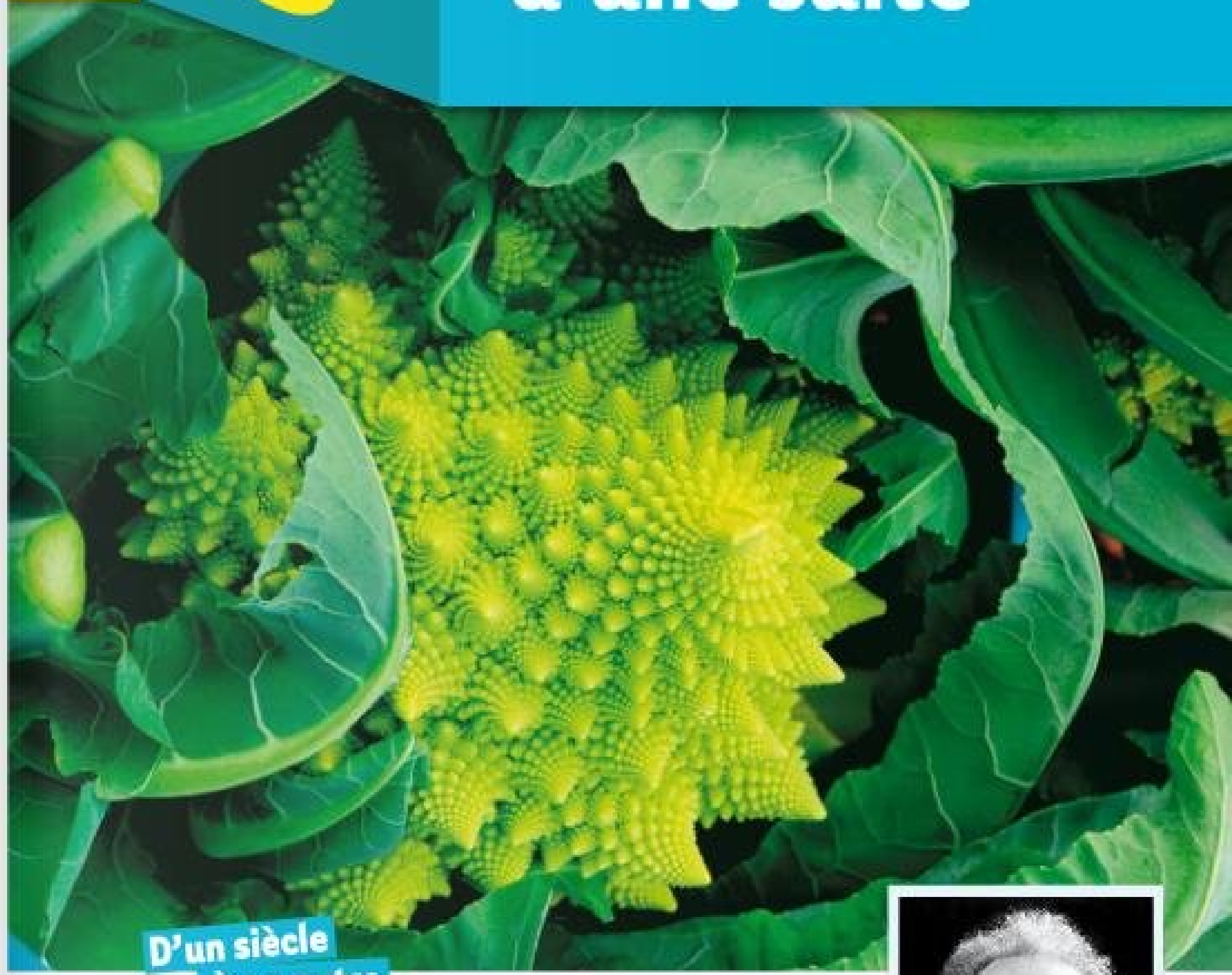
CHAPITRE

6 Comportement d'une suite



D'un siècle à un autre

Le néologisme « fractale » (du latin *fractus* : brisé) est créé en 1974 par Benoît Mandelbrot, alors qu'il étudie des objets étranges, invariants lors de changements d'échelle.

Des algorithmes de construction permettent de construire des « figures limites » qui sont fractales. Leur surface peut tendre vers une limite finie alors que leur périmètre tend vers une limite non finie.

En savoir plus sur **Benoît Mandelbrot**

→ Chercheurs d'hier p. 155

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Comparer des nombres

Pour comparer deux nombres a et b, on peut étudier le signe de leur différence.

- **$a \leqslant b$ équivaut à $a - b \leqslant 0$.**
- **$a \geqslant b$ équivaut à $a - b \geqslant 0$.**

1 n est un entier naturel. Comparez les nombres A et B :

$$A = n^2 - n + 1 \quad \text{et} \quad B = 3n - 3.$$

2 n est un entier naturel ($n \geqslant 2$).
Comparez $\dfrac{n}{n-1}$ et $\dfrac{n+1}{n}$.

Sens de variation d'une fonction

- f est une fonction strictement **croissante** (resp. strictement **décroissante**) sur l'intervalle I signifie que, pour a et b appartenant à I :
  si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$).
- Si f est dérivable sur l'intervalle I, et si pour tout nombre x de I, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement **croissante** (resp. strictement **décroissante**) sur l'intervalle I.
- u est une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, $u(x) \geqslant 0$.
  Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I.

3 On considère la fonction trinôme f définie pour tout nombre x par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. n est un entier naturel, $n \geqslant 2$.
Comparez $f(n)$ et $f(n + 1)$.

4 **a)** Justifiez que la fonction f définie sur $I = [1\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ est croissante sur I.
b) n étant un entier naturel non nul, comparez alors $f(n)$ et $f(n + 1)$.

5 **a)** Justifiez que la fonction f définie sur $I =]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ est strictement décroissante sur I.
b) n étant un entier naturel, $n \geqslant 2$, comparez $f(n)$ et $f(n + 1)$.

6 **a)** Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+3}$.
b) n est un entier naturel. Comparez $f(n)$ et $f(n + 1)$.

Algorithmique

- Une **boucle conditionnelle** s'arrête lorsque la condition imposée n'est plus remplie.

```
Tant que condition faire
    tâche
FinTant
```

- L'algorithme suivant permet de déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$\frac{2}{n^2} < 0{,}01.$$

```
Variable
i entier positif
Algorithme
i reçoit 1,
Tant que 2/i^2 ⩾ 0,01 faire
   i reçoit i+1
FinTant
Afficher i
```

7 **a)** Quel est le but de cet algorithme ?
b) Qu'obtiendra-t-on à l'affichage ?

```
Variable
i, u
Algorithme
i reçoit 0
u reçoit 5
Tant que u ⩾ 0,001 faire
   u reçoit u*0.2
   i reçoit i+1
FinTant
Afficher «u» i «=» u
```

8 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n, par :

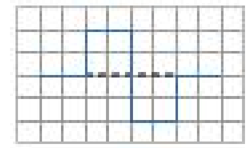
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$$

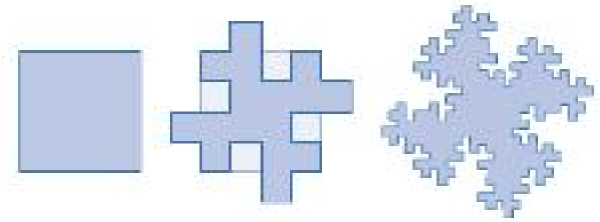
Écrivez un algorithme permettant de déterminer le 11e terme de la suite (u_n).

Voir les corrigés p. 363

Activité 1 DES « FLOCONS »

Les polygones ci-dessous sont construits successivement en utilisant le processus suivant : chaque segment est remplacé par la ligne brisée obtenue comme l'indique le schéma ci-contre (à partir du partage en quatre segments de même longueur). Le premier polygone est un carré de côté 4 cm.





1 Justifiez que l'aire de ces polygones est constante.

2 On s'intéresse dans cette question aux périmètres de ces polygones. On note p_1, p_2, p_3 les périmètres des trois premiers polygones.
a) Calculez p_1, p_2 et p_3.
b) Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Justifiez.
c) Est-il possible d'obtenir, avec ce mode de construction, un polygone dont l'aire est 16 cm² et dont le périmètre est supérieur à 15 m ? à 100 m ?

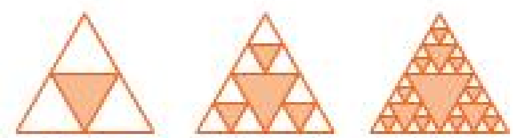
3 Le second polygone est, par construction, plus « large » que le premier (+2 cm). Le troisième est plus « large » que le second $\left(+\dfrac{1}{2}\text{ cm}\right)$, le quatrième est plus « large » que le troisième $\left(+\dfrac{1}{8}\text{ cm}\right)$, etc.
Cette « largeur » peut-elle dépasser 7 cm ? Justifiez.

Maths et nature — Les fractales

Les fractales désignent des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle.
Dans la nature, on rencontre de nombreuses formes fractales approximatives, telles ce chou romanesco.

