CHAPITRE 8

Angles orientés et trigonométrie

D'un siècle à un autre

L'effet visuel « Bullet Time » a été remis à la mode par le film *Matrix* (1999). Cela consiste à installer une série d'appareils photographiques tout autour de l'action afin de la capturer sous tous les angles. La somme de ces images est travaillée par ordinateur pour obtenir une scène tridimensionnelle qui peut alors être utilisée dans le film, donnant l'illusion de mouvements de caméras impossibles.

Jean-Robert Argand, avec sa vision géométrique des nombres, a opéré un rapprochement déterminant entre la géométrie et l'algèbre.

En savoir plus sur **Jean-Robert Argand**

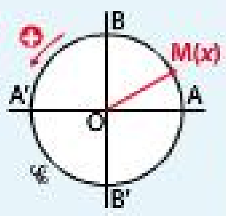
→ Chercheurs d'hier p. 203

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Point d'un cercle trigonométrique associé à un réel

Sur un cercle trigonométrique, si le point M est associé à un nombre x, alors il est aussi associé à tout nombre x' tel que :
$x' = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

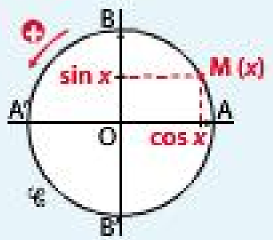


1 Sur un cercle trigonométrique, placez les points M, N et P associés respectivement aux nombres :
• $\frac{17\pi}{4}$ • $\frac{29\pi}{6}$ • $-\frac{13\pi}{3}$

2 **a)** Sur un cercle trigonométrique, pourquoi les nombres $\frac{5\pi}{8}$ et $-\frac{11\pi}{8}$ sont-ils associés au même point M ?
b) En est-il de même pour $\frac{117\pi}{8}$?

Cosinus et sinus d'un réel

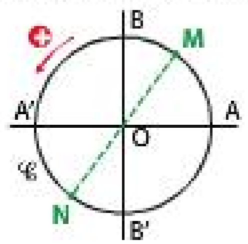
• M est le point d'un cercle trigonométrique associé au nombre x.
Dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$:
– **cos x** est l'**abscisse** de M ;
– **sin x** est l'**ordonnée** de M.



• **Valeurs remarquables**

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3 M est le point du cercle trigonométrique 𝒞 associé au nombre x.
N est le symétrique de M par rapport à O.



1. a) Comparez les coordonnées de M et N.
b) Déduisez-en les expressions de $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Donnez les valeurs exactes du cosinus et du sinus de chacun des nombres $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$.

4 Sur un cercle trigonométrique, placez les points M et N associés aux nombres $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{6}$, puis donnez les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et de $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Relation trigonométrique fondamentale

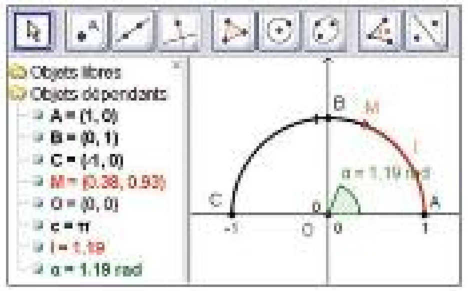
Pour tout nombre x :
$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

5 x est un nombre de l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{3}$.
1. Démontrez que $\sin^2 x = \frac{8}{9}$.
2. a) Sur un cercle trigonométrique, coloriez l'ensemble des points M associés aux nombres de l'intervalle I.
b) Quel est le signe de $\sin x$?
c) Déduisez-en la valeur exacte de $\sin x$.

Voir les corrigés p. 363

Activité 1 LE RADIAN

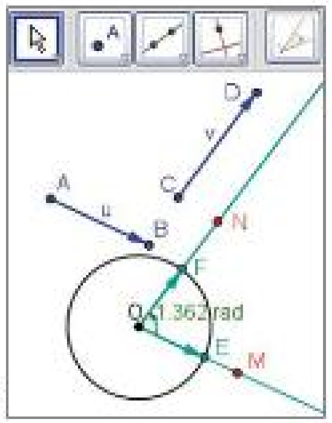
1 **a)** Avec GeoGebra, reproduisez le demi-cercle 𝒞 de centre O après avoir créé les points A(1 ; 0), B(0 ; 1) et C(–1 ; 0).
b) Créez un point M quelconque sur 𝒞 puis créez l'arc $\overset{\frown}{AM}$. Sa longueur ℓ s'affiche dans la fenêtre algèbre.



2 **a)** Créez l'angle $\widehat{AOM}$. Sa mesure α s'affiche.
b) Déplacez M sur 𝒞 de manière à avoir $\ell = 1$.
c) Choisissez l'unité : **option unite d'angle radian**.
Quelle est alors la mesure affichée de α ?
Un angle de 1 radian est un angle interceptant, sur un cercle de rayon 1, un arc de longueur 1.
d) Déplacez M en C. Quelle est la valeur affichée pour ℓ ? Que vaut α en radians ?

Activité 2 ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

Avant d'ouvrir votre feuille de travail GeoGebra, allez sur la page :
http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Outils
et cliquez sur le lien permettant d'ajouter l'outil « Angle orienté » :



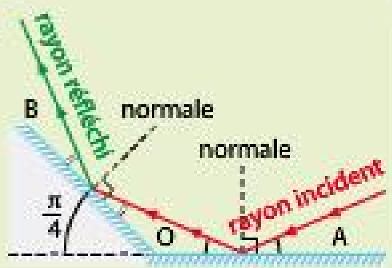
1 **a)** Avec GeoGebra, après avoir effacé les axes, créez deux vecteurs $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, puis un cercle trigonométrique 𝒞 de centre O.
b) Saisissez : **M = O + u** et **N = O + v**.
c) Créez les demi-droites [OM) et [ON), puis les intersections respectives, E et F, de ces demi-droites et du cercle 𝒞.
d) Enfin, créez les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$. outil 7 outil 8

2 **a)** Utilisez l'icône pour créer l'angle du vecteur $\overrightarrow{OE}$ avec le vecteur $\overrightarrow{OF}$.
Comment l'angle de $\overrightarrow{OE}$ avec $\overrightarrow{OF}$ est-il indiqué sur la figure ?
b) Créez l'angle de $\overrightarrow{OF}$ avec $\overrightarrow{OE}$. Comment est indiqué cet angle par rapport au précédent ?
c) Déplacez le point D de manière que F se déplace sur 𝒞 dans le sens des aiguilles d'une montre. Que se passe-t-il lorsque F est diamétralement opposé à E ?
d) Continuez à déplacer F dans le même sens. Que devient alors la mesure de l'angle de $\overrightarrow{OE}$ avec $\overrightarrow{OF}$?
On dira qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ est une **mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs** $(\vec{u}, \vec{v})$.

Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre ... Est-il plus facile ?

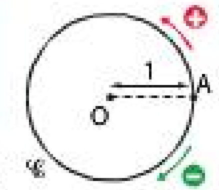
Un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir plan symétriquement à la normale au point d'incidence.
Le rayon incident se réfléchit sur un miroir à deux pans (OA et OB).
Quelle est la mesure de l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi ?



1 Cercle trigonométrique. Radian

1.1 Cercle trigonométrique

Définition 1 Un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon 1 sur lequel on a distingué deux sens de parcours : celui indiqué par la flèche rouge est le **sens direct**, l'autre le **sens indirect**.



La longueur du cercle est 2π, celle du demi-cercle est π et celle du quart de cercle est $\frac{\pi}{2}$.

1.2 Le radian, une nouvelle unité de mesure d'angles

Sur un cercle trigonométrique, si un arc $\overset{\frown}{IJ}$ a pour longueur x avec $0 \leqslant x \leqslant \pi$, on convient de dire que l'angle géométrique $\widehat{IOJ}$ a pour mesure x radians.

On crée ainsi une nouvelle unité de mesure d'angles, **le radian**, noté **rad**.

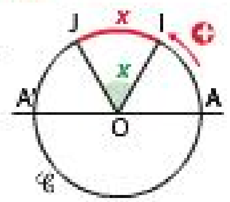


Figure 1

Définition 2 Un angle de **1 radian** est un angle interceptant, sur un cercle, un arc de longueur égale au rayon du cercle.

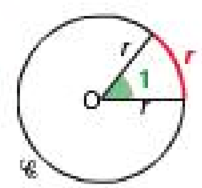


Figure 2

Relation entre radians et degrés

- Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ (figure 1) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ est π donc, en radians, $\widehat{AOA'} = \pi$. Mais en degrés, $\widehat{AOA'} = 180°$, donc π radians correspond à 180°.
- Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés. D'où le **tableau de proportionnalité** ci-contre.

degrés d	180°	90°	60°	45°	30°
radians α	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Du tableau de proportionnalité, on déduit la formule : $180 \times \alpha = \pi \times d$.

- Un angle de 1 radian a pour mesure en degrés : $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}30°$.

