α une mesure quelconque de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$.



- M a pour coordonnées $(\cos \alpha; \sin \alpha)$.
- $\vec{OM} = \vec{u}$ donc le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées les coordonnées de M, soit $(\cos \alpha; \sin \alpha)$.

1. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.



M est un point de $\mathcal{C}$ et de la médiatrice du segment [OB]; le point N est défini par $\vec{ON} = 2\vec{OM}$. Quelles sont les coordonnées de N ?

→ Voir les corrigés p. 363

Activité

UNE APPROCHE DU PRODUIT SCALAIRE

Les notions de distance et d'orthogonalité sont liées par le théorème de Pythagore : dire que « Le triangle ABC est rectangle en B » équivaut à dire que « $AC^2 - AB^2 - BC^2 = 0$ ».

On se pose alors la question suivante : « Que devient l'expression $\delta = AC^2 - AB^2 - BC^2$ lorsque ABC n'est pas un triangle rectangle ? »

On note H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle quelconque ABC.

On envisage les trois cas de figures possibles suivant la position de H par rapport à A et B.

On note θ la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$; θ est donc aussi la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$.

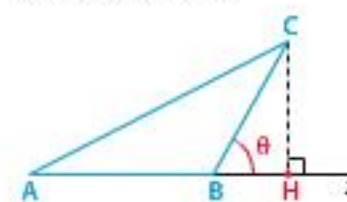
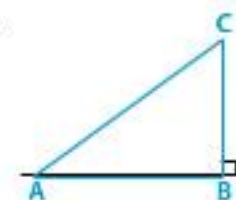


Figure 1

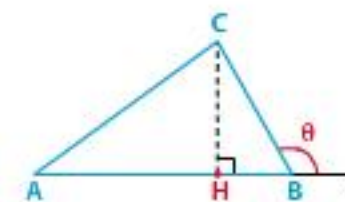


Figure 2

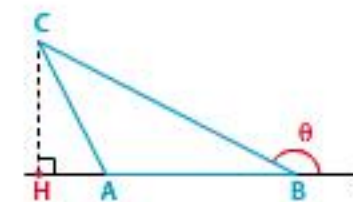


Figure 3

1. Pour les trois cas de figures, démontrez que $\delta = AH^2 - AB^2 - BH^2$ (1).

2. Figure 1 : A, B, H sont alignés dans cet ordre, donc $AH = AB + BH$.

Démontrez, à partir de (1), que $\delta = 2AB \times BC \times \cos \theta$.

Figure 2 : A, H, B sont alignés dans cet ordre, donc $AH = AB - BH$.

Démontrez que $\delta = -2AB \times BH = -2AB \times BC \times \cos(\pi - \theta) = 2AB \times BC \times \cos \theta$.

Figure 3 : H, A, B sont alignés dans cet ordre, donc $AH = BH - AB$.

Démontrez que $\delta = -2AB \times BC \times \cos(\pi - \theta) = 2AB \times BC \times \cos \theta$.

Conclusion

Le nombre $\frac{\delta}{2}$, égal à $\frac{1}{2} [AC^2 - AB^2 - BC^2] = AB \times BC \times \cos \theta$, est indépendant du cas de figure envisagé. Il est appelé **produit scalaire** des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$, et se note $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Passons au cas général en posant $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$. Alors $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{u} + \vec{v}$. AB est la longueur de $\vec{u}$, que l'on note $\|\vec{u}\|$ (on lit « norme de $\vec{u}$ »).

De même, $BC = \|\vec{v}\|$ et $AC = \|\vec{u} + \vec{v}\|$. On peut alors définir le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

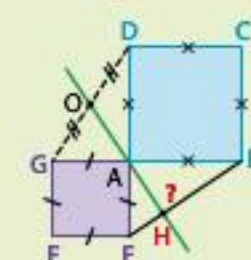
Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre ... Est-il plus facile ?

ABCD et AEGF sont deux carrés de cotés respectifs 6 et 4 disposés comme l'indique la figure ci-contre.

O est le milieu du segment [GD].

Les droites (OA) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?



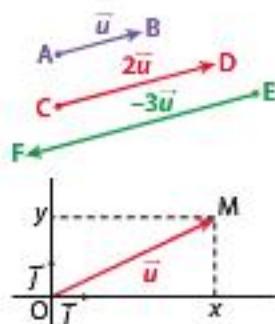
1 Produit scalaire : définition et expressions

1.1 Norme d'un vecteur

Définition 1 Une unité de longueur étant choisie, la norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est la longueur AB. On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit unitaire.

$\|\vec{u}\|$ se lit « norme de $\vec{u}$ ».

- Conséquences.** • $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ équivaut à $A = B$.
• Pour tout nombre λ et tout vecteur $\vec{u}$, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.
Par exemple, $\|2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$ et $\|-3\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\|$.
• Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
En effet, si M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, alors M a pour coordonnées $(x; y)$, d'où $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.



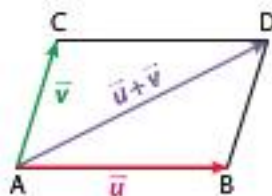
1.2 Définition du produit scalaire

Définition 2 Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réel. Ce nombre, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et, par définition :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2). \quad (1)$$

Par convention, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$. Ainsi : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

- Remarques.** • Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on obtient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
• ABCD est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AD^2 - AB^2 - AC^2)$.



1.3 Autres expressions du produit scalaire

En fonction des coordonnées (expression analytique)

Théorème 1 Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'. \quad (2)$$

Démonstration. Dans ces conditions, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$ donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy'.$$

Ainsi, en calculant $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$,

on obtient : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' - x^2 - x'^2 - y^2 - y'^2)$

soit après simplification : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Conséquence

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.

En fonction des normes et de l'angle

Théorème 2 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. (3)

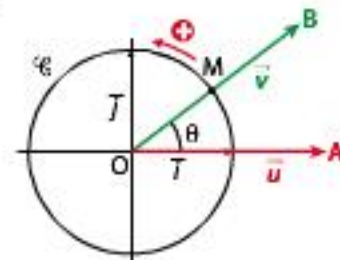
Exercice 4, p. 220

Démonstration. Posons $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Choisissons un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ soient colinéaires et de même sens. Notons M le point d'intersection de la demi-droite (OB) et du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(OA; 0)$, $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(OB \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OB}); OB \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OB}))$ ou encore $(OB \cos(\vec{u}, \vec{v}); OB \sin(\vec{u}, \vec{v}))$ car $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \vec{v})$.

Donc, d'après le théorème 1 : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times (OB \cos(\vec{u}, \vec{v})) + 0 \times (OB \sin(\vec{u}, \vec{v})) = OA \times OB \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, soit : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

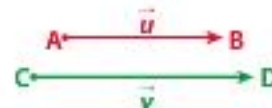
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls pour que l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ soit défini.



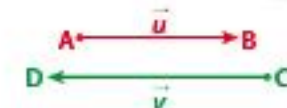
Remarque. Si θ est la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\cos \theta = \cos(\vec{u}, \vec{v})$ (voir chapitre 8, page 195). Donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$.

En pratique, on utilise souvent cette forme.

Cas particulier de deux vecteurs colinéaires



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens. Alors $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires. Alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ et : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$.

2 Règles de calculs

Théorème 3 Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et les nombres a et b :

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad 2. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad 3. (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab) \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Démonstration. Démontrons par exemple l'égalité 2.

Dans un repère orthonormé, notons $(x; y)$, $(x'; y')$, $(x''; y'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = \overbrace{xx' + yy'}^{\vec{u} \cdot \vec{v}} + \overbrace{xx'' + yy''}^{\vec{u} \cdot \vec{w}} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Exercice 81, ROC p. 234

Conséquences

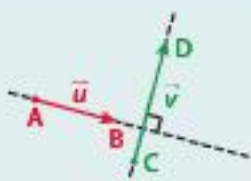
- $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}$ (égalité 3, avec $a = -1$ et $b = 1$)
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- Si l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, on obtient :
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}$
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2 = AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
- $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})^2 = AB^2 + CD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = AB^2 - CD^2$

3 Produit scalaire et orthogonalité

Définition 3 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur.



Théorème 4 Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ainsi, dire que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Démonstration. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est immédiat.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Or $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Or $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ équivaut à $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Conséquence. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, donc :
« $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » équivaut à « $xx' + yy' = 0$ ».

4 Projection orthogonale

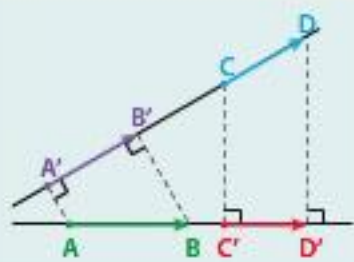
Le théorème suivant permet de ramener le calcul du produit scalaire de deux vecteurs au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires, calcul en général plus facile.

Théorème 5 $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non nuls.

Les points C' et D' sont les projetés orthogonaux respectivement de C et D sur la droite (AB).

Alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

Ceci est la 4^e expression du produit scalaire.



Démonstration. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{D'D}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = 0$.

Il en résulte que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

Remarques

• En considérant les projetés orthogonaux A' et B' des points A et B respectivement sur la droite (CD), on obtient de même : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD}$.

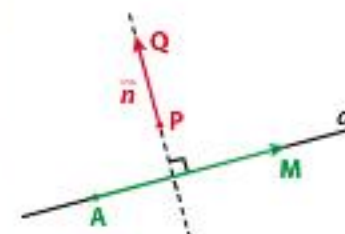
• Par abus de langage, on dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$ (en fait sur la droite (AB)). On peut alors retenir le théorème 5 sous la forme :

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, on peut remplacer l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ par son projeté orthogonal sur l'autre vecteur.

5 Droite et produit scalaire

5.1 Vecteur normal à une droite

Définition 4 Dire qu'un vecteur **non nul** $\vec{n}$ ($\vec{n} = \overrightarrow{PQ}$) est **normal** à une droite d signifie que les droites (PQ) et d sont perpendiculaires. Ainsi, un vecteur $\vec{n}$ normal à une droite d est orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de d .