Activité 2 LES TRIANGLES DE SIERPINSKI

Les figures ci-contre sont construites successivement en utilisant le processus suivant : à chaque étape, on construit dans chaque triangle non coloré un triangle coloré dont les sommets sont les milieux de ses côtés. Le premier triangle est équilatéral de côté 5 cm.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

1 Justifiez que, quelle que soit la figure, l'aire de chaque surface colorée ne dépasse pas $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ cm².

2 On s'intéresse dans cette question au périmètre des surfaces colorées.
a) Calculez les périmètres p_1, p_2 et p_3 des trois premières surfaces.
b) Est-il possible d'obtenir avec ce mode de construction une surface colorée dont le périmètre est supérieur à 15 m ?

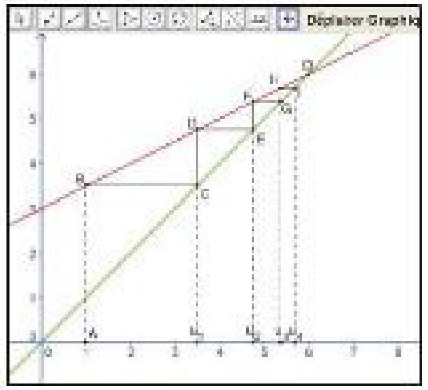
Activité 3 VARIATIONS D'UNE SUITE

TICE

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ est la fonction affine telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

L'objectif est de conjecturer le comportement des termes de la suite à partir d'une représentation graphique.



1 **a)** À l'aide de GeoGebra, créez la droite Δ d'équation $y = x$ et la droite d d'équation $y = \frac{x}{2} + 3$, qui représente la fonction f.

outil 1

Note
Vous pouvez utiliser le fichier établi dans l'exercice 35 du chapitre 5.

b) Déterminez les coordonnées du point Ω, intersection de d et Δ.

c) Créez, dans l'ordre, comme sur la vue d'écran, le point A de coordonnées $(u_0 ; 0)$ (saisissez A=(1,0)), puis les points B, C, D, E, F, G, H et I en utilisant les icônes :

pour tracer une perpendiculaire ;

pour définir un point d'intersection ;

pour créer un segment.

Aide
Après avoir construit les points, masquez les droites perpendiculaires à un des axes en décochant .
La figure sera plus lisible.

d) Sachant que toutes les droites tracées sont perpendiculaires à un des axes, justifiez que les coordonnées du point B sont $(u_0 ; u_1)$ et que celles du point C sont $(u_1 ; u_1)$.

Rappel : A est le point d'abscisse u_0.

Déduisez-en les coordonnées des points D, E, F, G, H et I.

e) Créez alors les points de l'axe des abscisses correspondants aux nombres u_1, u_2, u_3, u_4.

Pensez à utiliser l'icône , intersection entre deux objets.

2 Quelle conjecture pouvez-vous émettre concernant le comportement des termes de la suite ?

3 **a)** On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 6$.

Démontrez que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{u_n}{2}$.

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

c) Comparez deux termes consécutifs quelconques de la suite.

Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre ... Est-il plus facile ?

Antoine, Boris et Camille font du calcul mental.

Chacun choisit un nombre entier et lui applique le petit programme de calcul suivant : « Ajouter 10 à la moitié du nombre choisi ». Puis, chacun fait subir le même traitement au nombre obtenu, et ceci six fois de suite.

Antoine constate qu'il obtient des nombres de plus en plus grands. Pour Boris, au contraire, les nombres sont de plus en plus petits. Quant à Camille, il affirme que ses observations ne correspondent ni à celles d'Antoine ni à celles de Boris. Quel nombre a choisi Camille au départ ?

1 Sens de variation d'une suite

1.1 Définition

Définition 1

(u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n.

- Dire que (u_n) est **strictement croissante** signifie que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.
- Dire que (u_n) est **strictement décroissante** signifie que, pour tout entier naturel n, $u_n > u_{n+1}$.
- Dire que (u_n) est **constante** signifie que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$.

On définit de même une suite croissante ou décroissante en utilisant des inégalités au sens large.

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Exemples

- La suite (arithmétique) des nombres impairs 1, 3, 5, 7, … est strictement croissante.
- La suite (géométrique) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ de raison $\frac{1}{2}$ est strictement décroissante.

Remarque. Dans certaines situations, on étudiera la monotonie d'une suite pour des valeurs de n supérieures ou égales à une valeur donnée entière m. → *Exercice résolu A, page 149.*

Attention. Il existe des suites **non monotones**. Par exemple, la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$, qui est la suite 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; … n'est ni croissante ni décroissante.

1.2 Étude du sens de variation

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on compare, pour **tout** entier naturel n, u_{n+1} et u_n :

- soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- soit, lorsque tous les termes u_n sont **strictement positifs**, en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

En effet, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$. Étant donné que $u_n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ et $u_{n+1} - u_n$ sont de même signe ;

- soit, lorsque la suite (u_n) est définie par $(u_n) = f(n)$, en étudiant les variations de la fonction f.

Cas particulier des suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$.

Le sens de variation dépend donc du signe de r :

- si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante ;
- si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, alors (u_n) est constante.

Cas particulier des suites géométriques

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 (avec $q > 0$ et $u_0 > 0$).

Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = q^n u_0$, donc $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Le sens de variation dépend donc de la place de q par rapport à 1 :

- si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante ;
- si $1 < q$, alors (u_n) est strictement croissante ;
- si $q = 1$, alors (u_n) est constante.

1.3 Cas des suites définies par $u_n = f(n)$

Théorème 1 La suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
- **Si** f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, **alors** la suite (u_n) est strictement croissante.
- **Si** f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, **alors** la suite (u_n) est strictement décroissante.

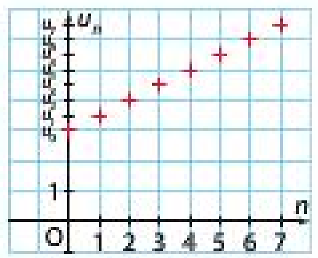
Le théorème est encore vrai pour une fonction croissante ou décroissante.

Démonstration
- Pour tout entier naturel n, $n < n+1$. La fonction f est strictement croissante, donc $f(n) < f(n+1)$. Ainsi, $u_n < u_{n+1}$: la suite (u_n) est strictement croissante.
- Pour tout entier naturel n, f étant strictement décroissante, $n < n+1$ entraîne $f(n) > f(n+1)$ et $u_n > u_{n+1}$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple. La fonction affine $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 3$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$; la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n}{2} + 3$$

est du type $u_n = f(n)$. Elle est donc strictement croissante.

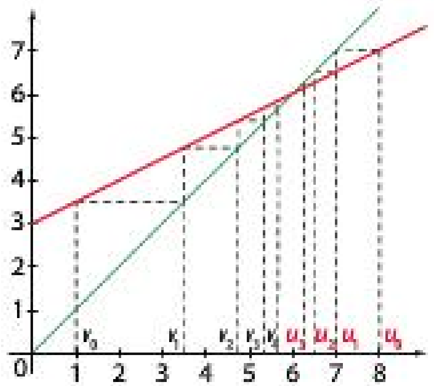


Attention. Le théorème **1** ne s'applique pas aux suites définies par récurrence. Par exemple, les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} + 3 \end{cases}$$

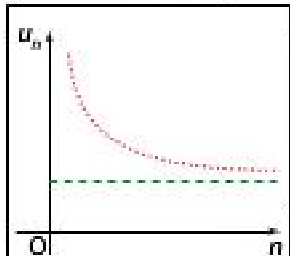
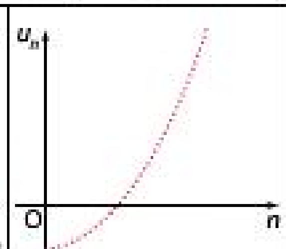
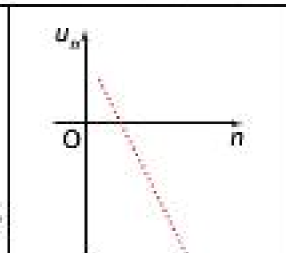
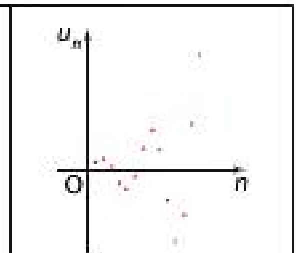
sont telles que $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction affine $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 3$, qui est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Cependant, la suite (u_n) est strictement décroissante alors que la suite (v_n) est strictement croissante.



2 Approche de la notion de limite

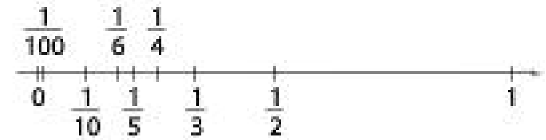
Que deviennent les nombres u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, vers « plus l'infini » ? Des exemples nous permettent de conjecturer diverses situations.

			
Les termes s'accumulent près d'un nombre fixé.	Les termes deviennent de plus en plus « grands » vers $+\infty$.	La suite tend vers $-\infty$.	Les termes se dispersent.