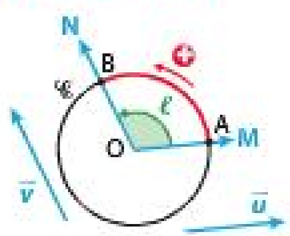
2 Angle orienté d'un couple de vecteurs

2.1 Angle orienté de vecteurs : une définition par la mesure

Comme pour un cercle trigonométrique, **tout** cercle du plan peut être orienté : la flèche rouge indique le sens direct. Avec ce choix, on dit que **le plan est orienté**.

Animation

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls. $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O. On pose $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. Les demi-droites [OM) et [ON) coupent $\mathscr{C}$ en A et B.



On note ℓ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru de A vers B dans le sens direct ($\ell \geqslant 0$). Au couple de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ on associe la famille de nombres réels de la forme $\ell + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 3 Chacun des nombres de la forme $\ell + 2k\pi$ est ***une* mesure de l'angle orienté de vecteurs** $(\vec{u}, \vec{v})$.

Conventions d'écriture

L'usage est de noter $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle de vecteurs et de confondre un angle avec l'une de ses mesures. On écrit $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Donc si x est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$, toute autre mesure s'écrit $y = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.2 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

- Parmi les mesures $x + 2k\pi$ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls, il en existe **une et une seule** dans l'intervalle $\mathbf{I =]-\pi\,;\pi]}$. Cette mesure est la **mesure principale** de $(\vec{u}, \vec{v})$.
- La valeur absolue de la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à la mesure, en radians, de l'angle géométrique défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Souvent, la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ s'obtient à partir de l'une de ses mesures α en écrivant après division : $\alpha = \beta + k(2\pi)$ avec $\boldsymbol{-\pi < \beta \leqslant \pi}$.

Exemples

- $\frac{37}{6}\pi = \left(6 + \frac{1}{6}\right)\pi = \frac{\pi}{6} + 3(2\pi)$; la mesure principale est $\frac{\pi}{6}$.
- $\frac{202\pi}{3} = \left(67 + \frac{1}{3}\right)\pi = \frac{\pi}{3} + 67\pi = 68\pi - \pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 34(2\pi)$; la mesure principale est donc $-\frac{2\pi}{3}$.

L'angle géométrique associé a pour mesure $\left|-\frac{2\pi}{3}\right| = \frac{2\pi}{3}$.

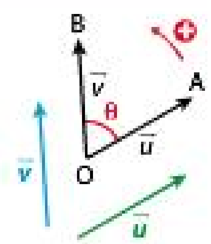
2.3 Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs

Si α est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors toute autre mesure est du type $\alpha + 2k\pi$. Or, sur le cercle trigonométrique, α et $\alpha + 2k\pi$ sont associés au même point M donc $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$.

Définition 4 Le **cosinus** (resp. le **sinus**) d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radians. On note **cos** $(\vec{u}, \vec{v})$ (resp. **sin** $(\vec{u}, \vec{v})$).

Conséquence. Si β est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ et θ la mesure en radians de l'angle géométrique associé $\widehat{AOB}$, on sait que $\theta = |\beta|$. D'où :

- si $\beta \geqslant 0$, $|\beta| = \beta = \theta$ donc $\cos\theta = \cos\beta$;
- si $\beta \leqslant 0$, $|\beta| = -\beta = \theta$ donc $\cos\theta = \cos(-\beta) = \cos\beta$.

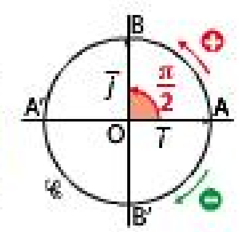


Ainsi, l'angle orienté de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ et l'angle géométrique associé ont le **même cosinus**.

2.4 Plan orienté, repère orthonormé direct

Une unité de longueur étant choisie, dans le plan orienté, dire que le repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est **orthonormé direct** équivaut à dire que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$ et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$.

Sur la figure ci-contre, on a associé le repère orthonormé direct $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.



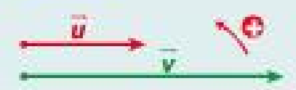
3 Propriétés des angles orientés

3.1 Angles orientés et colinéarité

L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ permet de traduire la colinéarité de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En effet, d'après la définition des mesures d'un angle orienté : $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ et $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$. D'où le théorème suivant.

Théorème 1

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens** équivaut à $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.



- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraires** équivaut à $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

En pratique. Le théorème 1 donne un outil pour démontrer le parallélisme de deux droites et l'alignement de trois points.

3.2 La relation de Chasles

Théorème 2 (admis)

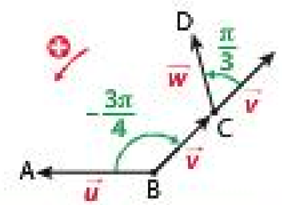
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.

En additionnant **n'importe quelles** mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ et de $(\vec{v}, \vec{w})$, on obtient une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$. Réciproquement, toute mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$ peut s'écrire comme la somme d'une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ et d'une mesure de $(\vec{v}, \vec{w})$.

Exemple. Avec la figure ci-contre :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$$

Donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = -\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{12}$.

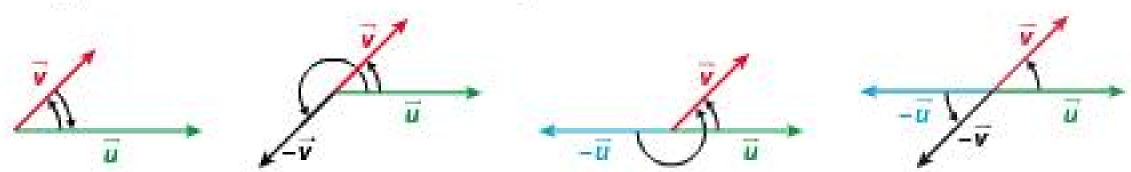


Conséquences

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

① $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ ② $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ ③ $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ ④ $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

Les figures ci-dessous illustrent les résultats précédents :



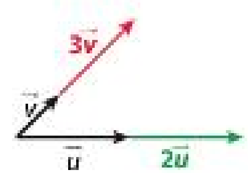
figure① figure② figure③ figure④

Démonstrations

① $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$. Or, d'après la relation de Chasles, $(\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u})$.
Donc $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 0$, soit $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$.
② $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})$. Or $(\vec{v}, -\vec{v}) = \pi$, donc $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

On démontre de la même façon les règles ③ et ④. Voir ROC, exercice 74.

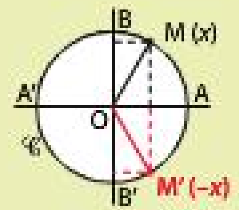
Remarque. On ne change pas la mesure d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ en remplaçant l'un ou l'autre des vecteurs par un vecteur non nul colinéaire et de même sens.
$(2\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$; $(\vec{u}, 3\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$; $(2\vec{u}, 3\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$.



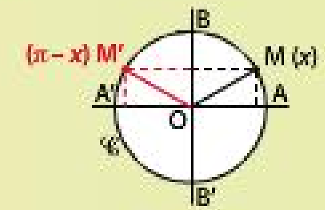
OBJECTIF 1 Calculer le cosinus et le sinus d'angles associés

Animation

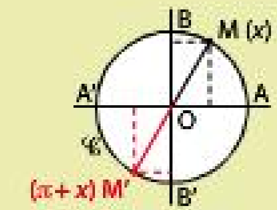
- On appelle **angles associés** à un angle orienté de mesure x en radians les angles dont une mesure est : $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\dfrac{\pi}{2} - x$, $\dfrac{\pi}{2} + x$.
- À l'aide d'une figure, on peut déterminer les expressions des cosinus et sinus d'angles associés. Pour cela, on trace un cercle trigonométrique, puis on place le point M associé à x et le point M′ associé à $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\dfrac{\pi}{2} - x$ ou $\dfrac{\pi}{2} + x$.



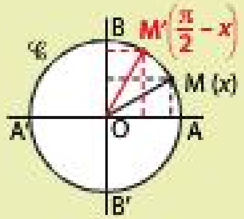
$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$



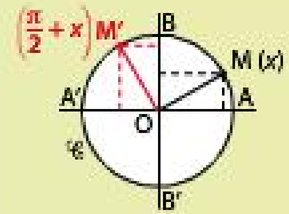
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$



$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$



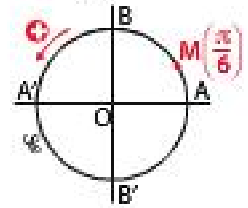
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Mise en pratique

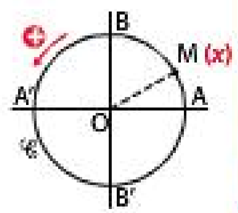
1 Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on a placé le point M associé à $\dfrac{\pi}{6}$.



1. Placez les points N, P et Q associés respectivement à :
- $\dfrac{5\pi}{6}$ - $\dfrac{7\pi}{6}$ - $-\dfrac{\pi}{6}$.

2. Déduisez-en le cosinus et le sinus de ces angles.

2 Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ ci-contre, on a placé le point M associé à x.