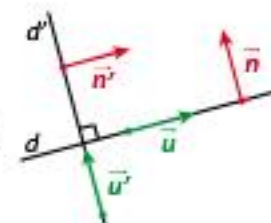


Conséquence Dire qu'un point M appartient à la droite d passant par A et perpendiculaire à la droite (PQ) équivaut à dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ ou $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Autres conséquences

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d , alors :
• $\vec{n}$ est un vecteur directeur de toute droite d' perpendiculaire à d ;
• $\vec{u}$ est un vecteur normal à toute droite d' perpendiculaire à d .
- d et d' sont deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ pour vecteurs normaux, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ pour vecteurs directeurs :

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u'} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \vec{u'} \text{ sont colinéaires.}$$



5.2 Vecteur normal et équation de droite

Théorème 6 Dans un repère orthonormé :

- si une droite d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), alors $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à d .
- réciproquement, si un vecteur $\vec{n}$ **non nul** de coordonnées $(a; b)$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration. • Supposons que la droite d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) et démontrons que $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à d .

Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de d .

Or $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ab + ab = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, et $\vec{n}$ est un vecteur normal à d .

• Réciproquement, supposons que le vecteur $\vec{n}(a; b)$, **non nul**, est normal à d et démontrons que d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Notons $A(x_0; y_0)$ un point de d .

D'après la conséquence de la définition 4, M(x; y) est un point de d équivaut à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit :

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \text{ ou } ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Cette équation est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$.

Conséquences

• d et d' ont respectivement pour équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

D'après la conséquence 2 (§ 5.1) : « d et d' sont perpendiculaires » équivaut à « $aa' + bb' = 0$ ».

• De même, si d et d' ont respectivement pour équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, alors : « d et d' sont perpendiculaires » équivaut à « $mm' = -1$ ».

En effet, $\vec{n}(m; -1)$ et $\vec{n'}(m'; -1)$ sont des vecteurs normaux à d et d' .

OBJECTIF 1 Choisir l'expression du produit scalaire la mieux adaptée

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls d'angle géométrique associé θ .

Pour calculer un produit scalaire, on peut utiliser les trois expressions suivantes :

- ① $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- ② $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$
- ③ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ où $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé.

EXERCICE RÉSOLU A Choisir la bonne expression

Pour chacune des figures ci-dessous, calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en choisissant l'expression du produit scalaire qui vous semble la mieux adaptée.

Figure 1



Figure 2

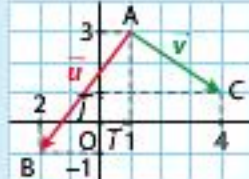
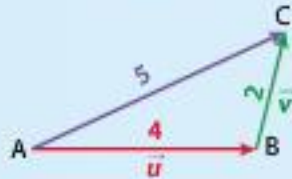


Figure 3



Méthode

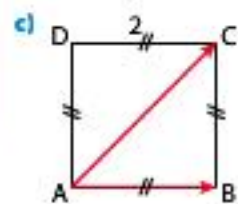
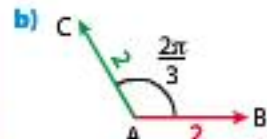
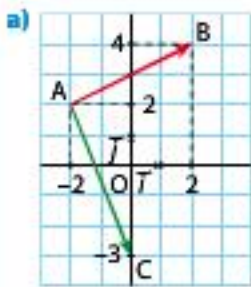
- **Figure 1** : on connaît les normes des deux vecteurs et l'angle géométrique associé. On choisit donc l'expression ②.
- **Figure 2** : le repère est orthonormé, on peut donc calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. On choisit donc l'expression ③.
- **Figure 3** : on connaît les normes des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$. On choisit donc l'expression ①.

Solution

- **Figure 1** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos 45^\circ$
soit : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.
- **Figure 2** : $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(-2 - 1; -1 - 3) = (-3; -4)$ et $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(4 - 1; 1 - 3) = (3; -2)$.
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \times 3 + (-4) \times (-2) = -9 + 8 = -1$.
- **Figure 3** : $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$
donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [25 - 16 - 4] = \frac{5}{2}$.

Mise en pratique Les coordonnées sont relatives à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ dans chaque cas.



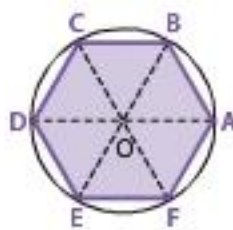
2 On donne les points $A(3; -2)$, $B(1; 2)$ et $C(5; -3)$. Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

3 Dans chacun des cas suivants, calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
- b) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{2\pi}{3}$.
- c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$.

4 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Calculez :

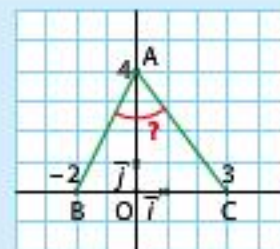
- a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$
- b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$
- c) $\vec{OA} \cdot \vec{BC}$
- d) $\vec{OA} \cdot \vec{AD}$



EXERCICE RÉSOLU B Calculer à partir du produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0; 4)$, $B(-2; 0)$ et $C(3; 0)$.

- 1. Calculez le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- 2. a) Déduisez-en $\cos \widehat{BAC}$.
- b) Donnez la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au dixième.



Méthode

- 1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
- On en déduit $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- 2. a) Pour calculer $\cos \widehat{BAC}$, on choisit l'expression $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$. Il reste à calculer AB et AC.
- On en déduit $\cos \widehat{BAC}$.

b) On utilise la calculatrice pour obtenir une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution

- 1. $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(-2 - 0; 0 - 4) = (-2; -4)$ et $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(3 - 0; 0 - 4) = (3; -4)$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \times 3 + (-4) \times (-4) = 10$.
- 2. a) $AB = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $AC = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
 $10 = 2\sqrt{5} \times 5 \times \cos \widehat{BAC}$
donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{10}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- b) $\widehat{BAC} \approx 63,4^\circ$.

Mise en pratique Les coordonnées sont relatives à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5 ABC est un triangle tel que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18, AB = 6 \text{ et } AC = 2\sqrt{3}.$$

- 1. Quelle expression choisir pour calculer $\cos \widehat{BAC}$?
- 2. Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$?

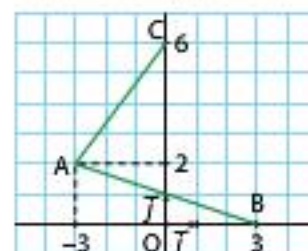
6 On donne les points $A(3; 0)$, $B(0; 4)$ et $C(8; 0)$.

- 1. a) Calculez BA et BC.
- b) Démontrez que $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 40$ et que :
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 20\sqrt{5} \cos \widehat{ABC}$.

2. Déduisez-en $\cos \widehat{ABC}$, puis une mesure de $\widehat{ABC}$ à un degré près.

7 On donne les points $A(-3; 2)$, $B(3; 0)$ et $C(0; 6)$.

1. Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



2. a) Démontrez que $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

b) Déduisez-en une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ à un degré près.

8 A, B et C sont trois points tels que :

- $AB = 4$;
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$;
- $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

Calculez la longueur AC.

9 Dans chacun des cas suivants, trouvez une mesure en radians de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- a) $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$.
- b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.
- c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

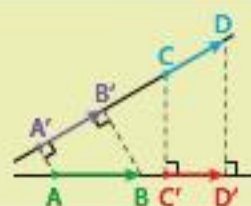
10 A, B et C sont trois points tels que :

- $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires;
 - $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -15$;
 - $AC = 3$.
- Calculez la longueur AB.

OBJECTIF 2 Savoir utiliser la projection orthogonale

Le produit scalaire de deux vecteurs est remplacé par le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires en projetant orthogonalement sur (AB) ou (CD) :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'} = \vec{A'B'} \cdot \vec{CD}.$$



EXERCICE RÉSOLU C Choisir une projection orthogonale

Pour chacune des figures suivantes, calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

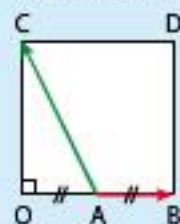


Figure 1

OBDC est un carré de côté 4

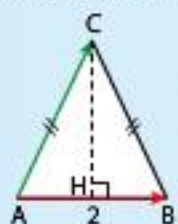


Figure 2

ACB est un triangle isocèle en C.

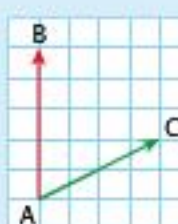


Figure 3

L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage.

Méthode

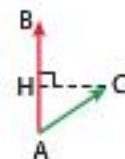
- Figure 1 : on indique quel projeté orthogonal on utilise.
- On justifie le sens des vecteurs colinéaires.

- Figure 2 : le triangle ABC étant isocèle, la médiatrice du segment [AB] est un axe de symétrie du triangle.

- Figure 3 : afin d'utiliser le quadrillage, la seule projection exploitable simplement est la projection orthogonale sur (AB).

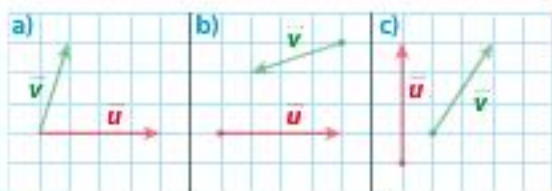
Solution

- O est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AO}$ avec $AB = AO = 2$.
- A est le milieu de [OB] donc $\vec{AB}$ et $\vec{AO}$ sont colinéaires et de sens contraires. Ainsi, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AO = -4$.
- H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), donc : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ avec $AB = 2$ et $AH = 1$. $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 2$.
- Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Alors : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ avec $AB = 5$ et $AH = 2$. $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires et de même sens donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 10$.



Mise en pratique

- 11 L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage. Calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chaque cas.



- 12 ABCD est un carré de côté 3. CBE est un triangle rectangle extérieur à ABCD tel que BE = 2.

- Calculez :
a) $\vec{AC} \cdot \vec{BE}$ b) $\vec{CE} \cdot \vec{AD}$

- 13 ABC est un triangle, H est le pied de la hauteur issue de C.

- Pourquoi $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$?
- On donne $AB = 6$, $AC = 4$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -12$. Pourquoi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont-ils colinéaires et de sens contraire ? Déduisez-en AH.
- Construisez une figure (unité : 1 cm).

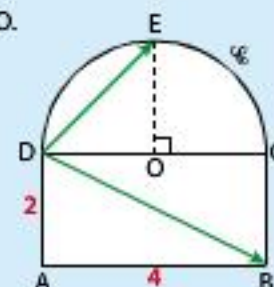
OBJECTIF 3 Utiliser l'orthogonalité pour calculer un produit scalaire

Théorème 4. « Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » équivaut à « $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ».
« Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires » équivaut à « $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ ».