2.1 Exemples d'une accumulation

Observons les termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, $n \neq 0$, par $u_n = \frac{1}{n}$:

$$1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\,;\dots;\frac{1}{10}\,;\dots;\frac{1}{100}\,;\dots;\frac{1}{2011}\,;\dots;\frac{1}{10^8}\,;\dots;\frac{1}{10^{20}}\,;\dots$$

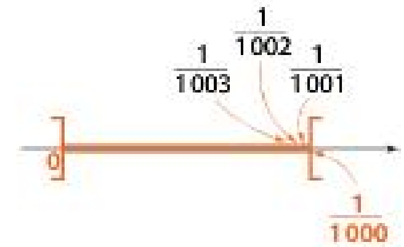


Les termes finissent par s'accumuler près de zéro.

Les termes u_n étant tous strictement positifs, plaçons-nous, par exemple, dans l'intervalle $I =]0\,;10^{-3}[$.

La suite (u_n) est strictement décroissante. Il en résulte que si un des termes de la suite se trouve dans l'intervalle I, alors tous ceux qui le « suivent », c'est-à-dire d'indice supérieur, appartiennent aussi à l'intervalle I.

Dans notre exemple, $\frac{1}{1000}$ n'appartient pas à I, mais $\frac{1}{1001}$ est élément de I et entraîne ainsi tous les termes suivants…

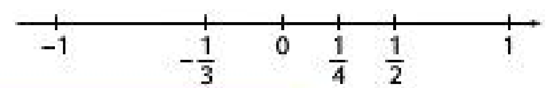


Ce phénomène est vérifié quelle que soit la longueur de l'intervalle I, aussi petite soit-elle. On dit alors que **la suite (u_n) a pour limite 0** quand n tend vers $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Observons les termes de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

$$-1\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{5}\,;\dots;\frac{1}{100}\,;\dots;-\frac{1}{225}\,;\dots;\frac{1}{10^6}\,;\dots$$



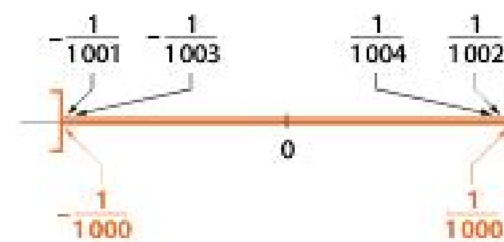
Les termes finissent par s'accumuler près de zéro.

Plaçons-nous, par exemple, dans l'intervalle J de centre 0 et de rayon 10^{-3}, soit $J =]-10^{-3}\,;10^{-3}[$.

Pour tout entier n, non nul, si $n > 1000$, alors $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ et $-\frac{1}{1000} < -\frac{1}{n} < 0$.

Les deux nombres $\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n}$ sont dans l'intervalle J :

v_n est dans l'intervalle J.



On peut donc affirmer que tous les termes d'indice n supérieur à 1 000 appartiennent à l'intervalle J.

Ce phénomène est vérifié quel que soit le rayon de l'intervalle I, aussi petit soit-il. On dit alors que **la suite (v_n) a pour limite 0** quand n tend vers $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Exemples
- Les suites définies par $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (n entier, $n \geqslant 1$) ont pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
- La suite définie par $t_n = 2 + \frac{1}{n}$ (n entier, $n \geqslant 1$) a pour limite 2 quand n tend vers $+\infty$.

2.2 Exemples d'une limite « infinie »

Observons les termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + 1$:

$1 ; 4 ; 7 ; 10 ; \dots ; 3001 ; 1071844 ; \dots ; 3000001 ; \dots$

Les termes deviennent de plus en plus grands.

Considérons, par exemple, le nombre $N = 10^6$ (un million). La suite (u_n), arithmétique et de raison 3, est strictement croissante. Il en résulte que si un des termes est supérieur à N, alors tous ceux qui le suivent (d'indice supérieur) seront aussi supérieurs à N.

Or, $3n + 1 \geqslant 10^6$ équivaut à $3n \geqslant 999\,999$ et à $n \geqslant 333\,333$.

À partir de u_{333333}, tous les termes de la suite, sauf un nombre fini (les 333 333 premiers…), sont dans l'intervalle $[N ; +\infty[$. Et ceci est vrai quel que soit le nombre N choisi. On dit alors que **la suite (u_n) a pour limite $+\infty$** quand n tend vers $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Observons les termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2v_n$. Il s'agit de la suite géométrique de premier terme -1 et de raison 2.

Ainsi, $v_n = v_0 q^n$ soit $v_n = -2^n$.

$-1 ; -2 ; -4 ; -8 ; \dots ; -1024 ; \dots ; -2^{20} ; \dots$

Les termes de la suite sont **tous négatifs** et deviennent **de plus en plus grands en valeur absolue**.

Considérons, par exemple, le nombre $M = -10^6$.

La suite (v_n) est strictement décroissante car pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n$ soit $v_{n+1} - v_n = v_n$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$.

Il en résulte que si un des termes est inférieur à M, alors tous ceux qui le suivent (d'indice supérieur) seront aussi inférieurs à M.

$-2^n < -10^6$ équivaut à $2^n > 10^6$. Or $2^{20} = 1\,048\,576$ donc $-2^{20} < -10^6$, soit $v_{20} < M$.

En remarquant que $v_{19} > M$, on peut donc affirmer que tous les termes de la suite, sauf un nombre fini (les 20 premiers…), sont dans l'intervalle $]-\infty ; -10^6]$.

Ceci est vrai quel que soit le nombre M choisi.

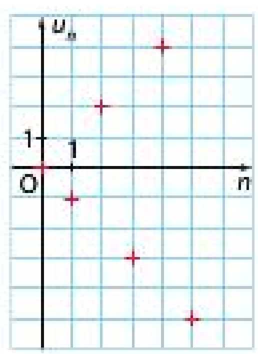
On dit alors que **la suite (v_n) a pour limite $-\infty$** quand n tend vers $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Exemples

- Les suites définies par $u_n = 2n + 3$, $v_n = n^2$ et $w_n = \sqrt{n}$ (n entier) ont pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- Les suites définies par $u_n = -2n + 3$ et $v_n = -2 \times 3^n$ (n entier) ont pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2.3 Exemple d'une « dispersion »



Observons les termes de la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n n$ et dont les premiers termes sont $0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$

- Deux termes consécutifs de la suite sont de signes contraires.
- Les termes de rang pair sont de plus en plus « grands » et tendent vers $+\infty$.
- Les termes de rang impair sont tous négatifs et deviennent de plus en plus grands en valeur absolue.

On dit alors que **la suite n'a pas de limite** quand n tend vers $+\infty$.

OBJECTIF 1 Étudier le sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :
- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- étudier le sens de variation de f pour les suites définies par $u_n = f(n)$ (voir **théorème 1**) ;
- étudier la place du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 (lorsque tous les termes sont strictement positifs).

EXERCICE RÉSOLU A Étudier la monotonie d'une suite (éventuellement à partir d'un certain rang)

Étudiez le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ **2.** $v_n = \dfrac{n}{2^n}$

Méthode

1. On reconnaît en u_n l'image de l'entier n par une fonction homographique définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- On étudie le sens de variation de f.
- On applique le théorème 1.

2. ❶ **Avec le signe de la différence**
- On conclut.

❷ **En comparant le quotient à 1**

Les termes v_n, d'indice n non nul, étant tous strictement positifs, on compare $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.
- On conclut.

Solution

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$ est définie sur $I = [0 ; +\infty[$.
- f est dérivable sur I et pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{3(x+2) - (3x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$, donc $f'(x) > 0$. Il en résulte que f est strictement croissante sur I.
- La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2. ❶ On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} - \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \dfrac{1-n}{2^{n+1}}$.
- Or, $1 - n < 0$ équivaut à $n > 1$ donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $v_{n+1} - v_n < 0$: la suite est strictement décroissante à partir du terme d'indice 2.

❷ **Autre méthode**

Pour tout entier n, $n \geqslant 1$, $v_n > 0$ et :

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n} - 1 = \dfrac{n+1}{2n} - 1 = \dfrac{1-n}{2n}$.
- Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 < 0$ pour $n > 1$ soit $n \geqslant 2$, ce qui nous amène à la même conclusion.

Mise en pratique

Pour les exercices 1 à 4

Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).

1 a) $u_n = \sqrt{n}$. b) $u_n = \dfrac{1}{5}n - 2$.

2 a) $u_0 = 2$ et, pour tout entier n non nul : $u_{n+1} = u_n - n$.

b) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$.

3 a) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

b) $u_n = (n-5)^2$.

4 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $u_n = \dfrac{3^n}{n}$.

EXERCICE RÉSOLU B Exploiter une représentation graphique

Animation

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{3}{4}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Représentez sur l'intervalle $I =]0\,;1[$ la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et construisez les points $A(u_0\,;u_1)$, $B(u_1\,;u_1)$, $C(u_1\,;u_2)$, $D(u_2\,;u_2)$ et $E(u_2\,;u_3)$.