1. Placez sur $\mathscr{C}$ les points associés à :
- $3\pi + x$, - $5\pi - x$, - $\dfrac{5\pi}{2} - x$, - $x - \dfrac{\pi}{2}$.

2. Simplifiez l'expression :
$\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3 Simplifiez les expressions suivantes.

a) $\sin(\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin(x)$.

b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos(x + \pi) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin(x - \pi)$.

4 **1.** Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé au repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, placez le point M tel que $\cos x = \dfrac{3}{5}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$.

2. Calculez :

a) $\sin x$;

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$;

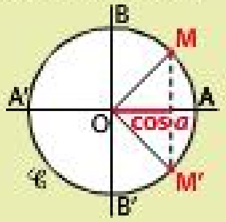
c) $\cos(\pi - x)$;

d) $\sin(\pi + x)$.

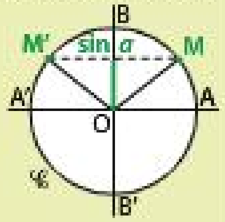
OBJECTIF 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$, on peut utiliser un cercle trigonométrique.

- Il existe deux points, M et M', d'abscisse $\cos a$.
D'où les solutions dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
- M et M' sont confondus si $\cos a = 1$ ou $\cos a = -1$.



- Il existe deux points, M et M', d'ordonnée $\sin a$.
D'où les solutions dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
- M et M' sont confondus si $\sin a = 1$ ou $\sin a = -1$.



EXERCICE RÉSOLU B Résoudre des équations en utilisant un cercle trigonométrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **1.** $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$; **2.** $\sin x = \sin\frac{5\pi}{6}$.

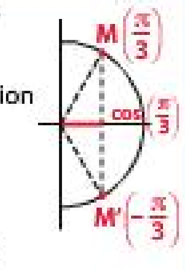
Méthode

1. On utilise un cercle trigonométrique.
On repère les points d'abscisse $\cos a$.

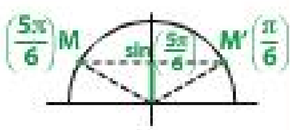
2. On utilise un cercle trigonométrique.
On repère les points d'ordonnée $\sin a$.

Solution

1. Sur $\mathscr{C}$, il existe deux points d'abscisse $\cos\frac{\pi}{3}$.
Donc les solutions de l'équation $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ sont :
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



2. Sur $\mathscr{C}$, il existe deux points M et M' d'ordonnée $\sin\frac{5\pi}{6}$.



Donc les solutions de l'équation sont :
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Mise en pratique

5 Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$. **b)** $\sin x = \sin\frac{5\pi}{4}$.
c) $\sin x = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$. **d)** $\cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$.

6 Trouvez les nombres x de l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ tels que :
a) $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$; **b)** $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$; **c)** $\cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$.

7 Trouvez les nombres x de l'intervalle $[-\pi ; \pi[$ tels que :
a) $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; **b)** $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$;
c) $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; **d)** $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$.

8 **Résoudre une équation du type $\cos x = c$ ou $\sin x = s$**

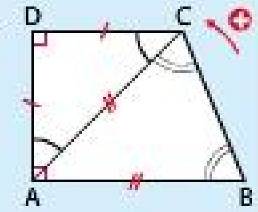
1. Dans cette question, on veut résoudre l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.
a) Justifiez l'affirmation :
« résoudre $\cos x = -\frac{1}{2}$ » équivaut à « résoudre $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$ ».
b) Résolvez alors l'équation.
2. Reprenez la démarche de la question **1.** pour résoudre l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.

OBJECTIF 3 Trouver la mesure principale d'un angle orienté

- Un angle orienté a une seule mesure, en radians, dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. C'est sa **mesure principale**.
- ❶ $(\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$. ❷ $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$. ❸ $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$.

EXERCICE RÉSOLU C

Dans le plan orienté, ABCD est un trapèze rectangle, ADC un triangle rectangle isocèle et CAB un triangle isocèle.
Trouvez, en radians, la mesure principale des angles orientés suivants.
a) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ **b)** $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA})$ **c)** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})$

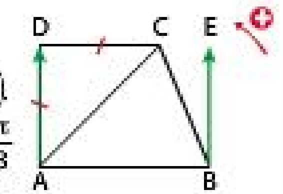


Méthode / Solution

a) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même origine. → **a)** $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$
- On cherche la mesure en radians de l'angle géométrique associé $\widehat{DAC}$. → $\widehat{DAC} = \frac{\pi}{4}$.
- On tient compte de l'orientation. → $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4}$. Comme $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$, c'est la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$.

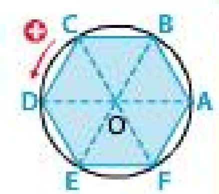
b) $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont une « extrémité » commune. → **b)** $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA})$
- On se ramène à $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ en utilisant ❶. → $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}) = (-\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \pi$.
- On cherche la mesure de $\widehat{ABC}$. → $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$.
- On tient compte de l'orientation. → $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}) = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$.
- On cherche la mesure principale (voir le cours page 195, paragraphe **2.2**). → $\frac{11\pi}{8} = \left(\frac{16}{8} - \frac{5}{8}\right)\pi = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi$.
$-\frac{5\pi}{8}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA})$.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ n'ont pas « d'extrémité » commune. → **c)** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})$
- On remplace $\overrightarrow{AD}$ par un vecteur colinéaire et de même sens, d'origine B. → $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$.
- On cherche la mesure de $\widehat{CBE}$. → $\widehat{CBE} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$ donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{8}$.
- On tient compte de l'orientation. → Comme $-\frac{\pi}{8} \in]-\pi ; \pi]$, c'est la mesure principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})$.

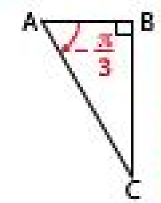


Mise en pratique **Pour tous les exercices, le plan est orienté.**

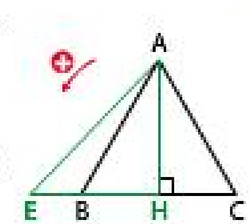
9 ABCDEF est un hexagone régulier. Indiquez la mesure des angles :
a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$. **b)** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE})$.
c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. **d)** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OE})$.



10 Trouvez la mesure principale de chacun des angles suivants.
a) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. **b)** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.
c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB})$.



11 ABC est un triangle équilatéral tel que :
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}.$$
AHE un triangle rectangle isocèle tel que :
$$(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HE}) = \frac{\pi}{2}.$$
Trouvez la mesure principale des angles :
a) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$. **b)** $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$.
c) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{EB})$. **d)** $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CH})$.

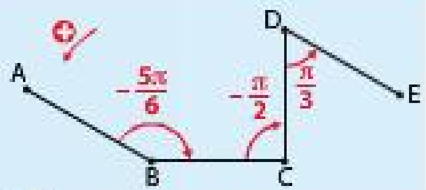


OBJECTIF 4 Démontrer en utilisant la relation de Chasles

- **Théorème 2.** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non nuls : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF})$.
- $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + \pi$.
- $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

EXERCICE RÉSOLU D Prouver le parallélisme de deux droites

Le plan est orienté.
Avec les renseignements portés sur la figure ci-contre, étudiez la position relative des droites (AB) et (DE).



Méthode

- On cherche, par exemple, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE})$. On utilise la relation de Chasles afin d'exploiter les angles connus de la figure.
- On applique $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.
- On conclut.

Solution

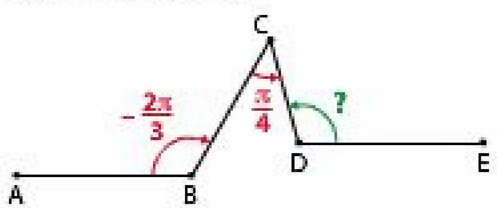
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi$
soit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{\pi}{6}$.
$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + \pi$ soit $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$.
$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = 2\pi$.
Ainsi, la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE})$ est égale à 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

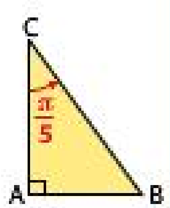
Mise en pratique Pour tous les exercices, le plan est orienté.

12 Sur la figure ci-dessous, (AB) et (DE) sont deux droites parallèles.



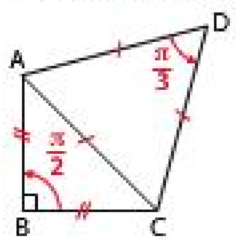
1. Justifiez l'égalité :
$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$.
2. Déduisez-en la mesure principale de $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC})$.

13 Le triangle ABC est rectangle en A et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{5}$.



1. Justifiez l'égalité :
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
2. Déduisez-en la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$.

14 **1.** En utilisant la figure, justifiez que :
$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \pi$.
2. Déduisez-en la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB})$.