EXERCICE RÉSOLU D Décomposer des vecteurs pour calculer des produits scalaires

ABCD est un rectangle. $\mathcal{C}$ est le demi-cercle de diamètre [DC] et de centre O. La perpendiculaire en O à [DC] coupe $\mathcal{C}$ en E.

- Calculez les produits scalaires $\vec{DA} \cdot \vec{OE}$ et $\vec{DC} \cdot \vec{DO}$.
- En décomposant les vecteurs $\vec{DE}$ et $\vec{DB}$ par la relation de Chasles, calculez $\vec{DB} \cdot \vec{DE}$.



Méthode

- On utilise les propriétés de la figure pour calculer les produits scalaires.

Remarque

On peut résoudre cet exercice en choisissant par exemple le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec $\vec{OC} = 2\vec{i}$ et $\vec{OE} = \vec{j}$.

- On décompose les vecteurs $\vec{DE}$ et $\vec{DB}$.

- On remplace $\vec{DE}$ par $\vec{DO} + \vec{OE}$ et $\vec{DB}$ par $\vec{DC} + \vec{DA}$, puis on développe.

- On utilise l'orthogonalité de certains vecteurs pour réduire l'expression.

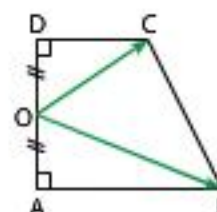
- On conclut en utilisant les résultats de la question 1.

Solution

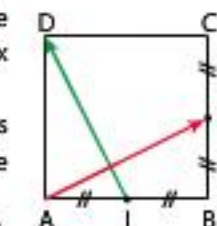
- Les vecteurs $\vec{DA}$ et $\vec{OE}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\vec{DA} \cdot \vec{OE} = -DA \times OE$. Le point E appartient au demi-cercle de diamètre [DC] donc $\vec{DA} \cdot \vec{OE} = -2 \times 2 = -4$.
Les vecteurs $\vec{DC}$ et $\vec{DO}$ sont colinéaires et de même sens donc : $\vec{DC} \cdot \vec{DO} = DC \times DO = 4 \times 2 = 8$.
- D'après la relation de Chasles, $\vec{DE} = \vec{DO} + \vec{OE}$ et $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{DC} + \vec{DA}$.
On a : $\vec{DB} \cdot \vec{DE} = (\vec{DC} + \vec{DA}) \cdot (\vec{DO} + \vec{OE})$.
 $\vec{DB} \cdot \vec{DE} = \vec{DC} \cdot \vec{DO} + \vec{DA} \cdot \vec{OE} + \vec{DC} \cdot \vec{OE} + \vec{DA} \cdot \vec{DO}$.
Les vecteurs $\vec{DC}$ et $\vec{OE}$ d'une part, et $\vec{DA}$ et $\vec{DO}$ d'autre part, sont orthogonaux donc :
 $\vec{DC} \cdot \vec{OE} = \vec{DA} \cdot \vec{DO} = 0$.
D'où : $\vec{DB} \cdot \vec{DE} = \vec{DC} \cdot \vec{DO} + \vec{DA} \cdot \vec{OE}$.
On a : $\vec{DB} \cdot \vec{DE} = 8 - 4 = 4$.

Mise en pratique

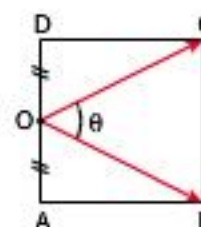
- 14 ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 5$, $AD = 4$ et $DC = 3$. O est le milieu de [AD]. Démontrez, à l'aide de la relation de Chasles, que $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 11$.



- 15 ABCD est un carré de côté 2. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC]. En décomposant chacun des vecteurs $\vec{AJ}$ et $\vec{ID}$, calculez le produit scalaire $\vec{AJ} \cdot \vec{ID}$. Que pouvez-vous conclure ?



- 16 ABCD est un carré de côté 4. O est le milieu du segment [AD]. Le but de l'exercice est de calculer le produit scalaire $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$ de deux manières différentes et d'en déduire une mesure θ de l'angle $\widehat{BOC}$.



- En décomposant $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$, démontrez que : $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = AB^2 - AO^2 = 12$.
- a) Calculez OB et OC.
b) Déduisez-en que $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 20 \cos \theta$.
- Calculez $\cos \theta$, puis déduisez-en une mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ arrondie à un degré près.

OBJECTIF 4 Utiliser le produit scalaire pour trouver une équation de droite

Théorème 6. Dans un repère orthonormé :

- si une droite d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), alors $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à d ;
- si un vecteur non nul $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b)$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

EXERCICE RÉSOLU E Trouver une équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite d a pour équation $3x - y + 5 = 0$.

1. Trouvez un vecteur $\vec{u}$ directeur de d et un vecteur $\vec{n}$ normal à d .
2. Construisez la droite Δ passant par le point $A(1; 2)$ et perpendiculaire à d .
3. Trouvez une équation de Δ de deux façons différentes :
 - a) en utilisant un vecteur normal;
 - b) en utilisant le produit scalaire.

Méthode

1. On utilise le premier énoncé du **théorème 6**.

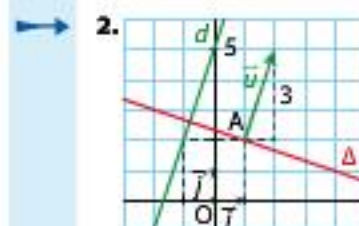
2. On construit la droite Δ .

3. a) On utilise le second énoncé du **théorème 6**.

b) On applique la conséquence de la définition 4 du cours.

Solution

1. d a pour équation $3x - y + 5 = 0$ donc $\vec{u}(1; 3)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}(3; -1)$ un vecteur normal à d .



2. 3. a) Les droites d et Δ sont perpendiculaires. $\vec{u}(1; 3)$, vecteur directeur de d , est un vecteur normal à Δ . Donc Δ a une équation de la forme $x + 3y + c = 0$. Or $A(1; 2)$ est un point de Δ donc $1 + 6 + c = 0$ et $c = -7$. Ainsi Δ a pour équation $x + 3y - 7 = 0$.

b) $M(x; y) \in \Delta$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$. On a $\vec{AM}(x - 1; y - 2)$ et $\vec{u}(1; 3)$, donc $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$ se traduit par $(x - 1) + 3(y - 2) = 0$ soit $x + 3y - 7 = 0$.

Mise en pratique Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

17 1. a) Tracez la droite d passant par le point $A(1; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; -3)$.

b) Tracez la droite Δ passant par le point $A(1; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; 2)$.

2. Que remarquez-vous ? Justifiez.

18 d est la droite passant par $A(-1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2)$.

Trouvez une équation de la droite Δ passant par $B(2; 1)$ et perpendiculaire à d .

19 d est une droite de vecteur normal $\vec{n}(-3; 2)$. Trouvez une équation de la droite :

a) Δ_1 passant par $A(3; 5)$ et parallèle à d ;

b) Δ_2 passant par $A(3; 5)$ et perpendiculaire à d .

20 Trouvez une équation de chacune des droites d_1, d_2, d_3 passant par A et admettant respectivement $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ pour vecteurs normaux.



Pour se tester

Exercices interactifs

21 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

- a) Dans un repère orthonormé, l'orthogonalité des vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ se traduit par
- b) Si les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \dots\dots\dots$
- c) Si dans un repère orthonormé, la droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est
- d) L'expression du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de la norme des vecteurs et de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est

22 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

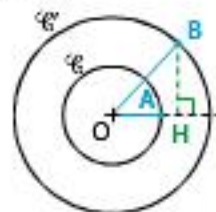
- a) Si $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\vec{AB} \times \vec{AC}$, alors les points A, B et C sont alignés.
- b) Il existe des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$.
- c) Si A, B et C sont trois points alignés distincts deux à deux tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$, alors A est entre B et C .
- d) Le vecteur $\vec{u}(2; 1)$ est normal à la droite d'équation $x - 2y + 3 = 0$ dans un repère orthonormé.

23 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Dans un repère orthonormé, si le vecteur $\vec{n}(-2; 3)$ est normal à la droite d et si le point $A(1; 1)$ est un point de d , alors une équation de d est :
a) $-2x + 3y = 0$ b) $3x - 2y + 1 = 0$ c) $3y - 2x - 1 = 0$
2. Si $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ alors nécessairement :
a) $\vec{u} = \vec{v}$ b) $\vec{u} = -\vec{v}$ c) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 3 et 1, alors $(2\vec{u} - \vec{v})^2$ est égal à :
a) 0 b) 37 c) 35

4. A est un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, et B un point du cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon 2. On pose $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = k$. Le point B se projette orthogonalement en H sur (OA) .



Dire que les points O, A, H sont alignés dans cet ordre et sont distincts équivaut à dire que :

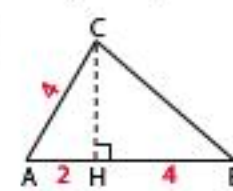
- a) $k \in]1; 2[$ b) $k \in]1; 2]$ c) $k > 1$

24 QCM Au moins une réponse exacte

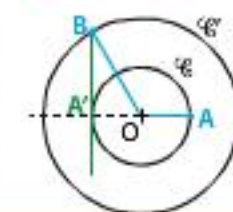
Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. ABC est un triangle, H est le projeté orthogonal de C sur le segment $[AB]$.

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12$ b) $BC = 2\sqrt{7}$ c) $(\vec{CH} + \vec{HA}) \cdot (\vec{CH} + \vec{HB}) = 4$



2. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont pour rayons respectifs 1 et 2. Le point A' est le symétrique de A par rapport à O .



B est un point de $\mathcal{C}'$ et de la tangente en A' à $\mathcal{C}$.

- a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$ b) $\vec{BO} \cdot \vec{BA} = 7$ c) $\cos \widehat{AOB} = -\frac{1}{2}$

3. Dans un repère orthonormé, la droite d a pour équation $3x + 4y + 4 = 0$. La perpendiculaire Δ à d en $A(4; 1)$ coupe d en H .

- a) H a pour coordonnées $(\frac{8}{5}; -\frac{11}{5})$.
- b) La distance de A à d est 4.
- c) Le cercle de centre A passant par H est tangent à d .

→ Voir les corrigés p. 366

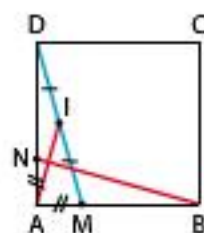
Apprendre à chercher

25 Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

ABCD est un carré de côté c , M et N sont des points des segments [AB] et [AD] tels que :

$$AM = AN.$$

Le point I est le milieu du segment [DM].