2. Conjecturez le sens de variation de la suite.

3. Justifiez que pour tout nombre x de I, $f(x)$ appartient à I, puis prouvez votre conjecture.

4. Conjecturez le comportement de la suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes.

Méthode

1. On représente la fonction f sur l'intervalle I, puis on construit les points A, B, C, D et E.

Aide

Comme $u_1 = f(u_0)$, le point $A(u_0\,;u_1)$ appartient à l'arc de parabole précédemment tracé.
Le point $B(u_1\,;u_1)$ appartient à la droite d'équation $y = x$, droite qui permet de reporter le nombre u_1 sur l'axe des abscisses, et de même les nombres u_2, u_3, etc.

2. On lit sur les axes les premières valeurs.

3. On vérifie que si u_n appartient à l'intervalle I, u_{n+1} appartient aussi à l'intervalle I.

Aide

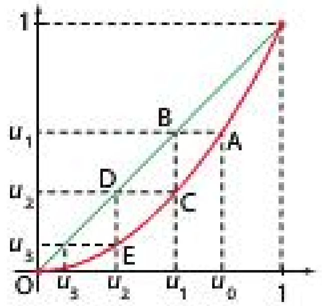
On utilise une propriété de la fonction carré pour ordonner un nombre et son carré.

• On conclut.

4. On observe sur le graphique une accumulation des abscisses u_n des points construits vers 0.

Solution

1. La fonction f est la fonction carré ; sa restriction à l'intervalle $]0\,;1[$ est l'arc de parabole (en rouge) ci-dessous.



2. $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 \ldots$ À la lecture du graphique, on peut conjecturer que la suite est strictement décroissante.

3. Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$, donc si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$ entraîne $0 < u_n^2 < u_n < 1$ et donc $u_{n+1} < u_n$.

• La suite (u_n) est donc bien strictement décroissante.

4. Graphiquement, on peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Mise en pratique

Pour les exercices 5 à 9

1. Représentez la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Utilisez cette représentation et la droite d'équation $y = x$ pour déterminer graphiquement les premiers termes de la suite.

3. Conjecturez le sens de variation et le comportement de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.

5 $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

6 $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{10}.$$

7 $u_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

8 $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n}.$$

9 $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2.$$

OBJECTIF 2 Étudier des comportements de suites à l'infini

• **Dans le cas d'une accumulation** (en L), on montre qu'à partir d'un certain indice, tous les termes de la suite appartiennent à un intervalle de centre L et de rayon choisi aussi petit que l'on veut.

• **Dans le cas d'une limite infinie**, on montre qu'à partir d'un certain indice, tous les termes de la suite : • dépassent un nombre choisi aussi grand que l'on veut lorsque la limite est $+\infty$;
• ne dépassent pas un nombre choisi aussi « petit » que l'on veut lorsque la limite est $-\infty$.

EXERCICE RÉSOLU C Cas d'une accumulation

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n}$.

1. Démontrez que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier n non nul, $u_n > \frac{1}{2}$.

2. Prouvez qu'à partir d'un certain entier m, que vous préciserez, tous les termes d'indice n avec $n > m$, sont dans l'intervalle $I =]0{,}49\,;0{,}51[$.

Méthode

1. On étudie le sens de variation de la suite (u_n).

Remarque Les trois méthodes conviennent.

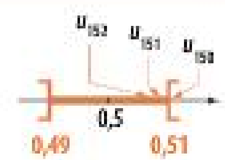
• On applique le théorème **1**.

• On compare u_n et $\frac{1}{2}$ en étudiant le signe de leur différence.

2. On cherche le plus petit indice m tel que :
$$0{,}49 < u_m < 0{,}51.$$

Aide

La suite étant décroissante et tous les termes étant supérieurs à 0,5, on détermine le premier terme de la suite appartenant à l'intervalle I, et les « suivants » seront aussi dans I.



Solution

1. $u_n = f(n)$ où f est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{3}{2x}$ définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{3}{2x^2}$ donc $f'(x) < 0$.

• f est donc décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et la suite (u_n) est aussi décroissante.

• Pour tout entier n, $n > 0$, $u_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2n}$.
On a donc $u_n - \frac{1}{2} > 0$ soit $u_n > \frac{1}{2}$.

2. $0{,}49 < \frac{1}{2} + \frac{3}{2m} < 0{,}51$ équivaut à $-\frac{1}{100} < \frac{3}{2m} < \frac{1}{100}$. Comme $m > 0$, pour que ces conditions soient vérifiées, il suffit que $\frac{3}{2m} < 100$, soit $m > 150$. Ainsi $m = 151$ est solution et tous les termes d'indice n, avec $n \geqslant 151$ sont dans l'intervalle I.

Mise en pratique

Pour les exercices 10 à 15

La suite (u_n) a pour limite L quand n tend vers $+\infty$. Trouvez (éventuellement à la calculatrice) un indice m tel que, lorsque $n > m$, les termes u_n appartiennent à l'intervalle I proposé.

10 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, L = 0 et $I =]0\,;10^{-4}[$.

11 $u_n = \frac{1}{n+5}$, L = 0 et $I =]0\,;10^{-5}[$.

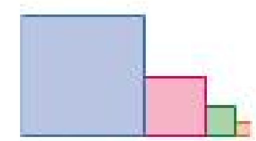
12 $u_n = \frac{2}{n^2}$, L = 0 et $I =]0\,;10^{-6}[$.

13 $u_n = \frac{-5}{2n+1}$, L = 0 et $I =]-10^{-4}\,;0[$.

14 $u_n = \frac{-1}{3^n}$, L = 0 et $I =]-10^{-6}\,;10^{-6}[$.

15 $u_n = 3 + \frac{1}{n}$, L = 3 et $I =]3 - 10^{-4}\,;3 + 10^{-4}[$.

16 On passe d'un carré à l'autre en divisant la longueur du côté par 2. Le premier carré étant d'aire 25 cm², combien mesure le côté du premier carré dont l'aire est inférieure à 1 mm² ?



EXERCICE RÉSOLU D Cas d'une limite infinie

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{2n+1}$.

1. Démontrez que pour tout n, $u_n > 0$ et que la suite (u_n) est croissante.

2. a) Quel est le plus petit entier m tel que $u_m \geqslant 10^5$?

b) Déduisez-en que pour tout nombre entier n, $n > m$, $u_n \in [10^5\,;+\infty[$.

3. Reprenez la question **2** en remplaçant 10^5 par un nombre positif quelconque A.

Méthode

1. On démontre que pour tout n, $u_n > 0$.

• On utilise le sens de variation de la fonction associée (théorème 1).

2. a) On est ramené à résoudre une inéquation.

b) On exploite les résultats de la question 1.

3. On reprend la question 2.

Solution

1. Pour tout n, $2n + 1 > 0$, donc $u_n > 0$.

• La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ avec $x \geqslant -\frac{1}{2}$ est associée à la suite (u_n).
La fonction $g : x \mapsto 2x + 1$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, il en est donc de même de la fonction f. Il en résulte que la suite (u_n) est croissante.

2. a) $\sqrt{2m+1} \geqslant 10^5$ équivaut à $2m + 1 \geqslant 10^{10}$ et à $m \geqslant 5 \times 10^9 - \frac{1}{2}$.
Le plus petit entier solution est $m = 5 \times 10^9$.

b) La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > m$, $u_n > u_m \geqslant 10^5$. Il en résulte que $u_n \in [10^5\,;+\infty[$.

3. $\sqrt{2m+1} \geqslant \mathrm{A}$ équivaut à $m \geqslant \frac{\mathrm{A}^2-1}{2}$.
On choisit pour m le premier entier supérieur ou égal à $\frac{\mathrm{A}^2-1}{2}$.
De plus, la suite est croissante ; ainsi, pour tout entier n, tel que $n \geqslant m$, $u_n \geqslant u_m \geqslant \mathrm{A}$, donc $u_n \in [\mathrm{A}\,;+\infty[$.

Mise en pratique

17 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :
$$u_n = \frac{2-n}{3}.$$

1. a) Démontrez que :
pour tout $n \geqslant 3$, $u_n < 0$.

b) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.

2. a) Quel est le plus petit entier m pour lequel $u_m \leqslant -10^5$?

b) Déduisez-en que pour tout entier n, $n \geqslant m$, $u_n \in]-\infty\,;-10^5]$.

3. Est-il vrai que pour tout nombre A négatif aussi grand soit-il en valeur absolue, l'intervalle $]-\infty\,;\mathrm{A}]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice ?

18 Dans chacun des cas suivants :
• démontrez que (u_n) est strictement croissante ;
• trouvez un indice m tel que, lorsque $n \geqslant m$, les termes u_n appartiennent à l'intervalle I proposé.

a) $u_n = \frac{2}{3}n^2$ et $\mathrm{I} = [10^6\,;+\infty[$.

b) $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$ et $\mathrm{I} = [10^5\,;+\infty[$.

19 (u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = -2 \times 5^n$.

1. Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 0$ et que la suite (u_n) est décroissante.

2. Trouvez un indice m tel que, pour tout entier n tel que $n \geqslant m$, les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;-10^6]$.