15 A, B, C, D et E sont des points deux à deux distincts ; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = b$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = c$.
1. Justifiez l'égalité :
$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.
2. a) On suppose que les droites (AD) et (AE) sont perpendiculaires. Quelle relation lie a, b et c ?
b) On suppose que $a = \frac{7\pi}{12}$, $b = \frac{4\pi}{3}$ et $c = \frac{2\pi}{5}$. Les droites (AD) et (AE) sont-elles perpendiculaires ?

Pour se tester

Exercices interactifs

16 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) α et d sont les mesures en radians et en degrés d'un angle. α et d sont liés par la relation ……

b) Si β est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$, alors β appartient à l'intervalle ……

c) Si β est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ et θ la mesure de l'angle géométrique associé (β et θ en radians), alors β et θ sont liés par la relation :
$\theta =$ ……

d) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, -\vec{v})$ sont liés par la relation $(\vec{u}, -\vec{v}) =$ ……

17 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

a) Quels que soient les points A, B, C distincts :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = \pi$.

b) Si $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{t}, \vec{w})$ ont respectivement pour mesure $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{12}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires.

c) Pour tout nombre x :
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \sin(3\pi - x) = 0$.

d) M et N sont deux points d'un cercle trigonométrique associés à $\frac{83\pi}{8}$ et $\frac{81\pi}{8}$. L'abscisse de M est égale à l'ordonnée de N et inversement.

18 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{5}$, alors $(\vec{u}, -\vec{v})$ a pour mesure :
a) $-\frac{\pi}{5}$ **b)** $-\frac{4\pi}{5}$ **c)** $\frac{4\pi}{5}$

2. L'expression $\sin(3\pi + x) + \cos(x - \pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est égale à :
a) $-\sin x - 2\cos x$ **b)** $-\sin x$ **c)** $\cos x$

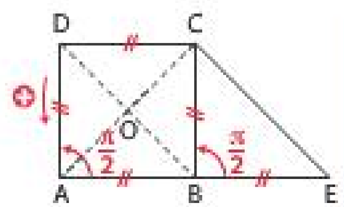
3. $\cos x = \frac{2}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$. Alors $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est égal à :
a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **b)** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ **c)** $-\frac{5}{9}$

4. Dans le plan orienté, ABCD est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ est égal à :
a) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ **b)** $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OB})$ **c)** $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AB})$

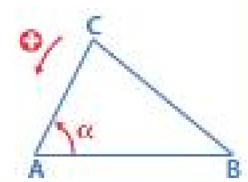
19 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

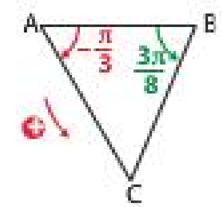
1. a) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CO}) = \frac{3\pi}{4}$
b) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{4}$
c) $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{4}$



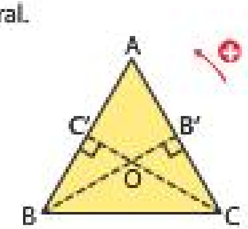
2. a) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = \pi - \alpha$.
b) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \pi + \alpha$.
c) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = -\alpha$.



3. $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ a pour mesure :
a) $-\frac{17}{24}\pi$ **b)** $\frac{41\pi}{24}$ **c)** $-\frac{7\pi}{24}$



4. ABC est un triangle équilatéral.
a) $\cos(\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'B'}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
b) $\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CC'}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) $\sin(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{BB'}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

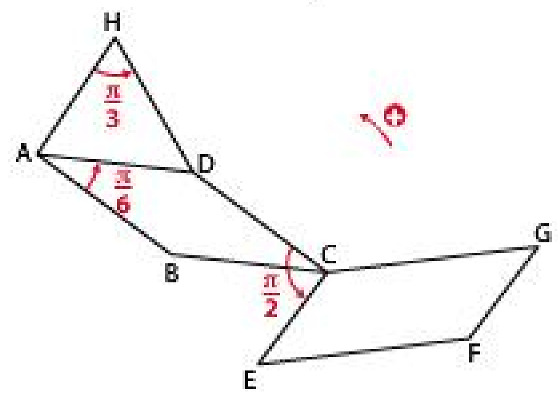


Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

20 Angles orientés et parallélisme

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-dessous où ABCD et CEFG sont deux parallélogrammes tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{2}$. AHD est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HD}) = \frac{\pi}{3}$.



Objectif Prouver que les droites (AH) et (FG) sont parallèles.

1. Une façon de prouver que (AH) et (FG) sont deux droites parallèles est de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires en calculant une mesure de $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{FG})$.

a) Décomposez l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{FG})$ en utilisant la relation de Chasles et les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) Démontrez que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Déduisez-en une mesure de $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{FG})$ puis concluez.

21 Lignes trigonométriques d'angles associés

La valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ est $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Objectif Trouver les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres suivants :

- $\frac{3\pi}{5}$
- $\frac{7\pi}{5}$
- $\frac{\pi}{10}$

1. Avant de trouver les valeurs exactes du cosinus et du sinus de ces nombres, montrons que chacun d'eux est la mesure d'un angle « associé » à $\frac{2\pi}{5}$.

a) Calculez :

- $\pi - \frac{2\pi}{5}$;
- $\pi + \frac{2\pi}{5}$;
- $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$.

b) Sur un cercle trigonométrique, placez le point M associé à $\frac{2\pi}{5}$ puis les points N, P, Q associés respectivement à $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{10}$, en indiquant les symétries utilisées.

c) Déduisez-en les expressions du cosinus et du sinus de chacun de ces nombres en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

2. Pour terminer les calculs, il faut calculer la valeur exacte de $\sin\frac{2\pi}{5}$.

a) Démontrez que $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

b) Concluez.

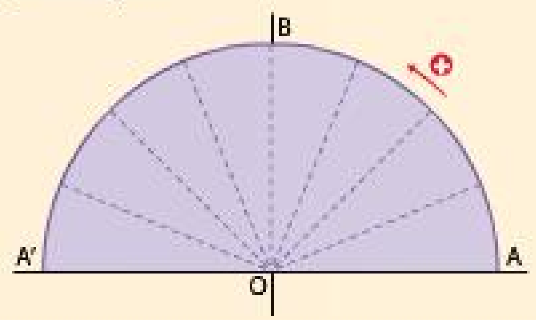
22 Utilisez les angles orientés pour démontrer

On note :

$$S = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}.$$

Objectif En utilisant les angles associés, simplifier l'écriture de S.

1. On a divisé un demi-cercle trigonométrique en huit parties égales.



a) Sur ce demi-cercle, placez le point M associé à $\frac{\pi}{8}$.

b) Placez les points N, P, Q associés respectivement à :

- $\frac{3\pi}{8}$
- $\frac{5\pi}{8}$
- $\frac{7\pi}{8}$.

c) Quelles symétries avez-vous utilisées pour placer les points ?

d) Déduisez des constructions précédentes les expressions de $\sin\frac{3\pi}{8}$, $\sin\frac{5\pi}{8}$ et $\sin\frac{7\pi}{8}$ en fonction de $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

2. Il reste à regrouper judicieusement les termes de la somme S pour conclure.

Calculez S.

Narration de recherche

→ **L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.**

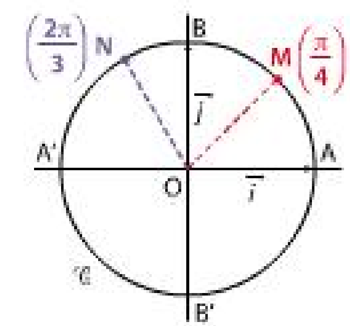
23 La figure ci-contre représente un écran radar. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan orienté.

D est le point du cercle $\mathscr{C}$ de rayon 3 tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2}$.

B est le point du cercle $\mathscr{C}'$ de rayon 4 tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$.

L'unité choisie est le kilomètre. Un observateur placé en D dans une plaine peut-il apercevoir un objet situé en B si la visibilité est de 6,5 kilomètres ?

24 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.



1. Construisez tous les points P de $\mathscr{C}$ pour lesquels le triangle MNP est isocèle.

2. Quelle est la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$ pour chacune des solutions trouvées ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ **Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Géométrie.**

Jean-Robert Argand
(1768-1822)

D'origine suisse et mathématicien amateur. Des problèmes pratiques, telle la navigation, montrent que les angles géométriques ne suffisent plus et qu'il faut désormais considérer des angles dont la mesure « dépasse 180° » ou dont la mesure est négative. C'est en 1806 qu'Argand met en valeur le repérage avec les angles orientés. Ses travaux seront complétés 25 ans plus tard par Cauchy.

▲ Couverture de l'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* publié en 1806.

Sur le Web http://www.chronomath.com/chrono/argand.html

EXERCICES

Utiliser GeoGebra

→ Pour étudier une configuration du plan orienté

25 De l'intérêt des angles orientés. Utiliser la relation de Chasles

COMPÉTENCES

TICE	Mathématiques
■ Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. ■ Animer une figure. ■ Tester une conjecture.	■ Exploiter la relation de Chasles. ■ Étudier l'orthogonalité de deux droites.

Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

D est le milieu du segment [BC]. Le point E est le symétrique de D par rapport au segment [AC]. M est un point de la droite Δ médiatrice de [AC] ; M est distinct de E. La droite (CM) coupe la droite (AD) en F. On s'intéresse à la position relative des droites (AM) et (FB).

1. Réaliser la figure

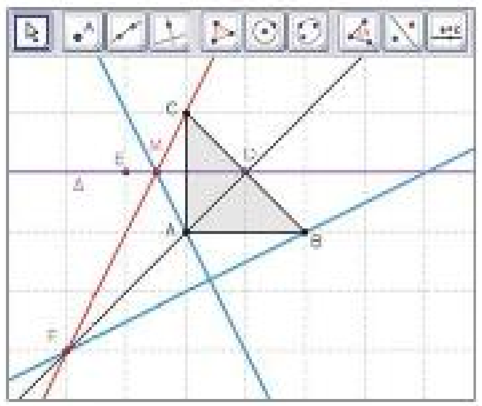
a) Affichez la grille et effacez les axes. Créez le triangle ABC et le point D.

outil 1

b) Créez la droite Δ et le point E. (Δ sera aussi désignée par (xy).)

c) Créez M, point quelconque de Δ, puis créez le point F.

d) Créez les droites (AM) et (FB).

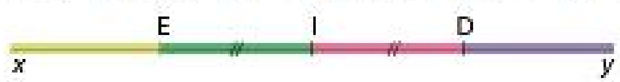


2. Conjecturer avec GeoGebra

a) Déplacez le point M sur Δ. Vous constatez que la figure se modifie suivant la position de M sur Δ.

Si I est le milieu du segment [AC], on obtient six figures possibles :

• M ∈]Ex) • M ∈]EI[• M = I • M ∈]ID[• M = D • M ∈]Dy).



b) Quelle conjecture faites-vous concernant les droites (AM) et (FB) ?

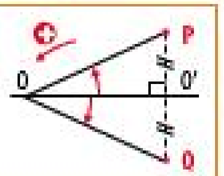
3. Démontrer

La démonstration avec les angles géométriques nécessite l'étude des six cas de figures, alors que **le raisonnement avec les angles orientés est valable dans tous les cas.**

Note

On admettra que la symétrie orthogonale change la mesure d'un angle orienté en son opposée :

$(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OQ}) = -(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OP})$.



a) Justifiez que :

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}) = -(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF})$.

b) Utilisez la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$

pour démontrer que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BF}) = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF})$.

c) Pourquoi $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF}) = 0$ ou $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF}) = \pi$?

d) Concluez.

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

Compléments numériques

Entraînement

EXERCICES

DE TÊTE

26 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$.

Donnez une mesure de :

a) $(\vec{v}, \vec{u})$; b) $(-\vec{u}, \vec{v})$ c) $(-\vec{v}, \vec{u})$.

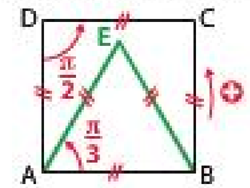
27 On sait que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$.

Donnez une mesure de $(\vec{v}, \vec{w})$.

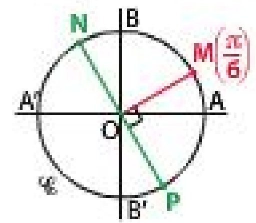
28 On donne : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$; $(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$; $(\vec{w}, \vec{t}) = \frac{\pi}{6}$.

$\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont-ils colinéaires ?

29 Donnez une mesure de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et de $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})$.



30 $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.



1. Quel est le nombre de l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ associé à N ?

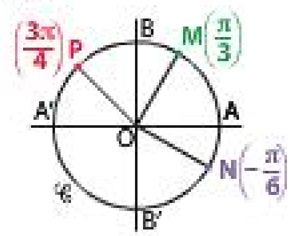
2. Quel est le nombre de l'intervalle $[-\pi ; 0]$ associé à P ?

31 $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé direct.

Complétez.

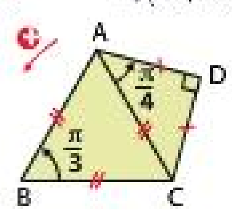
a) $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = \ldots\ldots$ b) $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \ldots\ldots$

c) $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}) = \ldots\ldots$



32 Complétez.

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \ldots\ldots$ b) $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}) = \ldots\ldots$



ANGLES ORIENTÉS

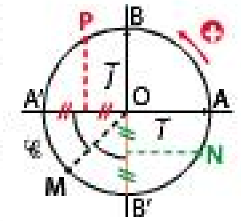
Pour les exercices 33 à 37

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

33 **1.** Quels sont les nombres de l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ associés respectivement aux points M, N, P ?

2. Reprenez la question précédente en considérant les intervalles proposés.

a) $[-\pi ; \pi[$ b) $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$.



34 Dans chacun des cas suivants, on donne une mesure α d'un angle orienté.

Trouvez sa mesure principale.

1. a) $\alpha = \frac{7\pi}{2}$ b) $\alpha = -\frac{5\pi}{3}$ c) $\alpha = \frac{37\pi}{6}$

2. a) $\alpha = \frac{25\pi}{4}$ b) $\alpha = \frac{205\pi}{3}$ c) $\alpha = -\frac{117\pi}{7}$

35 **Mesure principale** ALGORITHMIQUE

1. L'algorithme (partiel) ci-dessous, écrit avec AlgoBox, a pour objectif de fournir la mesure principale d'un angle x. Ainsi, cet algorithme donne la décomposition de x sous la forme $a + 2k\pi$, avec $a \in]-\pi ; \pi]$ et k un nombre entier naturel.

Math.PI est la notation utilisée par le logiciel pour le nombre π.

Complétez cet algorithme.