Objectif Sans choisir un repère, démontrer que les droites (AI) et (BN) sont perpendiculaires.

1. On peut penser à démontrer que $\vec{AI} \cdot \vec{BN} = 0$. Aucune formule ne permet un calcul direct, d'où l'idée de décomposer au moins l'un des vecteurs afin d'exploiter l'orthogonalité de vecteurs.

a) Prouvez que $2\vec{AI} = \vec{AM} + \vec{AD}$.

b) Après avoir décomposé le vecteur $\vec{BN}$, démontrez que $2\vec{AI} \cdot \vec{BN} = \vec{AM} \cdot \vec{BA} + \vec{AD} \cdot \vec{AN}$ (1).

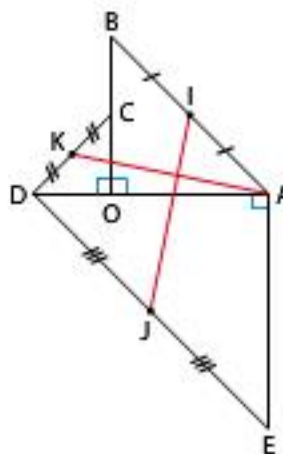
2. Le second membre de (1) ne fait intervenir que des vecteurs colinéaires. On peut donc exprimer simplement $2\vec{AI} \cdot \vec{BN}$.

a) Déduisez-en que $\vec{AI} \cdot \vec{BN} = 0$.

b) Concluez.

26 Choisir un repère pour démontrer

Trois triangles rectangles isocèles OAB, OCD et DAE sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous avec $OA = a$ et $OC = c$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [DE] et [DC].



Objectif Démontrer que les droites (IJ) et (AK) sont perpendiculaires.

1. On choisit un repère de façon que les points de base de la figure aient des coordonnées simples.

On choisit le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$$\vec{OA} = a\vec{i} \text{ et } \vec{OC} = c\vec{j}.$$

a) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D et E dans ce repère ?

b) Déduisez-en celles des points I, J et K.

2. Pour démontrer que les droites (IJ) et (AK) sont perpendiculaires, on pense à calculer $\vec{IJ} \cdot \vec{AK}$.

Terminez les calculs et concluez.

27 Exploiter l'orthogonalité et les équations de droites

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0; 2)$ et $B(3; 6)$. $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle OAB. La droite Δ est la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$.

Objectif Trouver les coordonnées du point I, centre du cercle $\mathcal{C}$, et une équation de la tangente Δ .

1. Pour guider le raisonnement, on commence par faire une figure.

Placez les points A et B dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Le centre I du cercle $\mathcal{C}$ est le point de concours des médiatrices du triangle OAB.

Choisissez par exemple la médiatrice d_1 du segment [OA] et la médiatrice d_2 du segment [AB].

Tracez ces médiatrices, puis le cercle $\mathcal{C}$.

3. Pour trouver les coordonnées du point I, un moyen consiste, au préalable, à trouver une équation de la médiatrice d_1 de [OA] et une équation de la médiatrice d_2 de [AB].

Pour d_2 , on connaît un vecteur normal, $\vec{AB}$, et un point, le milieu de [AB].

a) Trouvez une équation de d_1 puis de d_2 .

Aide Voir l'exercice résolu E, page 224.

b) Déduisez-en les coordonnées du point I.

4. On retiendra que la tangente en B à $\mathcal{C}$ est la droite perpendiculaire en B à [IB].

On connaît donc un vecteur non nul, $\vec{IB}$, et un point, B.

Trouvez une équation de la droite Δ , tangente en B à $\mathcal{C}$.

Aide Voir l'exercice résolu E, page 224.

Narration de recherche

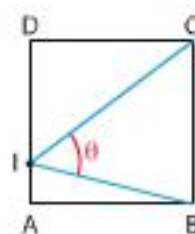
→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

28 Un calcul d'angle

ABCD est un carré de côté a .

Le point I est tel que $4\vec{AI} = \vec{AD}$.

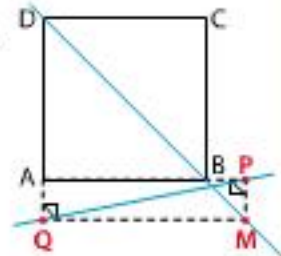
Donnez une mesure θ de l'angle $\widehat{BIC}$ à un dixième de degré près.

**29 Chercher un point fixe**

ABCD est un carré de côté a .

M est un point quelconque de la droite (BD), qui se projette orthogonalement en P sur la droite (AB) et en Q sur la droite (AD).

Démontrez que la droite Δ menée par M et perpendiculaire à la droite (PQ) passe par un point fixe.

**Travail en groupe**

Cet exercice peut également être traité en groupe et mener à une mise en commun des réflexions.

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

Chercheurs d'hier

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la géométrie.



Hermann Günther Grassmann
(1809-1877)

Mathématicien allemand. Il est considéré comme le fondateur de la théorie des espaces vectoriels. On lui doit l'idée de faire « le produit de deux vecteurs » pour obtenir un nombre. C'est en 1839, dans sa thèse « *Théorie des flots et des marées* », qu'il définit le produit linéaire de deux vecteurs, qui est notre produit scalaire actuel. Il montre ses propriétés et en donne la valeur en fonction des composants des vecteurs.



Sur le Web <http://www.chronomath.com/anx/ProdScal.html>

Utiliser GeoGebra



- Pour construire une figure géométrique
- Pour mettre en évidence une propriété de la figure

TP 30 Appartenance d'un point à une figure donnée

COMPÉTENCES

TICE

- Représenter une fonction
- Construire une figure géométrique
- Émettre et tester des conjectures

Mathématiques

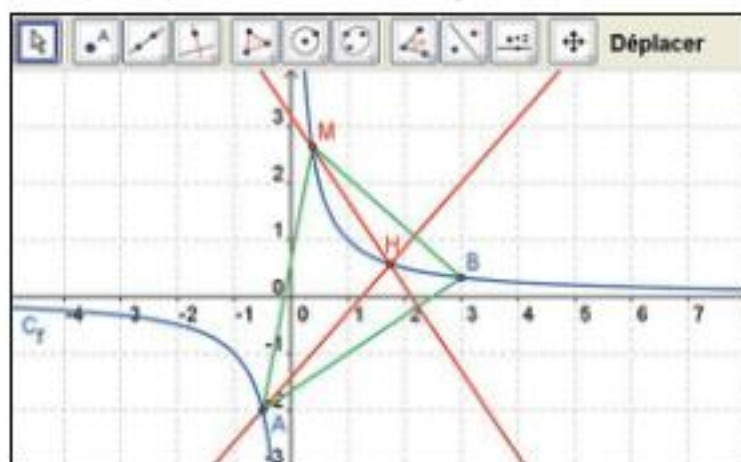
- Trouver un vecteur directeur à une droite
- Résoudre un système d'équations
- Prouver qu'un point appartient à une ligne donnée

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$. A et B sont deux points de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives $-\frac{1}{2}$ et 3. M est un point quelconque de $\mathcal{C}$, distinct de A et B. On note H l'orthocentre du triangle AMB.

On souhaite étudier la position de H lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

1. Conjecturer avec GeoGebra

- Créez la courbe $\mathcal{C}$ et placez les points A et B.
- Créez un point M quelconque sur $\mathcal{C}$, puis le triangle AMB. 
- Créez les hauteurs issues de M et A, puis le point H, intersection de ces hauteurs. 
- Activez la trace de H, puis déplacez M sur $\mathcal{C}$. Quelle conjecture faites-vous concernant le point H?



2. Démontrer

Notons m l'abscisse du point M ($m \neq 0$; $m \neq -\frac{1}{2}$; $m \neq 3$).

- Quelles sont les ordonnées des points A, B et M?
- Démontrez que les vecteurs $\vec{u}(3; 2)$ et $\vec{v}(-3m; 1)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (AB) et (BM).
- On note $(x; y)$ les coordonnées de l'orthocentre H.
 - Pourquoi les produits scalaires $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{v}$ sont-ils nuls?
 - Déduisez-en que les coordonnées de H sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3m + \frac{2}{m} \\ -3mx + y = \frac{3}{2}m - 2 \end{cases}$$

- Résolvez ce système et prouvez votre conjecture.

Utiliser GeoGebra



- Pour construire une figure

TP 31 Étude d'une configuration

COMPÉTENCES

TICE

- Représenter une fonction
- Construire une figure géométrique
- Émettre et tester des conjectures

Mathématiques

- Déterminer une équation d'une tangente à une parabole
- Déterminer une équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée
- Résoudre un système d'équations

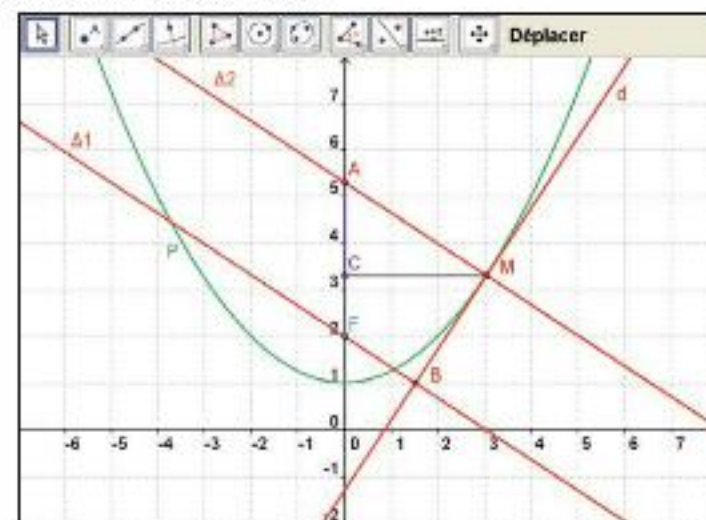
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{4} + 1$, F est le point de coordonnées $(0; 2)$, M est un point quelconque de $\mathcal{P}$ et d est la tangente en M à $\mathcal{P}$.

On trace par F et M les droites Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires à d . La droite Δ_1 coupe la droite d en B. La droite Δ_2 coupe l'axe des ordonnées en A. On note C le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. Lorsque le point M décrit $\mathcal{P}$ en restant distinct du sommet, on s'intéresse :

- à la ligne décrite par B;
- à la distance AC.