Pour se tester

Exercices interactifs

20 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) Dire qu'une suite (u_n) est croissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est ……

b) Une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$ est une suite ……

c) La suite (v_n) est telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$, avec f décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
La suite (v_n) est ……

d) Tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs. Si, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est ……

21 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

a) La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 1$ est croissante.

b) La suite définie pour tout entier naturel n, $n \neq 0$, par $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ est monotone.

c) Si une suite est strictement croissante, alors ses termes finissent par être supérieurs à n'importe quel nombre choisi.

d) Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite définie par $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, est croissante.

e) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{3} + 1$.
La suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

22 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. La suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{2n-1}{n}$ est :
a) croissante b) décroissante
c) constante d) non monotone

2. La suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -2u_n + 5$ est :
a) croissante b) décroissante
c) constante d) non monotone

3. (u_n) est une suite croissante et (v_n) est la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 3$.
La suite (v_n) est :
a) croissante b) décroissante
c) constante d) non monotone

4. (u_n) est une suite décroissante et (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = 2u_n + 7$. La suite (v_n) est :
a) croissante b) décroissante
c) constante d) non monotone

5. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.
a) (u_n) est décroissante. b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1}$
c) Pour tout entier $n \geqslant 63$, $u_n > 2011$.

23 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. La suite définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = n^2 - 5n + 8$ est :
a) croissante
b) décroissante
c) croissante à partir d'un certain rang
d) non monotone

2. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$.
a) (u_n) est décroissante.
b) Pour tout $n > 10$, $u_n \in]0\,;0{,}01[$.
c) Il existe $n > 10$ tel que $u_n > 0{,}01$.

3. La suite (u_n) est strictement croissante et $u_0 = 1$. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
a) Pour tout n, $u_n > 0$.
b) Pour tout n, $v_n > n$.
c) (v_n) est strictement croissante.
d) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

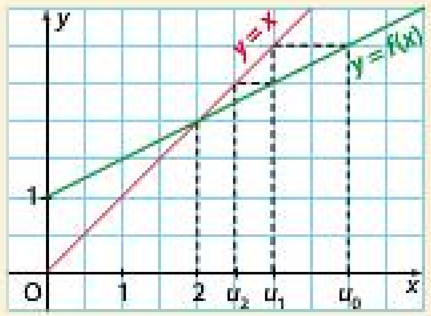
24 **Étude d'une suite définie par récurrence**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

Objectif Étudier la suite (u_n), c'est-à-dire son sens de variation et son comportement lorsque n devient très grand.

Dans l'étude d'une suite définie par récurrence, il est souvent utile de représenter graphiquement les premiers termes. Cela est fait sur la figure ci-après. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ est la fonction affine associée à la suite (u_n) : $u_{n+1} = f(u_n)$.

→ *activité 3, page 144, et exercice résolu B, page 150.*



Cette figure permet de conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et que les termes semblent s'accumuler vers 2. D'où l'idée d'étudier la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$.

1. a) Calculez v_0 et prouvez que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Exprimez v_n en fonction de n.

c) Quel est le sens de variation de (v_n) ? Justifiez votre réponse.

2. a) Déduisez des questions précédentes le sens de variation de (u_n) et l'expression de u_n en fonction de n.

b) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n > 2$?

c) Déterminez un entier naturel m tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant m$, $u_n \in]2 ; 2{,}0001[$.

Commentaire

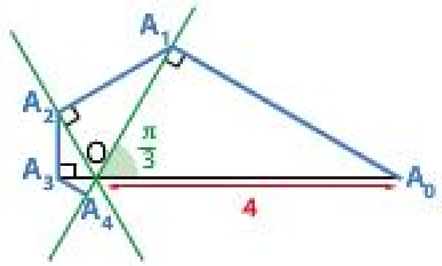
On considère les suites récurrentes définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = au_n + b \ (a \neq 0 \text{ et } a \neq 1).$$

Elles sont du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction affine $x \mapsto ax + b$.
Pour étudier ces suites, on utilise la suite auxiliaire définie par $v_n = u_n - \alpha$, où α est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

25 **Étude d'une ligne brisée**

Les droites passant par le point O font, deux à deux, des angles de $\frac{\pi}{3}$, et la mesure OA_0 est égale à 4.



Objectif Étudier l'évolution de la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_n$ lorsque n devient très grand.

1. Tirons des conséquences immédiates de la figure.
Chacun des segments $[A_nA_{n+1}]$ forme avec le point O un demi-triangle équilatéral.
Pour simplifier la rédaction, on note d_n la distance A_nA_{n+1}.

a) Précisez les propriétés communes à ces triangles et déduisez-en que $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$.

b) Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

c) Calculez d_0, et pour tout entier naturel n, exprimez d_n en fonction de n.

2. Notons u_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_n$.
Pour tout n, $u_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1}$.
Le problème est donc d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n devient très grand.

a) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

b) Vérifiez que u_n peut s'écrire :

$$u_n = d_0\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

c) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

3. Cette expression du terme u_n contient une partie variable : $\frac{1}{2^n}$. On admet que cette expression peut être rendue aussi proche que l'on veut de 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

a) Justifiez que, pour tout entier naturel n, $u_n < 4\sqrt{3}$.

b) Comment se comporte la longueur u_n lorsque n devient très grand ? Concluez.

Narration de recherche

→ **L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.**

26 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)}{n}.$$

Étudiez ses variations et son comportement quand n devient de plus en plus grand.

27 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

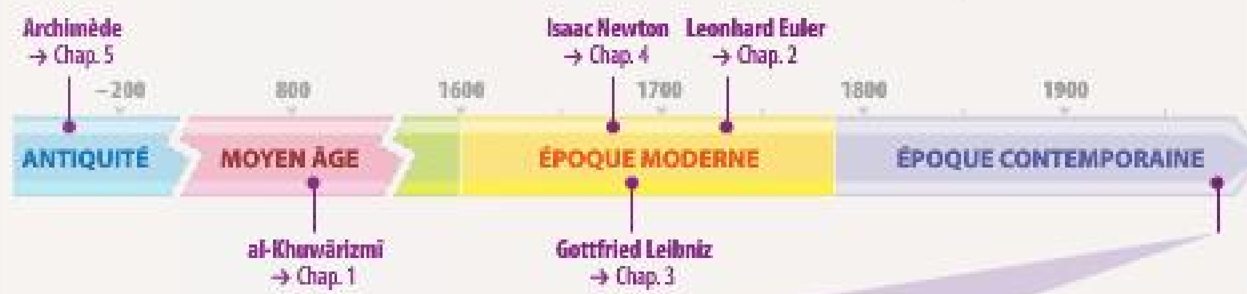
$$u_n = \frac{1 + n}{1 + n + n^2 + n^3}.$$

Étudiez ses variations et son comportement quand n devient de plus en plus grand.

Chercheurs d'hier

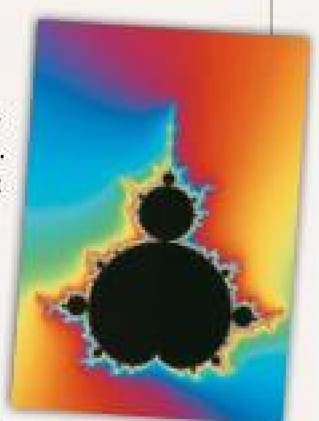
Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ **Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.**



Benoît Mandelbrot
(1924-2010)

Ayant quitté avec sa famille la Pologne en 1936, il s'installe en France et est initié aux mathématiques par un oncle professeur au Collège de France, à Paris. Ce mathématicien est surtout connu pour ses travaux sur les fractales, figures géométriques qui se reproduisent « à l'infini ».
Installé aux États-Unis après la guerre, il utilise l'outil informatique pour obtenir à l'aide des fractales des images spectaculaires.
Cette technique est utilisée dans la production cinématographique pour réaliser des effets spéciaux.



▲ **Sa création emblématique : l'ensemble de Mandelbrot.**

Sur le Web http://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness.htm

Utiliser les outils de calcul

→ Pour étudier le comportement d'une suite

TP 28 Une approche du nombre d'or

1. On considère la suite (u_n), dite de Fibonacci, définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = u_1 + u_0 = 2$, $u_3 = u_2 + u_1 = 3$, et pour tout entier naturel n, par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

a) Calculez u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}.

b) Conjecturez le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement pour les grandes valeurs de n.

2. On considère maintenant la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Calculez v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et placez sur une droite graduée (unité 5 cm) les points ayant pour abscisses les premières valeurs v_0, v_1, etc.

b) Conjecturez le comportement de la suite (v_n).

Histoire des Maths — Fibonacci

Léonard de Pise (env. 1180-env. 1250), dit Fibonacci.

Né à Pise, fils d'un commerçant toscan, ce mathématicien italien émigre en Algérie, voyage en Égypte, Sicile, Grèce et Syrie. Deux ans après son retour en Italie vers 1200, il introduit une suite, qui gardera son nom, pour résoudre un problème de reproduction de lapins.

3. Utiliser un tableur

a) • Renseignez les cellules A2 à A4. Recopiez la formule de la cellule A4=A2+A3 vers le bas pour obtenir les premiers termes de la suite (u_n).
• Dans la cellule B2, entrez : =A3/A2, et étirez cette formule vers le bas pour obtenir les premiers termes de la suite (v_n).