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  k PREND_LA_VALEUR 0
  SI (x>Math.PI) ALORS
    DEBUT_SI
    TANT_QUE [illegible] FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      x PREND_LA_VALEUR x-2*Math.PI
      k PREND_LA_VALEUR k+1
      FIN_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR [illegible]
    AFFICHER [illegible]
    AFFICHER a
    AFFICHER [illegible]
    AFFICHER k
    AFFICHER [illegible]
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
...     ...............
```

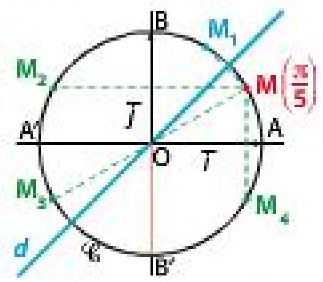
2. Pour des raisons d'arrondi, ce programme ne renvoie pas la bonne décomposition pour x = Math.PI.
Un moyen de remédier à ce problème est de créer une nouvelle variable b, de lui attribuer la valeur Math.PI et d'étudier le cas $x = b$ (entre les lignes 9 et 10).
Écrivez l'algorithme ainsi modifié.

36 **1.** Sur le cercle $\mathscr{C}$, placez les points M, N et P associés respectivement à $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{4\pi}{3}$ et $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

2. Placez sur $\mathscr{C}$ les points C, D et E associés respectivement à $a = \alpha + \beta + \gamma$, $b = \alpha - \beta - \gamma$ et $c = \gamma - \alpha - \beta$.

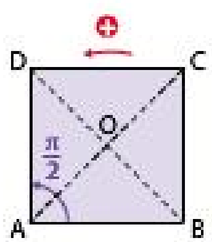
3. Quelle est la mesure principale de l'angle orienté :
- $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$?
- $(\vec{i}, \overrightarrow{OD})$?
- $(\vec{i}, \overrightarrow{OE})$?

37 Sur la figure ci-dessous, d est la droite d'équation $y = x$; M est le point de $\mathscr{C}$ associé à $\frac{\pi}{5}$; M_1 est le symétrique de M par rapport à d, M_2 est le symétrique de M par rapport à (OB), M_3 le symétrique de M par rapport à O et M_4 le symétrique de M par rapport à (OA).

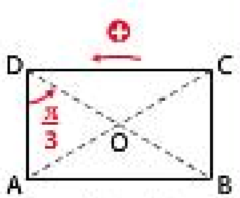


Quels sont les nombres de l'intervalle $[-\pi ; \pi[$ associés à chacun de ces points ?

38 Dans le plan orienté, ABCD est un carré de centre O tel que :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}.$$
Trouvez une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OD})$, puis de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CO})$.

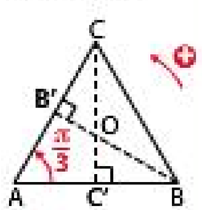


39 Dans le plan orienté, ABCD est un rectangle de centre O tel que :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{3}.$$



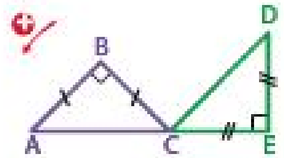
Trouvez une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, puis de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CB})$.

40 Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral de centre O tel que :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}.$$
Trouvez une mesure de :



a) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BB'})$ b) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CC'})$ c) $(\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'B'})$

41 Dans le plan orienté, les triangles rectangles isocèles ABC et CED sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



Par lecture graphique, donnez une mesure des angles orientés suivants.

a) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})$ b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$ c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE})$ d) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE})$

42 Dans le plan orienté, A et B sont deux points distincts.

1. Placez le point C tel que :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{6}.$$

2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

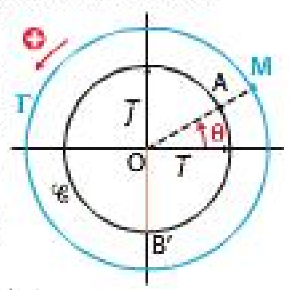
43 Dans le plan orienté, A et B sont deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, représentez l'ensemble des points M.

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$ b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \pi$

c) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$ d) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3}$

44 **Repérage d'un point dans le plan orienté**

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. Γ est un cercle de centre O et de rayon r et M est un point de Γ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. La demi-droite [OM) coupe $\mathscr{C}$ en A.



1. a) Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$?

b) Pourquoi A a-t-il pour coordonnées $(\cos\theta ; \sin\theta)$?

2. Déduisez-en que M a pour coordonnées :
$$(r\cos\theta ; r\sin\theta).$$

Commentaire

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct, Γ le cercle de centre O et de rayon r. Si M est un point de (Γ) tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, alors M a pour coordonnées $(r\cos\theta ; r\sin\theta)$.

45 Dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 2. A est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6}$ et B le point de $\mathscr{C}'$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$.

1. a) Faites une figure et placez les points A et B.

b) Quelle est la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$?

2. a) Démontrez que A a pour coordonnées $(2\sqrt{3} ; 2)$ et $B(-\sqrt{2} ; \sqrt{2})$.

b) Déduisez-en que $AB = 2\sqrt{5 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}$.

PROPRIÉTÉS DES ANGLES ORIENTÉS

Pour les exercices 46 à 57
Le plan est orienté.

46 Une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est fixée. Dans chacun des cas suivants, donnez une mesure de chacun des angles orientés indiqués.

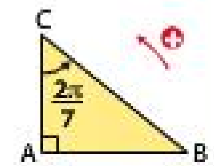
1. $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

a) $(\vec{u}, 2\vec{v})$. b) $(\vec{v}, -2\vec{u})$. c) $(-\vec{v} ; -\vec{u})$.

2. $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $(3\vec{u}, -2\vec{v})$. b) $(-2\vec{u}, \vec{v})$. c) $(-3\vec{u}, -2\vec{v})$.

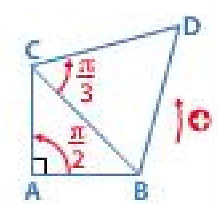
47 ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{2\pi}{7}$.



1. Justifiez l'égalité suivante :
$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

2. Déduisez-en la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$.

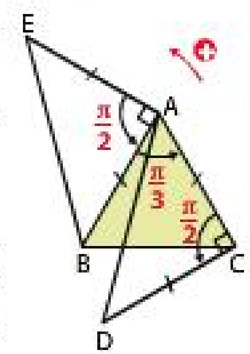
48 ABC est un triangle rectangle isocèle et BCD est un triangle équilatéral tels que :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{3}.$$



1. Justifiez l'égalité :
$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \pi.$$

2. Déduisez-en la mesure principale de $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA})$.

49 ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.
ACD et BAE sont deux triangles rectangles isocèles tels que :
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}.$$

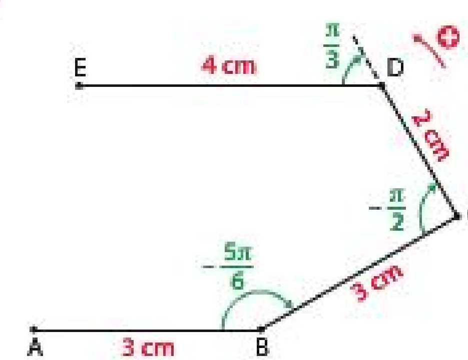


1. Quelle est la mesure principale de $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA})$? Et celle de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$?

2. a) Quelle est la mesure principale de $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD})$?

b) Que pouvez-vous en conclure ?

50 On a construit ci-dessous une lignée brisée.

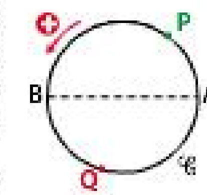


1. Justifiez que :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}).$$

2. Justifiez la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ et déduisez-en le réel k tel que $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{AB}$.

51 Dans le plan orienté, ABCD est un quadrilatère non croisé. Démontrez que :
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = 0.$$

52 Dans le plan orienté, P et Q sont deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB], distincts de A et B et disposés sur les demi-cercles opposés comme indiqué ci-contre.



1. Trouvez une mesure de $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$, puis de $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB})$.

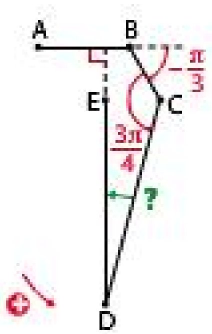
2. Déduisez-en l'ensemble des points M tels que :
$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad (M \neq A \text{ et } M \neq B).$$

53 **Implication réciproque** LOGIQUE

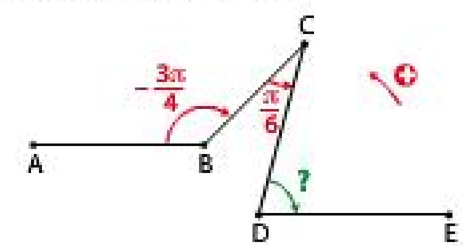
1. A, B, C sont trois points distincts deux à deux.
L'implication : « si A, B et C sont alignés, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ » est-elle vraie ?

2. L'implication réciproque est-elle vraie ?

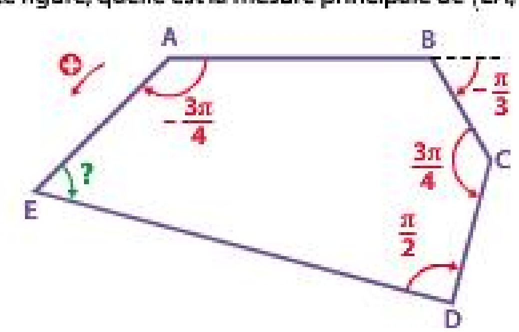
54 En tenant compte des renseignements portés sur cette figure, démontrez que l'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{12}$.



55 $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
Trouvez une mesure de $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$.



56 En tenant compte des renseignements portés sur cette figure, quelle est la mesure principale de $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})$?



57 $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

1. Placez sur $\mathscr{C}$ les points A et B tels que :
$$(\vec{i},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad (\vec{i},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{3}.$$

2. À tout réel α en radians, on associe les points M et N tels que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{ON})=\alpha$.