1. Conjecturer avec GeoGebra

- Tracez la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \frac{x^2}{4} + 1$, puis créez le point F $(0; 2)$. 
- Créez un point M quelconque sur $\mathcal{P}$, puis la droite d , tangente à $\mathcal{P}$ en M. 
- Créez les droites Δ_1 et Δ_2 , puis les points A et B.
- Créez le point C, puis le segment [AC].
- Activez la trace de B, puis déplacez le point M. Sur quelle ligne semble se déplacer le point B?
- Quelle conjecture faites-vous concernant AC?



2. Démontrer

On note m l'abscisse du point M.

- Déterminez une équation de la tangente d en M à la parabole $\mathcal{P}$. Déduisez-en une équation des droites Δ_1 , puis Δ_2 .
- Exprimez en fonction de m les coordonnées des points A, B et C. Calculez AC.
- Les résultats sont-ils conformes à vos conjectures?

DE TÊTE



Pour les exercices 32 à 39

Le repère repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

32 On considère les vecteurs $\vec{u}(-2; x)$ et $\vec{v}(5; 1)$. Que vaut x si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?

33 $\vec{u}(3; 4)$ est un vecteur. Calculez $\|\vec{u}\|$.

34 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(3; -2)$ et $(\frac{1}{3}; 4)$. Calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

35 $\vec{u}(3; -1)$ est un vecteur. Trouvez les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$.

36 La droite d a pour équation $y = 2x - 1$. Trouvez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à d .

37 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -5$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3$. Calculez $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

38 Les points A, B et C sont tels que $AB = 5$, $AC = 6$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -15$. Calculez la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

39 On considère le vecteur $\vec{AB}(-3; a)$. Trouvez a pour que $\vec{AB}$ soit un vecteur normal à la droite d d'équation $x - 2y + 1 = 0$.

LES DIVERSES EXPRESSIONS
DU PRODUIT SCALAIRE

Les coordonnées et les équations qui figurent dans les énoncés sont relatives à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

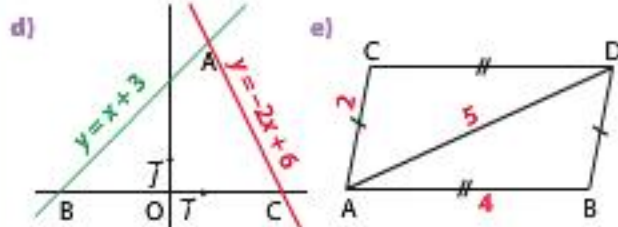
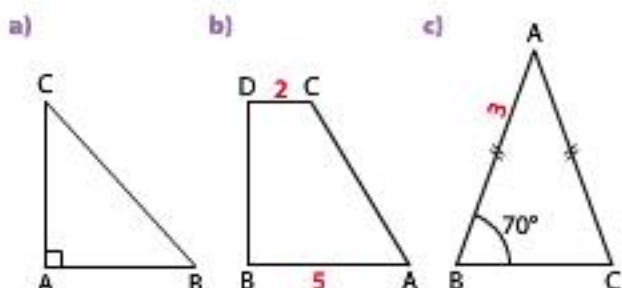
40 Dans chacun des cas suivants, calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

a) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$.

b) $\vec{u}(1; 2)$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.

c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$.

41 Pour chacune des figures suivantes, calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



42 Dans chacun des cas suivants, trouvez une mesure en radians de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 5$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$.

b) $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 2$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3\sqrt{3}$.

c) $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 6$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$.

43 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.

1. Démontrez que B a pour coordonnées $(\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

2. Calculez :

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$; b) $\vec{BK} \cdot \vec{BA}$; c) $\vec{IA} \cdot \vec{OB}$.

44 M est un point de la médiatrice du segment [AB] et O est le milieu de [AB].

Quels sont les « outils » qui vous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{AB} &= \vec{AO} \cdot \vec{AB} \\ &= AO \times AB = \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

45 A, B et C sont trois points tels que :

$$AB = 4, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}.$$

Calculez AC.

46 A, B et C sont trois points tels que :

$$AB = 2, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \quad \text{et} \quad A, B, C \text{ sont alignés.}$$

Calculez AC.

47 1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. a) Calculez $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

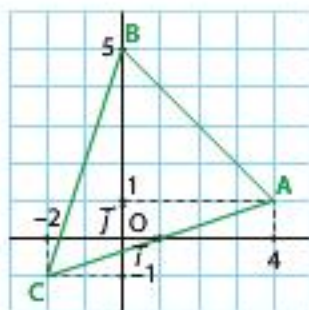
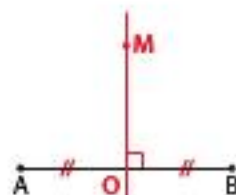
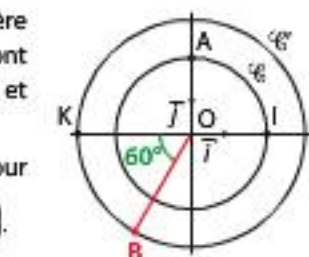
b) Démontrez que : $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 40 \cos \widehat{ACB}$.

c) Déduisez-en que :

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{3}{5}.$$

3. Donnez une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ à un degré près.

48 On souhaite construire un triangle ABC (si possible) tel que $AB = 3$ cm; $AC = 4$ cm et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6$.



On propose le programme suivant :

- tracez un segment [AC] de longueur 4 cm;
- tracez le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3 cm;
- placez le point H sur [AC] tel que $AH = 1,5$ cm;
- tracez la perpendiculaire en H à (AC); elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en B_1 et B_2 .

Justifiez l'affirmation : « Chacun des triangles AB_1C et AB_2C répond au problème posé. »

RÈGLES DE CALCUL

49 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3, \quad \|\vec{v}\| = 5 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 12.$$

Calculez :

a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$; b) $2\vec{u} \cdot (-3\vec{v})$; c) $(\vec{u} + \vec{v})^2$.

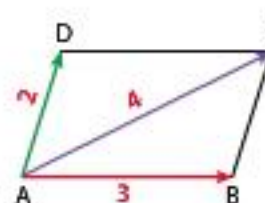
50 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Calculez :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$; b) $\vec{u}^2$; c) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$.

51 ABCD est un parallélogramme. On note $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$.

1. Démontrez que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{2}$.

2. Calculez $(\vec{u} - \vec{v})^2$ et déduisez-en que $DB = \sqrt{10}$.



52 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs ayant pour normes respectives 2 et 3, et tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.

1. a) Calculez $(\vec{u} + \vec{v})^2$.

b) Déduisez-en $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

2. Démontrez que $\|2\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{41}$.

53 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 1 et 2. Démontrez que :

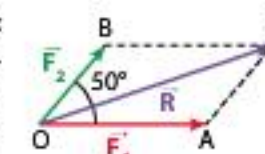
$$(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + 3\vec{v})^2 = -32.$$

54 En physique

Le point O est soumis à deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ d'intensités respectives 300 et 200 newtons. $\widehat{AOB} = 50^\circ$. Le vecteur $\vec{R}$ est la résultante de ces deux forces donc $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

1. Calculez $\vec{R}^2$.

2. Déduisez-en l'intensité de R à un newton près.



55 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

On pose $\vec{w} = \vec{u} + x\vec{v}$, x étant un nombre.

1. Démontrez que $\vec{w}^2 = x^2 - 2x + 4$.

2. Déduisez-en les valeurs de x pour lesquelles $\|\vec{w}\| = 3$.

PRODUIT SCALAIRE
ET ORTHOGONALITÉ

56 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-4; 1)$, $B(-1; 2)$ et $C(1; -4)$. Démontrez que le triangle ABC est rectangle.

57 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(0; 1)$ et $B(5; 4)$. M est un point de coordonnées $(x; 0)$. Existe-t-il des nombres x pour lesquels le triangle AMB est rectangle en M ?

58 ABCD est un rectangle, $AB = 6$ et $AD = 4$.

1. Exprimez $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

2. Déduisez-en que :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -20.$$

59 On reprend la figure de l'exercice précédent.

1. Justifiez que :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{A'C'} \cdot \vec{B'D'}.$$

2. Sachant que $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -20$, démontrez que :

$$A'C' = \frac{10\sqrt{13}}{13}.$$

60 ABCD est un carré de côté a . I est le milieu du segment [AD]. On veut démontrer que la mesure θ de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a .

1. a) Calculez CI et CA en fonction de a .

b) Déduisez-en que :

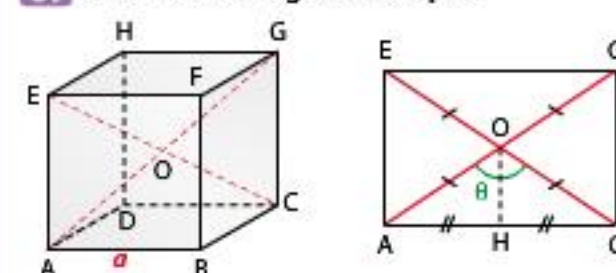
$$\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{a^2\sqrt{10}}{2} \cos \theta.$$

2. a) Exprimez $\vec{CI}$ en fonction de $\vec{CD}$ et $\vec{CB}$.

b) Déduisez-en que $\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{3}{2}a^2$.

3. Calculez $\cos \theta$ et concluez.

61 Une mesure d'angle dans l'espace



ABCDEFGH est un cube de côté a et de centre O. On se propose de démontrer que la mesure θ de l'angle $\widehat{AOC}$ est la même pour tous les cubes.

On remarque que ce problème se ramène à un problème de géométrie plane en considérant le rectangle ACGE.

1. a) Démontrez que $AC = a\sqrt{2}$ et que $AG = a\sqrt{3}$.

b) Déduisez-en que $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{3}{4}a^2 \cos \theta$.

2. On souhaite calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ d'une autre manière. On appelle H le milieu du segment [AC].

a) Exprimez les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OC}$ en fonction des vecteurs $\vec{OH}$ et $\vec{HA}$.

b) Déduisez-en que $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = -\frac{a^2}{4}$.

3. Déduisez l'expression de $\cos \theta$ des questions 1. et 2., puis la mesure de θ , en degrés, arrondie au dixième.

62 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les droites d_1 et d_2 ont pour équations respectives :

$$x - y - 1 = 0 \text{ et } 2x + y - 3 = 0.$$

$\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de d_2 .