	A	B
1	Un	Vn
2	1	=A3/A2
3	1	=A4/A3
4	=A2+A3	=A5/A4
5	=A3+A4	=A6/A5

Note

Paramétrez le nombre maximal de décimales à l'affichage (menu Format ; menu Cellules… ; onglet Nombres).

b) Vos conjectures sont-elles confirmées ?

4. Utiliser sa calculatrice

L'algorithme suivant a pour objectif de déterminer les valeurs des n premiers termes de la suite (v_n).

a) Complétez le tableau suivant indiquant les valeurs des variables a, b, c et v suivant les premières valeurs de i.

i	a	b	c	v
	1	1		1
1				
2				
3				

```
Variable
i, n, a, b, c, v
Algorithme
Saisir n
a reçoit 1
b reçoit 1
v reçoit 1
Pour i de 1 jusqu'à n
    c reçoit a+b
    a reçoit b
    b reçoit c
    v reçoit b/a
  AFFICHER «v» i «=» v
  Fin Pour
```

b) Quel est l'objectif des quatre lignes encadrées ?

c) Utilisez cet algorithme pour programmer votre calculatrice.

Note

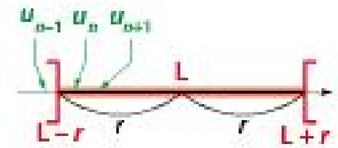
On peut démontrer que la suite (v_n) tend vers le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé nombre d'or, lorsque n tend vers $+\infty$. Le nombre d'or est une grandeur à laquelle on a attribué, au cours des siècles, des propriétés esthétiques voire mystiques. On l'a ainsi « cherché » dans des domaines aussi variés que l'architecture, la peinture, la musique, mais aussi dans des éléments naturels comme la fleur de tournesol ou le nautile.

Utiliser Algobox

→ Pour étudier le comportement d'une suite

TP 29 Au voisinage de la limite

Dans de nombreuses situations, on est amené à conjecturer que les termes d'une suite sont de plus en plus près d'un nombre fixé (que l'on appellera limite de la suite).
L'algorithme ci-dessous a pour objectif de déterminer à partir de quel indice n les termes d'une suite monotone de limite L sont dans l'intervalle $]L - r ; L + r[$, où r est un nombre strictement positif choisi par l'utilisateur.



La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} + 1 \end{cases}$

On admet que cette suite est croissante et tend vers L = 3 quand n tend vers $+\infty$ (vous pouvez le vérifier graphiquement).
L'algorithme ci-dessous a été écrit avec AlgoBox.

outil 14

```
1   VARIABLES
2     [illegible] EST_DU_TYPE NOMBRE
3     [illegible]
4     [illegible] EST_DU_TYPE NOMBRE
5     [illegible]
6   DEBUT_ALGORITHME
7     [illegible] PREND_LA_VALEUR 1
8     [illegible]
9     LIRE [illegible]
10    [illegible]
11    TANT_QUE [illegible] FAIRE
12      DEBUT_TANT_QUE
13      [illegible]
14      [illegible] PREND_LA_VALEUR [illegible]
15      [illegible]
16    AFFICHER [illegible]
17    AFFICHER [illegible]
18    AFFICHER [illegible]
19  FIN_ALGORITHME
20
21  Fonction numérique utilisée :
22  [illegible]
```

a) À quelle ligne précise-t-on la valeur du premier terme u_0 ?

b) Quel est le rôle de la fonction qui apparaît à la ligne 22 ?

c) Les lignes 11 à 15 correspondent à une boucle conditionnelle. Quel est le test qui conditionne le fonctionnement de cette boucle ?

d) À quelles actions correspondent les lignes 13 et 14 ?

e) Utilisez cet algorithme avec AlgoBox ou programmez-le sur votre calculatrice afin de préciser à partir de quel indice n, u_n appartient à l'intervalle : • $]2{,}99 ; 3{,}01[$; • $]2{,}9998 ; 3{,}0002[$; • $]3 - 10^{-6} ; 3 + 10^{-6}[$.

Aide Dans chacun des cas, commencez par indiquer r.

f) Comment modifier cet algorithme pour faire une étude équivalente avec la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$$

On admet que cette suite est décroissante et tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$ (vous pouvez le vérifier graphiquement).

EXERCICES

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

Pour les exercices 30 à 33
Calculez les cinq premiers termes de la suite. Quelle conjecture concernant son sens de variation pouvez-vous émettre ?

30 $u_n = 5 + n$.

31 $u_n = 1 - 2n$.

32 $u_n = \frac{1}{2n}$ (avec $n > 0$).

33 $u_0 = -2$ et pour tout n, $u_{n+1} = -2u_n$.

Pour les exercices 34 à 37
Conjecturez le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

34 $u_n = \frac{1}{n+1}$.

35 $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ (avec $n > 0$).

36 $u_n = 3 - \frac{1}{n}$ (avec $n > 0$).

37 $u_n = 1 - 2n$.

Pour les exercices 38 et 39
Donnez un indice m à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle I (on ne demande pas le plus petit indice m).

38 $u_n = \frac{1}{5n}$ et $I =]0 ; 0{,}001[$.

39 $u_n = n^2 + n$ et $I = [10\,000 ; +\infty[$.

SENS DE VARIATION

40 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = n^2 - 9n - 20.$$

1. Calculez u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. Que remarquez-vous ?

2. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) :

a) en utilisant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n > 4$;

b) en étudiant les variations de la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 9x - 20$.

41 La suite (v_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 5$ par :

$$v_n = n^2 - 10n + 26.$$

Exprimez $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n. Démontrez que la suite (v_n) est strictement croissante.

42 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n.$$

1. Étudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 54x$.

2. Déduisez-en que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 9.

43 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 3 + \frac{2}{n^2}.$$

1. Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x^2}.$$

2. Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n).

44 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \frac{1{,}1^n}{n^2}.$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4. Que remarquez-vous ?

2. Calculez $u_{n+1} - u_n$ et déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n) pour $n \geqslant 21$.

45 Implication réciproque LOGIQUE

f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$.
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $(u_n) = f(n)$. D'après le théorème 1 page 146 :

Si f est croissante, **alors** (u_n) est croissante.

1. Énoncez l'implication réciproque.

2. À l'aide d'un graphique, vérifiez qu'elle est fausse.

46 Avec la calculatrice

1. Choisissez un nombre a strictement supérieur à 1.
À l'aide de votre calculatrice, calculez les premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Que pouvez-vous conjecturer ?

2. Recommencez avec un nombre a tel que $0 < a < 1$. Que constatez-vous ?

COMPORTEMENTS DE SUITES

47 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

1. Précisez le sens de variation de la suite (u_n).

2. Existe-t-il des termes de la suite supérieurs à 2011 ? à 1 000 000 ?

48 La balle aux bonds ALGORITHMIQUE

On lâche une balle d'une hauteur de deux mètres.
À chaque rebond, la balle perd 10 % de sa hauteur.
Complétez l'algorithme suivant, écrit avec AlgoBox, afin de déterminer le nombre (minimum) de rebonds à l'issue desquels la hauteur du rebond de la balle sera inférieure à dix centimètres.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  h PREND_LA_VALEUR 200
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (h ......... ) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    h PREND_LA_VALEUR .......
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

49 Vrai ou faux ?

La suite (u_n) est définie pour tout entier n, $n > 0$, par :

$$u_n = 2 - \frac{1}{n^2}.$$

Est-il vrai que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n < 1{,}999\,999$? Justifiez votre réponse.

50 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2n+1}{n+3}.$$

1. Vérifiez que les deux suites sont strictement croissantes.

2. Prouvez qu'à partir d'un certain entier m, que vous préciserez, tous les termes d'indice n de la suite (u_n), avec $n \geqslant m$, sont dans l'intervalle $I = [10\,000 ; +\infty[$.

3. Prouvez que tous les termes de la suite (v_n) sont inférieurs à 2.

Pour les exercices 51 à 54
La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Trouvez (éventuellement à la calculatrice) un indice m tel que, lorsque $n \geqslant m$, les termes u_n appartiennent à l'intervalle I proposé.

51 $u_n = \frac{3n^2}{2}$; limite : $+\infty$; $I = [10^8 ; +\infty[$.

52 $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$; limite : $+\infty$; $I = [10^5 ; +\infty[$.

53 $u_n = \frac{1-n}{5}$; limite : $-\infty$; $I =]-\infty ; -10^3]$.

54 $u_n = \sqrt{2n+1}$; limite : $+\infty$; $I = [10^4 ; +\infty[$.

Pour les exercices 55 à 57
Vérifiez que la suite (u_n) est monotone et que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle I proposé.

55 $u_n = \frac{2}{n+1}$ et $I =]0 ; 2]$.

56 $u_n = \frac{1-3n^2}{n^2}$ (avec $n > 0$) et $I =]-3 ; -2]$.

57 $u_n = 5 - \frac{1}{n^2}$ (avec $n \geqslant 1$) et $I = [4 ; 5[$.