Démontrez que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=-\frac{\pi}{2}$.

58 **Implication réciproque** LOGIQUE

1. L'implication : « si $x=\frac{\pi}{3}$, alors $\cos x=\frac{1}{2}$ » est-elle vraie ?

2. Énoncez l'implication réciproque. Est-elle vraie ? Justifiez.

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

Pour les exercices 59 à 61

Trouvez les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres donnés. Vous pouvez commencer par placer les points sur un cercle trigonométrique.

59 a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{11\pi}{6}$ c) $-\frac{13\pi}{6}$

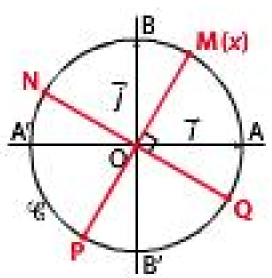
60 a) $\frac{9\pi}{4}$ b) $\frac{81\pi}{4}$ c) $-\frac{107\pi}{4}$

61 a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{71\pi}{3}$ c) $-\frac{97\pi}{3}$

62 Simplifiez les expressions suivantes.

- $A=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x+\pi)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x-\pi)$.
- $B=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)-\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)$.
- $C=\sin(\pi+x)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

63 $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Les points N, P, Q sont définis à partir de M comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Quels sont les réels de $[0;2\pi]$ associés à N, P et Q respectivement ?

2. Simplifiez les écritures suivantes.

a) $\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x+\pi)+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

b) $\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

64 On donne $\cos x=\frac{3}{4}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

1. Sur un cercle trigonométrique, placez le point M associé à x.

2. a) Quelle est la valeur exacte de $\sin x$?

b) Déduisez-en les valeurs exactes de :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; • $\sin(\pi+x)$; • $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$; • $\cos(\pi-x)$.

65 On donne $\cos x=-\frac{1}{3}$, $x\in[0;\pi]$. Calculez :

- $\sin x$; • $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; • $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; • $\cos(x+\pi)$.

66 La valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$ est $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. Démontrez que la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ est $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. Déduisez-en les valeurs exactes du sinus et du cosinus de :

a) $\frac{5\pi}{12}$; b) $\frac{7\pi}{12}$; c) $\frac{11\pi}{12}$.

ÉQUATIONS

67 À l'aide d'un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, trouvez les réels x de l'intervalle $[-\pi;\pi[$ tels que :

a) $\sin x=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; b) $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$;

c) $\sin x=-\frac{1}{2}$; d) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

68 **1.** À l'aide d'un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, trouvez les réels x de l'intervalle $[0;2\pi[$ tels que :

a) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Trouvez les réels x de l'intervalle $[-\pi;\pi[$ tels que :

a) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69 Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2\sin x+1=0$ b) $\sqrt{2}\cos x-1=0$

c) $2\cos x+\sqrt{3}=0$ d) $2\sin x+\sqrt{2}=0$

70 **Avec la calculatrice**

À l'aide de la calculatrice, donnez une valeur en radians approchée à 10^{-2} près des solutions de l'équation dans l'intervalle indiqué.

Note
La calculatrice donne directement la valeur (exacte ou approchée) de x dans les intervalles suivants :
• pour $\cos x=a$, $x\in[0;\pi]$; • pour $\sin x=a$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

a) $I=[0;\pi]$; $\cos x=0{,}7$.

b) $I=[-\pi;\pi[$; $\sin x=\frac{1}{3}$.

c) $I=[0;2\pi[$; $\cos x=-\frac{3}{7}$.

Pour les exercices 71 et 72

Donnez à l'aide de la calculatrice une valeur approchée en radians à 10^{-3} près des solutions de l'équation dans l'intervalle I indiqué.

71 a) $I=[0;\pi]$; $\cos x=0{,}6$.

b) $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin x=-\frac{2}{5}$.

72 a) $I=[-\pi;\pi[$; $\sin x=0{,}4$.

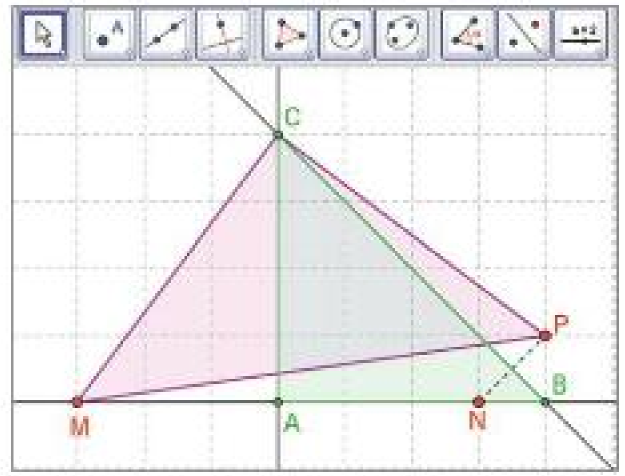
b) $I=[0;2\pi[$; $\sin x=\frac{5}{6}$.

c) $I=[0;2\pi[$; $\cos x=-\frac{3}{7}$.

AVEC LES TICE

73 **Une équerre qui pivote**

Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$. M est un point de la droite (AB), N est son symétrique par rapport à la droite (AC). P le symétrique de N par rapport à la droite (BC).



1. Réaliser la figure avec GeoGebra

a) Effacez les axes et affichez la grille.

b) Créez un triangle rectangle isocèle ABC tel que :
$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}.$$

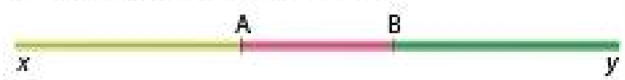
c) Créez la droite (AB), puis un point M quelconque de cette droite.

d) Créez les points N et P, puis le triangle MCP.

2. Conjecturer avec GeoGebra

a) Déplacez le point M sur (AB).

b) Vous remarquez que la figure se déforme suivant que $M\in]Ax[$, $M=A$, $M\in]AB[$, $M=B$ ou $M\in]By)$. Il existe donc cinq cas de figure possibles.



Quel semble être, dans chacun des cas, la nature du triangle MCP ?

3. Démontrer

On pourrait démontrer cette conjecture par disjonction des cas. Mais en utilisant les angles orientés, on peut faire une démonstration valable quel que soit le cas de figure.

a) Pourquoi CM = CN = CP ?

b) Pourquoi $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN})$ et $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP})=(\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB})$?

Aide Utilisez le résultat de la note page 204.

c) En utilisant la relation de Chasles et les résultats de la question b), démontrez que :
$$(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP})=2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}).$$

d) Concluez.

ROC Restitution organisée de connaissances

74 **Prérequis.**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :
$$(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v}) \quad \text{et} \quad (\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi.$$

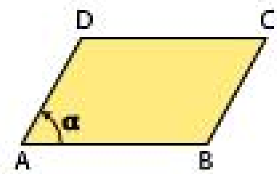
1. Démonstration

a) Démontrez que :
$$(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v}) \quad \text{et} \quad (-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi.$$

b) $\vec{u},\vec{v},\vec{u'},\vec{v'}$ sont des vecteurs non nuls. Démontrez que :
$(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u'},\vec{v'})$ équivaut à $(\vec{u},\vec{u'})=(\vec{v},\vec{v'})$.

2. Application

Dans le plan orienté, ABCD est un parallélogramme tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.



Calculez en fonction de α :

a) $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$; b) $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})$;

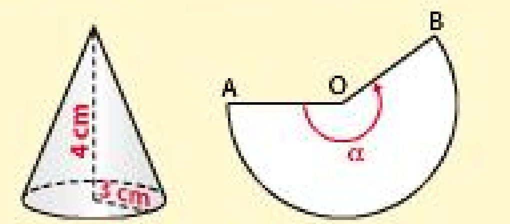
c) $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})$.

Prendre toutes les initiatives

75 Quelle est la nature d'un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$?

76 Démontrez que :
$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=0.$$

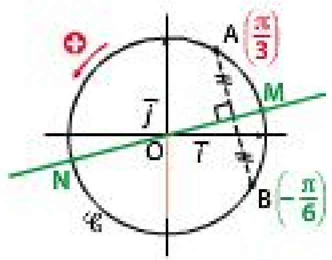
77 Un cône de révolution de hauteur 4 cm et de rayon de base 3 cm a pour patron une portion de disque telle que $\widehat{AOB}=\alpha$ en radians. Calculez α.



Approfondissement

Compléments numériques

78 $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Les points A et B sont respectivement associés aux nombres $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$.



La médiatrice du segment [AB] coupe $\mathscr{C}$ en M et N.
Trouvez la mesure principale de l'angle $(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ puis celle de l'angle $(\vec{\imath},\overrightarrow{ON})$.

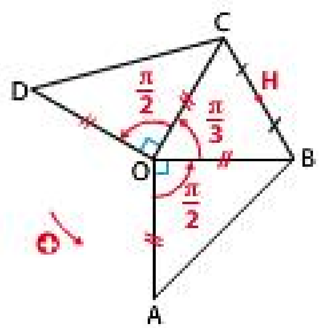
79 OBC est un triangle équilatéral tel que :

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{3}.$$

AOB et DOC sont deux triangles rectangles isocèles tels que :

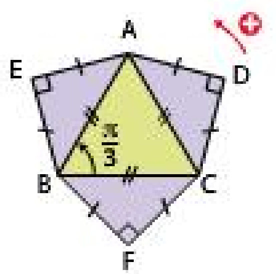
$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})=\frac{\pi}{2}.$$

H est le milieu du segment [BC].



1. Trouvez les mesures principales de :
a) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH})$; **b)** $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB})$; **c)** $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AO})$; **d)** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$.
2. Démontrez que les droites (AD) et (OH) sont perpendiculaires.

80 Trouvez la mesure principale de $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF})$, puis celle de $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BC})$.



81 $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
1. a) Placez sur $\mathscr{C}$ les points A, B, C et D associés respectivement à $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.
b) Tracez la droite d d'équation $y=-x$.