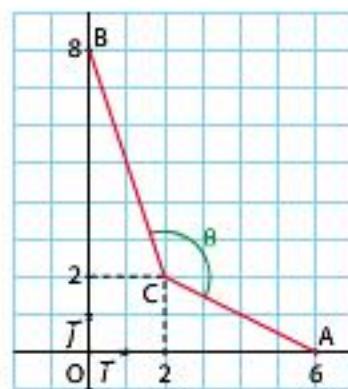
1. Calculez de deux manières le produit scalaire $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$.

2. Déduisez-en une mesure α de l'angle aigu des droites d_1 et d_2 arrondie au dixième de degré.

63 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(6; 0)$, $B(0; 8)$, $C(2; 2)$.

1. Exprimez de deux manières le produit scalaire $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

2. Trouvez en radians la mesure exacte de l'angle géométrique ACB.



64 Proposition réciproque

Pour chacune des propositions suivantes, donnez la proposition réciproque et dites si cette réciproque est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

a) Si $\vec{v} = \vec{w}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$.

b) Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$.

c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls et non colinéaires deux à deux.

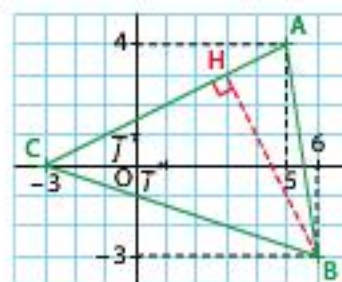
Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$.

d) Si M est un point de la médiatrice du segment [AB], alors $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \frac{1}{2} AB^2$.

65 Quadrangle orthocentrique

On dit que quatre points A, B, C et D forment un quadrangle orthocentrique si chacun de ces points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points. On donne dans un repère orthonormé les points $A(5; 0)$, $B(-1; -2)$, $C(11; -8)$ et $D(7; 4)$. Est-ce un quadrangle orthocentrique ?

66 Les points A, B et C sont donnés par leurs coordonnées dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).



1. a) Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) Calculez AC et démontrez que $AH = \sqrt{5}$.

2. a) Calculez BH.

b) Démontrez que l'aire du triangle ABC est un nombre entier.

67 Test d'orthogonalité

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ et $D(x_D; y_D)$.

1. Exprimez les coordonnées (a; b) du vecteur $\vec{AB}$ et (c; d) du vecteur $\vec{CD}$ en fonction des coordonnées des points A, B, C et D.

2. Complétez l'algorithme suivant, dont l'objectif est de vérifier l'orthogonalité des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.

Variables

$x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D, a, b, c, d, p$

Algorithme

Saisir $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D$

a reçoit $x_B - x_A$

b reçoit

c reçoit

d reçoit

p reçoit

Si $p = 0$ alors afficher

Sinon

FinSinon

FinSi

3. Vérifiez votre algorithme avec les points $A(5; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(-4; 0)$ et $D(-3; 5)$.

DROITES ET PRODUIT SCALAIRE

Les coordonnées et les équations sont relatives à un repère orthonormé.

68 Dans chacun des cas suivants, tracez la droite d passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$, puis donnez une équation de d .

a) $A(2; 1)$ et $\vec{n}(3; -2)$. b) $A(3; 1)$ et $\vec{n}(0; 3)$.

c) $A(-2; 4)$ et $\vec{n}(-2; 0)$. d) $A(2; 1)$ et $\vec{n}(-\frac{2}{3}; 1)$.

69 Dans chacun des cas suivants, trouvez une équation de la droite Δ passant par le point A et perpendiculaire à la droite d .

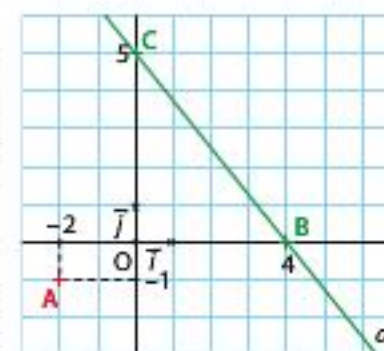
a) $A(-2; 1)$; $d: 2x - 4y + 1 = 0$.

b) $A(0; 4)$; $d: 2x - y + 4 = 0$.

70 Trouvez :

a) une équation de la droite Δ_1 passant par le point A et parallèle à la droite d ;

b) une équation de la droite Δ_2 passant par le point A et perpendiculaire à la droite d .



71 Dans chacun des cas suivants, dites si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

a) $d_1: x - 2y + 4 = 0$; $d_2: 6x + 3y - 7 = 0$.

b) $d_1: y = -2x + 5$; $d_2: x - 2y + 1 = 0$.

c) $d_1: (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0$; $d_2: (\sqrt{2} - 1)x + y = 0$.

72 Deux droites Δ_1 et Δ_2 passent par un même point A et sont respectivement parallèle et perpendiculaire à une même droite d . Dans chacun des cas suivants, trouvez une équation de Δ_1 et Δ_2 .

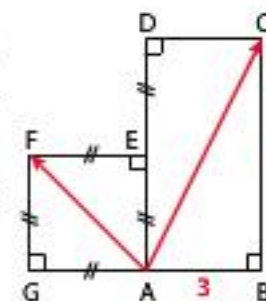
a) A a pour coordonnées $(-1; 3)$ et $\vec{n}(-3; 2)$ est un vecteur normal à d .

b) A a pour coordonnées $(5; 2)$ et $\vec{u}(2; 1)$ est un vecteur directeur de d .

73 Chercher l'erreur

ABCD est un rectangle tel que $AB = 3$ et $BC = 6$. E est le milieu du segment [AD]. AEFG est un carré.

Le professeur demande aux élèves de calculer $\vec{AC} \cdot \vec{AF}$. Voici deux copies d'élèves.



Copie 1 :

F et C se projettent orthogonalement en E et D sur (AD) donc $\vec{AC} \cdot \vec{AF} = \vec{AD} \cdot \vec{AE}$. Les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires et de même sens donc $\vec{AC} \cdot \vec{AF} = 3 \times 6 = 18$.

Copie 2 :

On choisit le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AE})$. Le point C a pour coordonnées $(1; 2)$ et F $(-1; 1)$ donc $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(1; 2)$ et $\vec{AF}$ $(-1; 1)$. Il en résulte que $\vec{AC} \cdot \vec{AF} = -1 + 2 = 1$.

1. Pourquoi ces deux réponses sont-elles fausses ? Justifiez.

2. Rédigez une solution correcte de ce problème.

74 Orthocentre d'un triangle

On donne les points $A(-1; 2)$, $B(2; 5)$ et $C(3; 2)$.

1. a) Construisez le triangle ABC.

b) Construisez le point M, orthocentre de ce triangle.

2. a) Trouvez une équation de la hauteur issue de A.

b) Déduisez-en les coordonnées du point M.

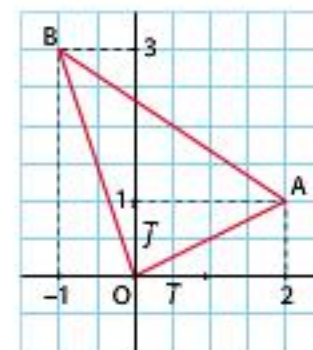
75 Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le point $H(x; y)$ est tel que : $\vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$ et $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$.

1. Que représente H pour le triangle AOB ?

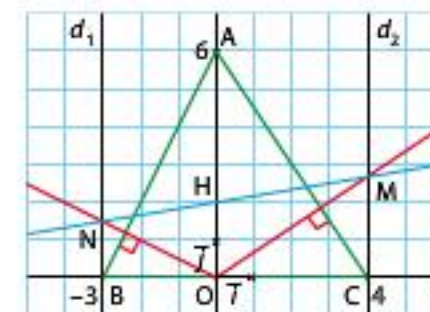
2. Démontrez que les coordonnées de H vérifient le système :

$$\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

3. Déduisez-en les coordonnées de H.



76 Démontrer avec les coordonnées



Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0; 6)$, $B(-3; 0)$ et $C(4; 0)$. Les droites d_1 et d_2 ont pour équations respectives $x = -3$ et $x = 4$. Les perpendiculaires menées par O à (AB) et (AC) coupent la droite d_1 en N et la droite d_2 en M.

La droite (MN) coupe l'axe des ordonnées en H.

Le but de l'exercice est de démontrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

1. Calculez les coordonnées des points M et N.

2. a) Trouvez une équation de la droite (MN).

b) Déduisez-en les coordonnées du point H.

3. Calculez le produit scalaire $\vec{BH} \cdot \vec{AC}$ et concluez.

77 On donne les points $A(2; 3)$ et $B(-3; 6)$.

Trouvez une équation de la tangente Δ en B au cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B.

78 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(3; 1)$ et de rayon 5.

- Vérifiez que $B(-1; -2)$ est un point de $\mathcal{C}$.
- Trouvez une équation de la tangente en B à $\mathcal{C}$.

AVEC LES TICE

79 Produit scalaire et parabole

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et M est un point quelconque de $\mathcal{P}$ distinct de O .

La perpendiculaire à la droite (OM) passant par O recoupe $\mathcal{P}$ en N .

On s'intéresse au «déplacement» de la droite (MN) lorsque M décrit la parabole $\mathcal{P}$ privée de O .

1. Expérimenter avec GeoGebra

a) Construisez la figure et créez la droite (MN) .

b) Déplacez M sur la parabole $\mathcal{P}$. Quelle conjecture faites-vous?

2. Démontrer

On note m l'abscisse du point M avec $m \neq 0$.

a) Calculez les coordonnées de N en fonction de m .

b) Démontrez que le vecteur $\vec{u}(-m; 1 - m^2)$ est un vecteur directeur de la droite (MN) .

c) Déduisez-en une équation de la droite (MN) .

d) Prouvez que la droite (MN) passe par un point fixe F repéré lors de l'expérimentation.

80 Étude d'une configuration

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point I de coordonnées $(0; 4)$.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre I et de rayon 2 et M un point quelconque de l'axe des abscisses.

Le cercle circonscrit au triangle IOM coupe le cercle $\mathcal{C}$ en A et B .

On s'intéresse au comportement de la droite (AB) lorsque M décrit l'axe des abscisses.

1. Réaliser la figure

- Affichez la grille et créez les points I , O et le cercle $\mathcal{C}$.
- Créez M et le cercle circonscrit du triangle IOM .
- Créez A et B puis la droite (AB) .