58 Les suites (v_n) et (w_n) sont définies, pour tout entier naturel n, respectivement par $v_n = n^2$ et $w_n = 10n$.

1. Calculez les cinq premiers termes de chacune de ces suites. Que conjecturez-vous ? Démontrez-le.

2. À partir de quel indice N_1, a-t-on $v_n > 10\,000$?
À partir de quel indice N_2, a-t-on $w_n > 10\,000$?

3. N_1 étant inférieur à N_2, on peut traduire cela par l'expression suivante : la suite (v_n) atteint « la première » le nombre 10 000.
Est-ce encore vrai pour le nombre 1 000 000 ? pour tout nombre supérieur à 10^p, p étant un entier naturel ?

59 Verre teinté

Une plaque de verre teinté atténue de 15 % l'intensité lumineuse d'un rayon qui la traverse.
On note i_0 l'intensité d'un rayon lumineux à l'entrée de la plaque et i_1 son intensité à la sortie.

1. Exprimez i_1 en fonction de i_0.

2. On superpose cinq plaques identiques. On note i_5 l'intensité d'un rayon à la sortie.
Exprimez i_5 en fonction de i_0.

3. Combien de plaques doit-on superposer (au minimum) pour que l'intensité soit atténuée de 90 % ?

60 Mathématiques et gourmandise

Stéphane adore la galette. Il en achète une et, arrivé chez lui, il en prend une bonne part (la moitié). Après s'être régalé, il ne résiste pas à l'envie d'en reprendre une part (la moitié de ce qui reste).
Et la gourmandise aidant, il répète ceci plusieurs fois.
Il est aussi friand de mathématiques et, en présence d'une toute petite part restante de galette, il note :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\right) = 1,$$

ce qui correspond aux cinq parts qu'il a mangées et à la part qui reste et qui représente $\frac{1}{32}$ de la galette initiale.
Il résume la situation en notant :
En cinq passages, j'ai mangé $\frac{31}{32}$ de la galette.

1. Quelle fraction de la galette mangerait-il en dix passages ? en quinze passages ?
On note u_n la fraction correspondant à n passages, n étant un entier naturel non nul.

2. Exprimez u_n en fonction de n.

3. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Pourquoi les termes de cette suite ne dépasseront-ils jamais 1 ?

5. Déterminez le nombre de passages (virtuels) à effectuer pour que le reste soit inférieur à 1/1 000 000 de la galette initiale.

61 Construction d'un aéroport

La population d'une ville est de 100 000 habitants en 2011. Suite à la création d'un aéroport sur une zone très proche de la ville, on émet l'hypothèse que la population de cette ville va régulièrement diminuer de 5 % par an.
On note u_1 la population en 2011, u_2 la population en 2012, etc.

1. Exprimez u_2 en fonction de u_1.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminez en quelle année la population de cette ville sera inférieure, pour la première fois, à 50 000 habitants.

62 La population d'une ville augmente de 10 % par an. En combien d'années double-t-elle ? Peut-on envisager que, sous cette hypothèse, elle soit un jour multipliée par dix ?

63 Deux entreprises

1. La production annuelle d'une entreprise spécialisée dans la fabrication de phares de plongée augmente régulièrement d'une même quantité. On note P_n la production de la n-ième année.
La production P_6 de la 6^e année est de 14 000 unités, et la somme des productions des six premières années est de 66 000 unités.

a) Calculez P_1 ainsi que l'augmentation annuelle de la production.

b) Quelle est la nature de la suite (P_n) ?

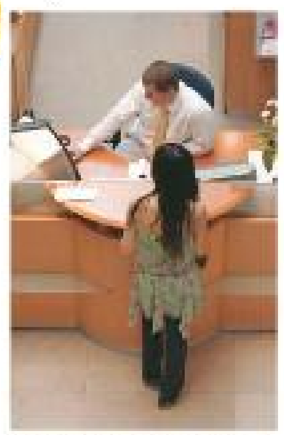
c) Si la politique de production reste la même, au bout de combien d'années la production dépassera-t-elle le double de la production P_1 ?

2. Dans une seconde entreprise, la production de la 1re année a été de 50 000 unités. La production augmente régulièrement de 10 % par an.
On note Q_n la production de la n-ième année.

a) Calculez Q_5.

b) Si la politique de production reste la même, au bout de combien d'années la production annuelle dépassera-t-elle le double de la production Q_1 ?

64 Deux placements



Valentine et Léonie ont ouvert, chacune, un Livret Jeune pour y placer leurs économies. Les intérêts annuels de 5 % sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts.

1. Valentine a placé une somme u_0.
On note u_n le capital qu'elle obtiendra après n années.
Elle a calculé qu'au bout de cinq ans, son capital u_5 sera, au centime près, de 510,51 €.

a) Quel était le capital u_0 placé au départ ?

b) Combien d'années doit-elle laisser son argent sur son livret afin que le capital initial soit doublé ?

2. Léonie a versé 100 € en janvier 2010. Elle verse ensuite tous les ans, en janvier, 30 € sur son livret.
On note v_n le capital qu'elle obtiendra après n années.

a) Justifiez que pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n \times 1{,}05 + 30$.

b) Quel sera son capital en janvier 2015 ?

c) À quelle date son capital dépassera-t-il 500 € ?

65 En biologie

Une étude du processus d'élimination du principe actif d'un médicament a permis d'observer qu'à chaque heure écoulée, la quantité de principe actif encore présente dans le sang du patient est réduite de moitié.
On injecte dans le sang d'un patient une dose de médicament contenant 4 milligrammes de principe actif.
On note q_0 la quantité initiale de principe actif et q_n la quantité encore présente au bout de n heures.

1. Exprimez q_n en fonction de n.

2. Calculez le nombre d'heures nécessaires à l'élimination de 99 % du principe actif du médicament.

66 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul n, par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}.$$

1. Calculez u_2, u_3, u_4.

2. Quelle conjecture faites-vous pour u_n ?

3. On suppose que cette conjecture est vérifiée jusqu'à l'indice n.
Est-elle encore vraie à l'indice $n + 1$?

AVEC LES TICE

67 Une approximation « rapide »

1. Expérimenter

a) À l'aide d'un tableur, calculez (avec six décimales) les trente premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1{,}001^n$.

	A	B
1	0	=(1,001)^A1
2	1	=(1,001)^A2

b) Conjecturez le sens de variation de la suite (u_n).

c) Observez les premières décimales de chacun des termes. Quelle propriété semble avoir la suite des troncatures à 0,001 près des termes de (u_n) ? On note (v_n) cette suite.

2. Démontrer

a) Démontrez la propriété conjecturée à la question b).

b) Exprimez la suite (v_n) en fonction de n et faites afficher les trente premiers termes dans la colonne C.

3. Reprenez l'exercice avec $u_n = 1{,}002^n$.

4. Sans outil de calcul, donnez une valeur approchée de $1{,}004^{15}$ à 0,01 près.

ROC Restitution organisée de connaissances

68 Monotonie d'une suite

Prérequis :
Dire qu'une suite (u_n) est strictement croissante signifie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.

1. Démonstration
(u_n) est une suite à termes strictement positifs. Prouvez que si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Application

a) Énoncez la propriété pour une suite strictement décroissante.

b) Étudiez le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies respectivement, pour tout entier naturel n, par :

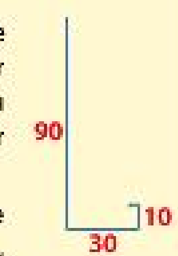
- $u_n = 2^n$;
- $v_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^n}$.

Prendre toutes les initiatives

69 Que peut-on conjecturer pour la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} \end{cases} ?$$

70 Une ligne brisée est constituée de segments. Chacun d'eux a pour longueur le tiers de la longueur du segment précédent. Le premier mesure 90 centimètres.



1. Quelle longueur, au micromètre près, est nécessaire à la construction, de cette manière, d'une ligne brisée constituée de dix segments ?

2. Peut-on atteindre une longueur supérieure à 1,5 mètre ?

Approfondissement

Compléments numériques

71 **Proches de zéro** ALGORITHMIQUE

1. Montrez que la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{1}{2^n}$ est décroissante.

2. On conjecture aisément que les nombres positifs $\frac{1}{2^n}$ s'approchent aussi près que l'on veut du nombre 0.

Pour conforter cette intuition, créez un algorithme (en vous inspirant de celui de l'exercice **29**) pour déterminer l'indice du premier terme de la suite (u_n) qui appartient à un intervalle de la forme $]0\,;\,r[$ où r est un nombre positif que l'on choisira (de plus en plus petit).

3. Programmez ainsi votre calculatrice afin de déterminer l'indice n à partir duquel $\frac{1}{2^n} < 10^{-8}$.

72 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies respectivement, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{3n-1}{n+1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculez les cinq premiers termes de chaque suite. Que pouvez-vous conjecturer concernant leur sens de variation ?

2. On admet que pour des valeurs de n de plus en plus grandes, u_n et v_n sont de plus en plus proches du nombre 3.

Remarque
Vous pouvez le vérifier à l'aide d'un tableur ou de représentations graphiques.

On veut comparer les « façons » d'approcher le nombre 3 par chacune des suites.