2. La droite d coupe le segment [AB] en H.
a) Quelle est la mesure de l'angle $(\vec{\imath},\overrightarrow{OH})$?
b) Démontrez que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH})=(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OB})$.
c) Déduisez-en que A et B sont symétriques par rapport à la droite d.
d) Pourquoi d est-elle la médiatrice de [CD] ?
3. Déduisez des questions précédentes la nature du quadrilatère ABCD.

82 **1.** Factorisez les expressions suivantes.
a) $2\cos^2 x-1$ **b)** $4\sin^2 x-3$
2. Résolvez dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes.
a) $2\cos^2 x-1=0$ **b)** $4\sin^2 x=3$

83 Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$ **b)** $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$
c) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\frac{\pi}{8}$

84 Résolvez les équations suivantes.
a) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ avec $x\in[0\,;\,2\pi[$.
b) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ avec $x\in[-\pi\,;\,\pi[$.

85 Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x=\sin\frac{\pi}{5}$ (1).
1. Justifiez que $\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}$.
2. Résolvez l'équation (1).

Aide $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

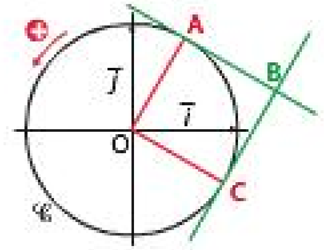
86 Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x=\cos\frac{\pi}{8}$ (2).
1. Trouvez un réel a tel que $\cos\frac{\pi}{8}=\sin a$.
2. Résolvez alors l'équation (2).

87 **Angles orientés et suites**
$(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct. À tout entier n, on associe le point M_n du cercle de centre O et de rayon $\frac{8}{2^n}$ tel que $(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OM_n})=n\frac{\pi}{2}$.
1. a) En prenant le centimètre pour unité, construisez les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4.
b) Quelles sont les coordonnées de ces points dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$?
2. a) Quelle est la nature des triangles OM_nM_{n+1} ? Justifiez.
b) À l'aide du théorème de Pythagore, démontrez que :

$$M_nM_{n+1}=\frac{8\sqrt{5}}{2^{n+1}}.$$

3. On considère la suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_n=M_nM_{n+1}$.
Démontrez que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. On pose $\ell_n=u_0+\ldots+u_n$.
Démontrez que $\ell_n=8\sqrt{5}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.
5. Narration de recherche
Dans cette question, vous devez décrire les étapes de votre recherche même incomplète ou d'une initiative même non fructueuse.
Déterminer le rang n à partir duquel $\ell_n\in[8\sqrt{5}-10^{-4}\,;\,8\sqrt{5}[$.

88 Sur la figure ci-dessous, $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O, $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{3}$ et $(\vec{\imath},\overrightarrow{OC})=-\frac{\pi}{6}$.
Les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et C se coupent en B.



1. Démontrez que :
a) le quadrilatère OABC est un carré ;
b) B est un point du cercle Γ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$;
c) $(\vec{\imath},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{12}$.
2. a) Calculez les coordonnées de A et de C.
b) Déduisez-en celles de B.
3. Pourquoi B a-t-il pour coordonnées :

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\text{ et }y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\,?$$

Aide Voir la note de l'exercice 44.

b) Déduisez-en, avec les questions 2.b) et 3.a), les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $\frac{\pi}{12}$.

89 $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2, A le point de coordonnées $(2\,;\,0)$ et B le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{\imath},\overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{4}$.
On note I le milieu du segment [AB].
1. Démontrez que I a pour coordonnées $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. a) Démontrez que I est un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
b) Quelle est la mesure principale de $(\vec{\imath},\overrightarrow{OI})$?
c) Déduisez-en que I a aussi pour coordonnées :

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8}\,;\,\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

3. a) Déduisez des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.
b) Vérifiez que :

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

90 $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. On donne les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ du cercle $\mathscr{C}$.
1. a) Faites une figure.
b) Déterminez la mesure principale de $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA})$ et de $(\vec{\imath},\overrightarrow{OC})$.
2. a) Quelle est la mesure principale de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$?
b) Déduisez-en la mesure en radians de $\widehat{AOC}$, puis celle de $\widehat{OAC}$.
c) Quelle est la mesure principale de $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC})$?
3. a) Démontrez que :

$$(\vec{\imath},\overrightarrow{AC})=(\vec{\imath},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC})+\pi.$$

b) Déduisez-en la mesure principale de $(\vec{\imath},\overrightarrow{AC})$, puis celle de $(\vec{\jmath},\overrightarrow{AC})$.

91 **Implications réciproques** LOGIQUE
1. (P) est la proposition : « $\sin 2x=2\cos x$ » et (Q) est la proposition : « $\sin x=1$ ».
L'implication (Q) $\Rightarrow$ (P) est-elle vraie ?
Justifiez votre réponse.
2. Dans le plan orienté, A, M, B sont trois points distincts deux à deux.
(P) est la proposition : « $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}$ ».
(Q) est la proposition : « M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] ».
Les implications (P) $\Rightarrow$ (Q) et (Q) $\Rightarrow$ (P) sont-elles vraies ?
Justifiez votre réponse.

Prendre toutes les initiatives

92 Quelle est la valeur exacte de :

$$\cos^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{3\pi}{12}+\cos^2\frac{7\pi}{12}+\cos^2\frac{9\pi}{12}+\cos^2\frac{11\pi}{12}\,?$$

93 x est un réel tel que :

$$3\sin x+4\cos x=5.$$

Calculez la valeur exacte de $\sin x$ et de $\cos x$.

94 Résolvez dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi[$ l'équation :

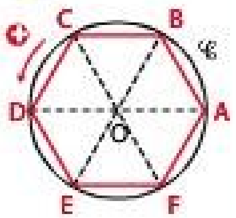
$$4\cos^2 x-2(1-\sqrt{3})\cos x-\sqrt{3}=0.$$

Travail en autonomie

→ Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.

A Avec un polygone régulier 1

$\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O et ABCDEF est un hexagone régulier. Quelle est la mesure principale de :



a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AF})$? **b)** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$?
c) $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{CB})$?

B Tirer des renseignements d'une figure 2

Dans le plan orienté, on donne les figures ci-dessous.

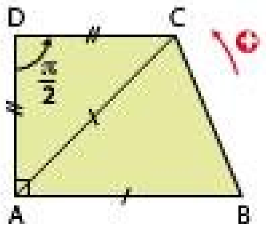


Figure 1

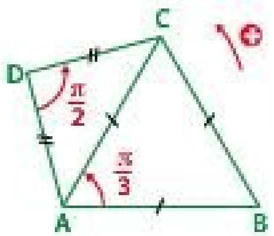


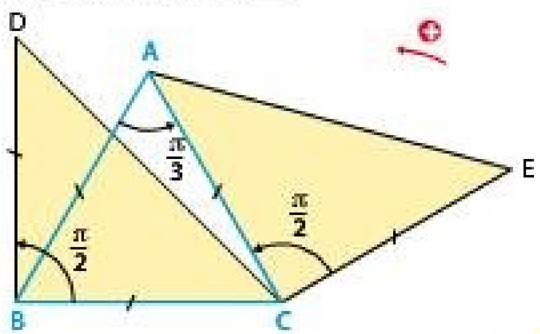
Figure 2

Pour chacune de ces figures, quelle est la mesure principale de :

a) $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BA})$? **b)** $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$? **c)** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$?

C En partant d'un angle géométrique

Dans le plan orienté, on donne la figure ci-dessous. ABC est un triangle équilatéral, ACE et DBC sont deux triangles rectangles isocèles.



1. Donnez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$. 3

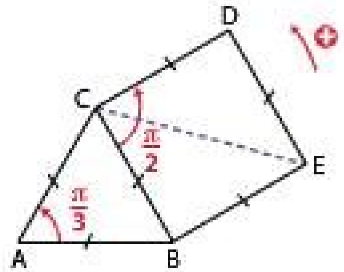
2. a) Déduisez-en une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, puis de $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

b) Que peut-on dire des points D, A, E ? 4

D Un carré sur un triangle… 5

À partir des renseignements portés sur la figure ci-dessous, trouvez la mesure principale de chacun des angles suivants.

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE})$ **b)** $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DE})$ **c)** $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE})$.

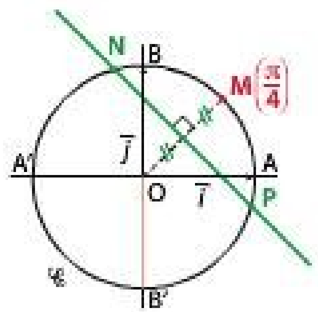


E Cherchez des triangles 6

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

M est le point de $\mathscr{C}$ associé à $\frac{\pi}{4}$. La médiatrice du segment [OM] coupe $\mathscr{C}$ en N et P.

Déterminez la mesure principale de $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$, puis celle de $(\vec{i}, \overrightarrow{ON})$.



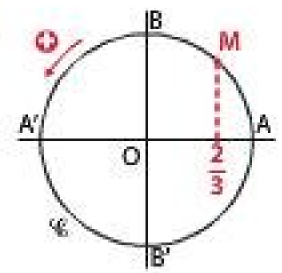
F Angles associés 7

x est un réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = \frac{2}{3}$.

M est le point associé à x sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Calculez :

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin(3\pi - x)$.



G Rester dans le bon intervalle 8

Pour chacune des figures ci-dessous, trouvez les réels x de l'intervalle $[-3\pi\,; 3\pi[$ associés aux points M et N.

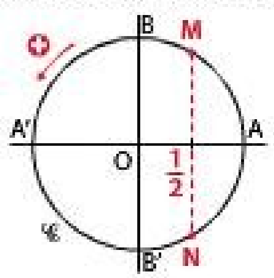


Figure 1

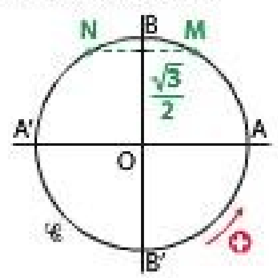


Figure 2