2. Conjecturer avec GeoGebra

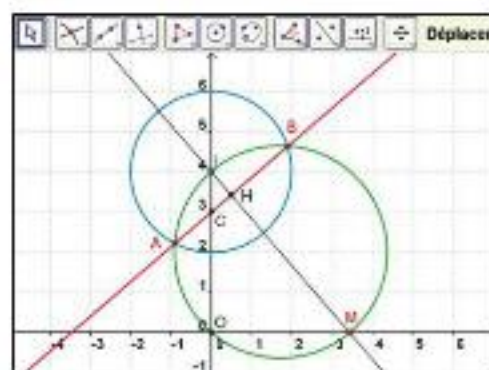
- Activez la trace de la droite (AB) .
- Déplacez le point M sur l'axe des abscisses. Quelle conjecture faites-vous?

3. Démontrer

La droite (AB) coupe les droites (IM) et (IO) respectivement en H et C .

a) Justifiez chacune des égalités de l'enchaînement suivant : $\vec{IC} \cdot \vec{IO} = \vec{IC} \cdot \vec{IM} = \vec{IH} \cdot \vec{IM} = \vec{IB} \cdot \vec{IM} = \vec{IB}^2$.

b) Déduisez-en les coordonnées de C et concluez.



ROC

Restitution organisée de connaissances

81 Prérequis. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors : $\bullet (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\bullet (-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

1. Démonstration

Démontrez que si A , B et C sont trois points non alignés, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2. Application

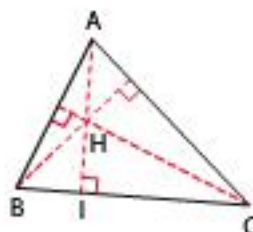
Le point H est l'orthocentre du triangle ABC .

Démontrez que :

- $AB^2 = AH^2 + HB^2 + 2\vec{AH} \cdot \vec{HB}$;
- $AC^2 = AH^2 + HC^2 + 2\vec{AH} \cdot \vec{HC}$.

Déduisez-en que :

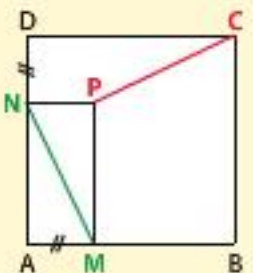
$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2.$$



Prendre toutes les initiatives

82 $ABCD$ est un carré. M et N sont des points de $[AB]$ et $[AD]$ tels que $AM = DN$. On construit le rectangle $AMPN$.

Démontrez que les droites (CP) et (MN) sont perpendiculaires et que $CP = MN$.



83 ABC est un triangle. d est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) . Démontrez l'équivalence des deux propositions suivantes :

- « M est un point de d . »;
- « $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MC}$. »

84 A , B et C sont trois points distincts non alignés tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$. Démontrez qu'il n'existe aucun point M tel que $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = 0$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Compléments numériques

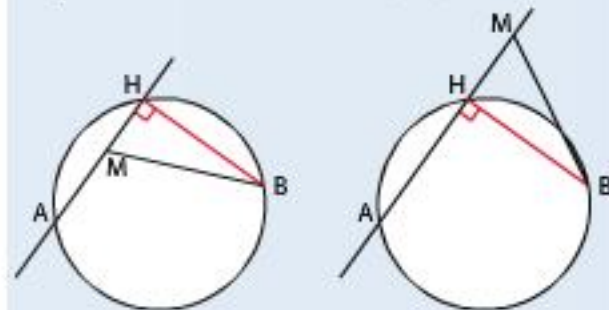
Approfondissement

85 Disques et produit scalaire ALGORITHMIQUE

A et B sont deux points distincts du plan, rapporté à un repère orthonormé.

Pour tout point M du plan distinct de A et de B , « $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ » équivaut à « l'angle $\widehat{AMB}$ est droit ».

L'égalité $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ caractérise donc l'appartenance du point M au cercle de diamètre $[AB]$.



1. Dans chacun des cas de figures ci-dessus, justifiez l'égalité $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MH}$.

2. Justifiez les affirmations suivantes :

a) Si le point M est intérieur au cercle, alors $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ est strictement négatif.

b) Si le point M est extérieur au cercle, alors $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ est strictement positif.

3. a) Pourquoi pouvez-vous affirmer : « Si $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ est strictement positif, alors le point M est extérieur au cercle »?

b) Quelle autre affirmation résulte de ce qui précède?

4. Complétez alors l'algorithme suivant dont l'objectif est de déterminer la position d'un point $M(x_M; y_M)$ par rapport au cercle de diamètre $[AB]$. On note P le nombre $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$.

Variables

$x_A, y_A, x_B, y_B, x_M, y_M, P$

Algorithme

Saisir $x_A, y_A, x_B, y_B, x_M, y_M$

P reçoit.....

Si $P = 0$ alors afficher.....

Sinon

Si $P < 0$ alors.....

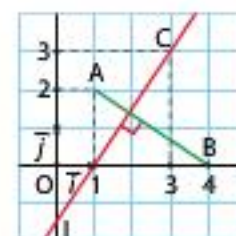
Sinon.....

FinSinon

FinSi

86 On a tracé par C la perpendiculaire à (AB) qui coupe l'axe des ordonnées en I .

Quelle est l'ordonnée de I ?

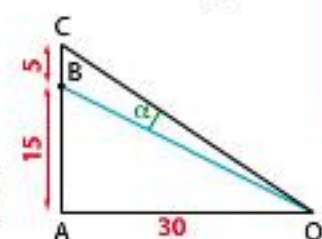


87 On souhaite calculer la mesure α de l'angle $\widehat{BOC}$.

1. a) Démontrez que : $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = OA^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) Démontrez que : $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 150\sqrt{65} \cos \alpha$.

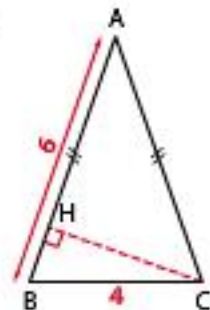
2. Déduisez-en la valeur de α arrondie au dixième de degré.



88 ABC est un triangle isocèle tel que $AB = 6$ et $BC = 4$.

1. Démontrez que $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 8$.

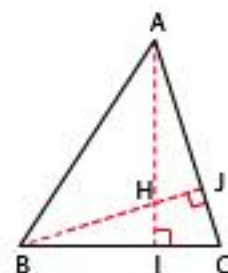
2. Déduisez-en BH puis HC .



89 Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

a) $\vec{HA} \cdot \vec{BJ} = \vec{CJ} \cdot \vec{HA}$.

b) $\vec{HB} \cdot \vec{BC} = -BI \times BC$.



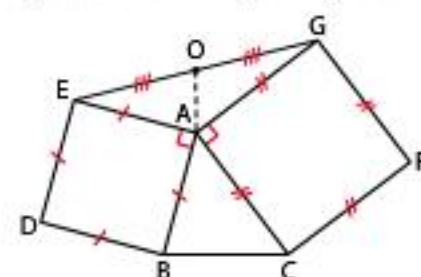
90 ABC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$. Une droite variable d passant par A coupe le segment $[CH]$ en I et le cercle $\mathcal{C}$ en J .

1. Justifiez chacune des étapes de la chaîne suivante :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \vec{AI} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AB} = AC^2.$$

2. Déduisez-en que le produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{IJ}$ est indépendant de la droite d .

91 ABC est un triangle, $ABDE$ et $ACFG$ sont deux carrés disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



1. a) Démontrez que $\vec{AE} \cdot \vec{AG} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) Sachant que $\vec{EC} = \vec{AC} - \vec{AE}$ et que $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB}$, démontrez que (EC) et (BG) sont perpendiculaires.

2. a) Démontrez que $\vec{AE} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

b) En tenant compte de la décomposition des vecteurs $\vec{EC}$ et $\vec{BG}$ de la question 1. b), démontrez que $EC = BG$.

92 Prolongement de l'exercice précédent

On considère la figure de l'exercice précédent. O est le milieu du segment [EG].

1. Démontrez que $2\vec{AO} = \vec{AE} + \vec{AG}$ (1).

2. a) Démontrez que $2\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 2\vec{AO} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$.

b) À l'aide de (1) et du résultat de la question 2. a) de l'exercice précédent, démontrez que les droites (AO) et (BC) sont perpendiculaires.

93 ABC est un triangle équilatéral de côté a.

1. Démontrez que les propositions suivantes sont équivalentes.

(P) : « M est un point de la médiatrice de [AC]. »

(Q) : « $\vec{AM} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$. »

2. a) Démontrez qu'il existe un point M unique tel que :

$$\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ et } \vec{AM} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}.$$

b) Démontrez que ce point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

94 ABC est un triangle rectangle en A.

Démontrez qu'il existe un unique point M distinct de A tel que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$. Quel point particulier obtient-on ?

95 Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d est la droite d'équation $3x - 4y + 12 = 0$, A le point de coordonnées (5; 3) et Δ la perpendiculaire menée par A à d. Les droites d et Δ se coupent en H. On souhaite calculer AH, distance de A à d.

1. a) Trouvez un vecteur $\vec{n}$ normal à d.

b) Justifiez que $\vec{AH} = k\vec{n}$, k étant un nombre non nul.

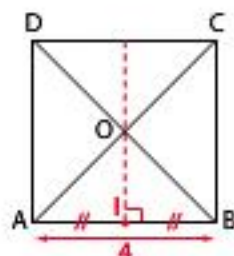
c) Déduisez-en les coordonnées de H en fonction de k.

2. a) En écrivant que H est un point de d, calculez k.

b) Déduisez-en que $AH = 3$.

96 ABCD est un carré de centre O et de côté 4. Le point I est le milieu du segment [AB].

1. Démontrez que si M est un point de la droite (OI), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 8$.



2. Réciproquement : peut-on affirmer que si $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 8$, alors M est un point de la droite (OI) ?

97 $AB = 2a$ et I est le milieu du segment [AB].

1. Démontrez que pour tout point M :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - a^2.$$

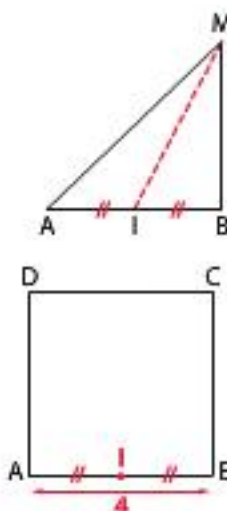
2. Application

ABCD est un carré de côté 4.

I est le milieu du segment [AB].