Pour cela on note, pour tout entier naturel n :

$$U_n = 3 - u_n \text{ et } V_n = 3 - v_n.$$

Les nombres U_n et V_n sont les « distances » respectivement de u_n et v_n au nombre 3.

a) Exprimez U_n en fonction de n.

b) Exprimez V_{n+1} en fonction de V_n. Déduisez-en la nature de la suite (V_n) puis exprimez V_n en fonction de n.

c) Pour chacune des suites (U_n) et (V_n), déterminez l'indice du premier terme qui appartient à l'intervalle $]0\,;\,10^{-6}[$.

Aide Utilisez votre calculatrice ou un tableur pour la suite (V_n).

d) Reprenez la question précédente avec l'intervalle $]0\,;\,10^{-16}[$. Que constatez-vous ? Quelle conjecture faites-vous concernant la « vitesse d'approche » du nombre 3 de ces deux suites ?

Aide
L'algorithme de l'exercice **29** a pour objectif d'étudier la façon d'approcher le nombre 3 par la suite (u_n).

73 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par :

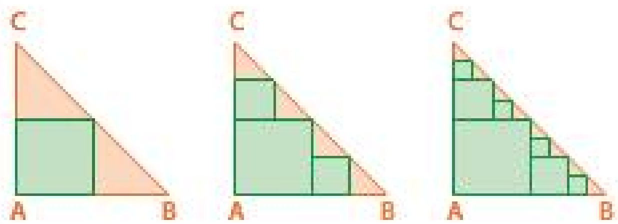
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3.

2. Que pouvez-vous conjecturer à propos des variations de la suite (u_n) ?

3. Exprimez u_{n+3} en fonction de u_n. Concluez.

74 ABC est un triangle rectangle isocèle.
AB = AC = 2 cm. On construit des carrés de la manière suivante :



• **1^{re} étape** : on construit un premier carré dont trois sommets sont les milieux des côtés du triangle.

• **2^e étape** : dans les triangles isocèles « restants », on construit des carrés selon le même principe.

On note u_n l'aire, en cm², de l'ensemble des carrés verts que l'on vient de construire pendant cette n-ième étape.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2. Expliquez pourquoi la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$v_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

est croissante, et pourquoi, quel que soit n, $v_n < 2$.

3. Au bout de combien d'étapes l'aire de la partie orangée sera-t-elle inférieure à 0,1 mm² ?

75 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 2^n - 40n - 20$.

1. a) Démontrez que la suite est croissante à partir du rang 6.

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 9$, alors $u_n > 0$.

2. On note (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n - 20n^2$.

a) Démontrez que $v_{n+1} - v_n = u_n$.

b) Déduisez-en le sens de variation de (v_n).

c) À partir de quel rang a-t-on $v_n \geqslant 0$?

76 **Datation au carbone 14**

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles (k entier).

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

a) Exprimez N_1 en fonction de N_0, puis N_k en fonction de N_{k-1}.

b) Déduisez-en la nature de la suite (N_n) et exprimez N_n en fonction de N_0 et de n.

c) Donnez, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_n).

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants : à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse, pris comme témoin.

À l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), calculez l'âge de ces fragments.

On arrondira au siècle près.

77 **Vers l'infini** ALGORITHMIQUE

a) Montrez que la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2^n - n$ est croissante.

b) On conjecture aisément que les nombres positifs $2^n - n$ deviennent de plus en plus « grands » et finissent par être supérieurs à n'importe quel nombre choisi, aussi « grand » soit-il.

Pour conforter cette intuition, créez un algorithme pour déterminer l'indice du premier terme de la suite (u_n) qui appartient à un intervalle de la forme $[A\,;\,+\infty[$ où A est un nombre que l'on choisira (de plus en plus « grand »).

Aide Vous pouvez vous inspirer de l'algorithme de l'exercice **29**.

AVEC LES TICE

78 **Méthode de Héron** TICE

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. a) À l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n) (faites afficher le maximum de décimales).

	A
1	1
2	=(1/2)*(A1+2/A1)

b) Que pouvez-vous conjecturer ?

2. Modifiez le contenu de la cellule A2 afin d'obtenir les premiers termes de la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) \end{cases}.$$

	A
1	1
2	=(1/2)*(A1+3/A1)

a) Que pouvez-vous conjecturer ?

b) Remplacez u_0 par un nombre strictement positif autre que 1. Cela modifie-t-il le comportement des suites précédemment étudiées ?

3. Quelle modification devez-vous effectuer pour obtenir une suite de nombres qui tendent vers $\sqrt{5}$?

Prendre toutes les initiatives

79 Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel n non nul, par :

• $u_n = \frac{1}{n}$ • $v_n = \frac{2n+5}{n^2+n+1}$ • $w_n = 3u_n$

a) Comparez, suivant les valeurs de n, les termes u_n, v_n et w_n.

b) Quelle conjecture pouvez-vous émettre concernant le comportement de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

80 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par : $u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

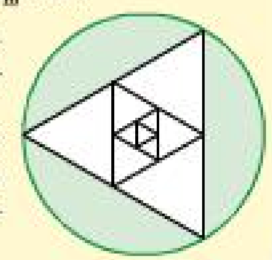
À l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, trouvez deux entiers naturels m et p tels que :

$$u_m = 10^p \text{ et } u_m < 10^8.$$

81 Sur la figure ci-contre, tous les triangles sont équilatéraux.

Le cercle est de rayon 3 cm.

Combien de triangles ainsi construits ont une aire supérieure à 0,1 mm² ?



Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.**

A Conjecturer et démontrer

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

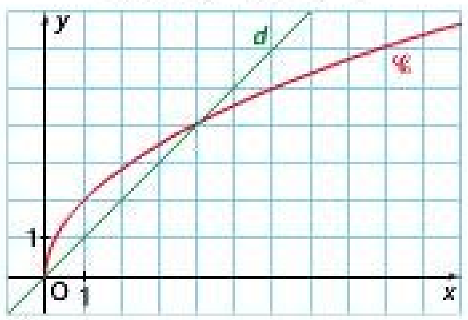
2. a) Calculez $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

b) Déduisez-en que la suite (u_n) est strictement décroissante.

B Conjecturer uniquement

Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x}$ et la droite d d'équation $y = x$. On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$



1. Reproduisez la figure ci-dessus.

2. Conjecturez le comportement de la suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes.

C De la variation à un encadrement

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{3n^2+1}{n^2+3}.$$

1. a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+3}$.

b) Déduisez-en que la suite (u_n) est strictement croissante.

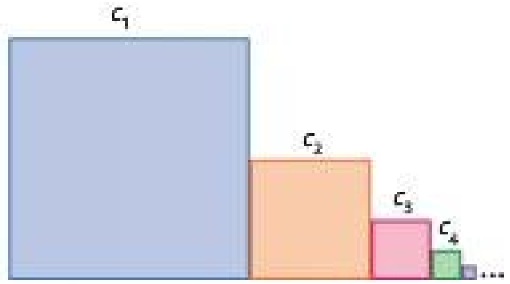
2. a) Démontrez que pour tout entier naturel n :

$$u_n < 3.$$

b) Déterminez un entier naturel m tel que pour tout entier n, $n \geqslant m$, $u_n \in]2{,}9999\,;3[$.

D Jusqu'où cette suite de carrés ?

n carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-après. Le côté d'un carré est égal à la moitié du côté du carré qui le précède. Le premier carré a pour côté $c_1 = 4$ cm.



On pose $\ell_n = c_1 + \ldots + c_n$.

1. a) Exprimez c_n et ℓ_n en fonction de n.

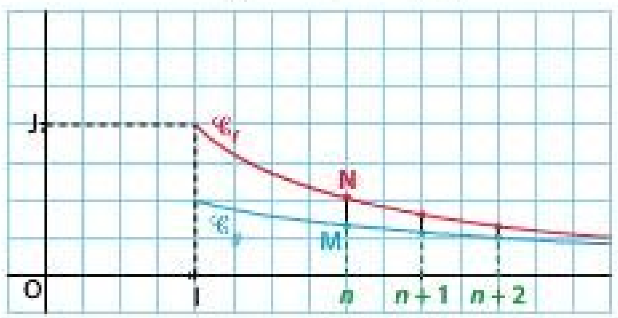
b) Justifiez l'affirmation suivante :
pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n < 8$.

2. Déterminez un entier naturel m tel que pour tout entier n, $n \geqslant m$, $\ell_n \in]8 - 10^{-5}\,;8[$.

E Une somme de différences

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on a tracé, pour $x \geqslant 1$, les courbes représentatives des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{x+1}.$$



1. a) Pourquoi $\mathscr{C}_f$ est-elle au-dessus de $\mathscr{C}_g$ pour tout nombre x, $x \geqslant 1$?

b) À tout entier naturel n, on associe MN.
Justifiez que $\text{MN} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

a) Calculez u_{n+1} en fonction de n.

b) Démontrez que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2}$.

c) Déduisez-en le sens de variation de (u_n).

3. a) Vérifiez que $\ell_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

b) Pourquoi $\ell_n < 1$ pour tout entier n, $n \geqslant 1$?

c) Déterminez un entier m tel que pour tout entier n, $n \geqslant m$, $\ell_n \in]1 - 10^{-4}\,;1[$.