Démontrez l'affirmation suivante :

« Dire que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16$ équivaut à dire que M est un point du cercle de centre I passant par C. »



98 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(4; 1), B(0; 5) et C(-2; 1).

1. Construisez le cercle $\mathcal{C}$ de centre I circonscrit au triangle ABC.

2. Calculez les coordonnées du point I ainsi que le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

99 Équivalence

1. ABCD est un rectangle.

$AB = a$ et $AD = b$. Le point I est le milieu du segment [AB]. On donne les propositions :

(P) : « $a = b\sqrt{2}$. »

(Q) : « Les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires. »

Démontrez que ces propositions sont équivalentes.

2. ABCD sont quatre points distincts deux à deux.

On donne les propositions :

P : « Pour tout point M, $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = \vec{AB} \cdot \vec{DM}$. »

Q : « Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. »

Démontrez que ces propositions sont équivalentes.

3. ABCD sont quatre points distincts deux à deux.

On donne les propositions :

P : « Pour tout point M, $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = \vec{AB} \cdot \vec{DM}$. »

Q : « Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. »

Démontrez que ces propositions sont équivalentes.

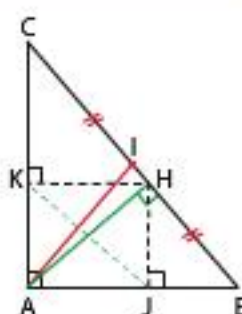
100 ABC est un triangle rectangle en A.

I est le milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A. J et K sont les projetés orthogonaux de H sur les droites (AB) et (AC).

On veut démontrer que les droites (KJ) et (AI) sont perpendiculaires.

1. Démontrez que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{JK} = \vec{AB} \cdot \vec{HA} \quad (1) \text{ et } \vec{AC} \cdot \vec{JK} = \vec{AC} \cdot \vec{AH} \quad (2).$$



2. Démontrez que $\vec{AB} \cdot \vec{JK} + \vec{AC} \cdot \vec{JK} = 2\vec{AI} \cdot \vec{JK}$ (3).

3. Déduisez de (1), (2) et (3) que les droites (AI) et (JK) sont perpendiculaires.

101 Coordonnées de l'image d'un point par une symétrie axiale

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite d a pour équation $3x + 4y - 12 = 0$.

1. a) Construisez cette droite.

b) Trouvez une équation de la droite Δ passant par l'origine du repère O et perpendiculaire à d.

2. a) Déduisez de la question précédente les coordonnées du point I, intersection des droites d et Δ .

b) Quelles sont les coordonnées de O', image de O par la symétrie d'axe d ?

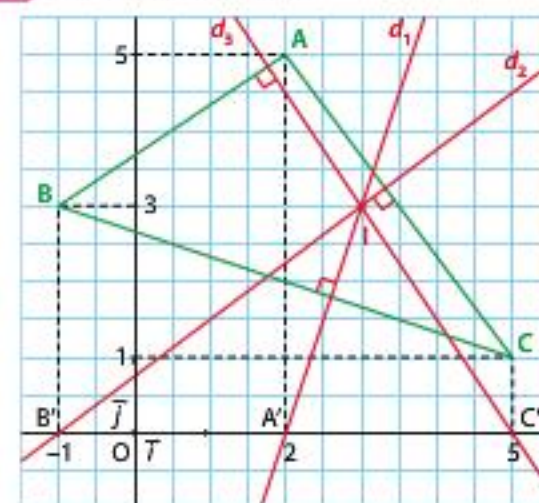
102 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(-1; 4) et B(5; 2).

À tout point M(x; y) on associe le nombre $MA^2 - MB^2$.

1. Calculez $MA^2 - MB^2$ en fonction de x et y.

2. Démontrez que l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 4$ est une droite d perpendiculaire à la droite (AB).

103 Droites concourantes



Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(2; 5), B(-1; 3) et C(5; 1).

On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur l'axe des abscisses.

d_1 est la perpendiculaire à (BC) passant par A'.

d_2 est la perpendiculaire à (AC) passant par B'.

d_3 est la perpendiculaire à (AB) passant par C'.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites d_1 , d_2 et d_3 sont concourantes.

1. a) Trouvez une équation de d_1 et une équation de d_2 .

b) Déduisez-en les coordonnées du point I, intersection de ces deux droites.

2. Vérifiez que I est un point de d_3 et concluez.

104 Droites particulières d'un triangle

Partie A : Caractérisation de droites particulières dans un triangle

ABC est un triangle, O est le milieu du segment [BC].

1. Dans chacun des cas suivants, construisez l'ensemble des points M.

a) $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$.

b) $\vec{OM} \cdot \vec{BC} = 0$.

c) $\vec{AM}$ et $\vec{OA}$ sont deux vecteurs colinéaires.

2. Quelles droites particulières du triangle ABC obtenez-vous ?

Partie B : Exploitation de cette caractérisation en géométrie repérée

Dans un repère orthonormé, on donne les points A(5; 4), B(6; -3) et C(-3; 0).

O est le milieu du segment [BC].

En exploitant les résultats de la partie A, trouvez :

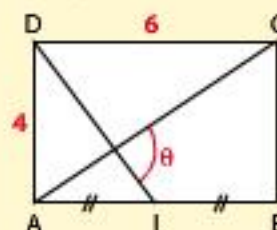
1. une équation de la hauteur et une équation de la médiane issue de A;

2. une équation de la médiatrice du segment [BC].

Aide : Notez (x; y) les coordonnées du point M.

Prendre toutes les initiatives

105 ABCD est un rectangle tel que $DC = 6$ et $AD = 4$. I est le milieu de [AB].



Trouvez une valeur approchée en radians de l'angle θ .

106 OAB est un triangle rectangle en O tel que

$OA = 4$ et $OB = 6$.

OAM₁ et OBM₂ sont deux triangles rectangles isocèles.

N est le milieu du segment [M₁M₂] et I celui du segment [AB].

En choisissant un repère orthonormé bien adapté, démontrez que N est un point du cercle circonscrit au triangle OAB et que OIN est un triangle rectangle isocèle.



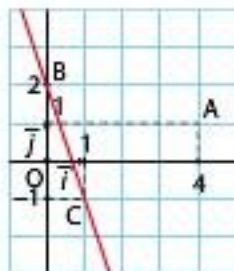
Travail en autonomie

→ Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.

A Un pliage

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d est la droite passant par les points $B(0; 2)$ et $C(1; -1)$. Le point A a pour coordonnées $(4; 1)$.

Quelles sont les coordonnées du point A' , symétrique de A par rapport à d ?

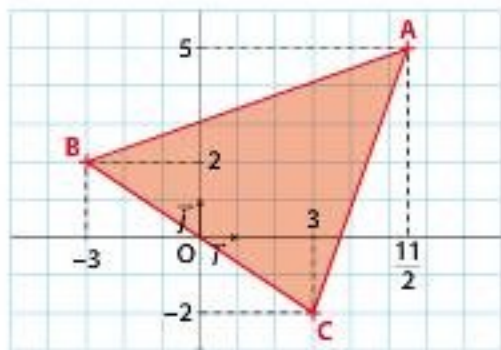


B Angle de deux droites

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les droites d et d' d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = -2x + 3$. Trouvez la mesure en degrés, arrondie au dixième, de l'angle aigu formé par ces deux droites.

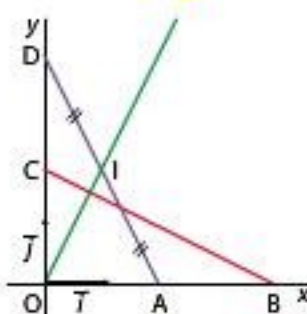
C D'un triangle à son aire

On donne, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points $A(\frac{11}{2}; 5)$, $B(-3; 2)$ et $C(3; -2)$. Quelle est l'aire du triangle ABC ?



D À la recherche de l'orthogonalité

xOy est un angle droit. Les points A, B, C et D sont tels que $OA = OC = a$ et $OB = OD = b$. I est le milieu de $[AD]$. Démontrez que les droites (CB) et (OI) sont perpendiculaires.

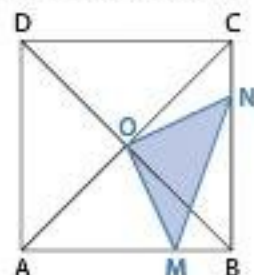


E Passer des côtés aux diagonales

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 6$ et $AD = 4$. Calculez le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$.

F Une figure remarquable

$ABCD$ est un carré de côté 1. Les points M et N sont tels que $\vec{AM} = k\vec{AB}$ et $\vec{BN} = k\vec{BC}$, $k \in]0; 1[$.

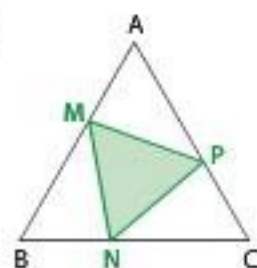


Démontrez que le triangle OMN est rectangle isocèle.

G Triangles équilatéraux emboîtés

ABC est un triangle équilatéral de côté a . Les points M, N et P sont tels que : $\vec{BN} = k\vec{BC}$, $\vec{AM} = k\vec{AB}$ et $\vec{CP} = k\vec{CA}$, $k \in [0; 1]$.

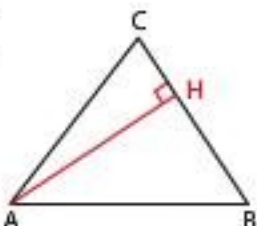
- Vérifiez que : $MP^2 = a^2(3k^2 - 3k + 1)$.
- Démontrez que le triangle MNP est équilatéral.



H Une équivalence

ABC est un triangle quelconque et H est le pied de la hauteur issue de A .

- Démontrez que : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH}^2 + \vec{HB} \cdot \vec{HC}$.
- Déduisez-en l'équivalence : « ABC rectangle en A » équivaut à « $\vec{HB} \cdot \vec{HC} = -\vec{AH}^2$ ».



I Où est la ligne ?

ABC est un triangle rectangle isocèle en A . Le but de l'exercice est de trouver à quelle ligne appartiennent les points M tels que $\vec{CB} \cdot \vec{CM} - \vec{AB} \cdot \vec{CM} = 0$.

- Simplifiez l'égalité.
- Concluez et faites une figure.

J Du bon usage des vecteurs colinéaires

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et D . O est le milieu de $[AD]$. On pose $AB = a$, $CD = b$ et $AD = c$. Démontrez que $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = ab - \frac{c^2}{4}$.