CHAPITRE

5 Suites. Suites arithmétiques. Suites géométriques

D'un siècle à un autre

Quel est le point commun entre le film *Avatar* (photographie ci-dessus) et Archimède, savant du IIIe siècle avant J.-C. ?

Les suites !

Les images de synthèse et les effets spéciaux utilisent en effet massivement cet outil mathématique extrêmement puissant… dont l'un des premiers utilisateurs fut Archimède.

En savoir plus sur **Archimède**

→ Chercheurs d'hier p. 129

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Notation puissance

a et b sont des nombres non nuls, m et p sont des nombres entiers.

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
- $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$
- $a^m \times a^p = a^{m+p}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

1 On sait que $b^2 = 2{,}89$ et $b^5 = 14{,}198\,57$.
Sans calculer b, déterminez b^3 et b^7.

2 Simplifiez l'écriture du produit $\dfrac{2^3}{5^2} \times \dfrac{5^4}{2^5}$.

3 m et p sont des nombres entiers, simplifiez l'écriture du produit $\dfrac{2^m}{3^{p+1}} \times \dfrac{3^{p-2}}{2^{m-3}}$.

4 q est un nombre non nul ; $a = 5q^7$ et $b = 5q^{10}$.
Complétez : $b = a \times \ldots$ et $a \times b = \ldots$

Calculs algébriques

De l'identité remarquable $(1-a)(1+a) = 1 - a^2$, on déduit que si $a \neq 1$, alors $\dfrac{1-a^2}{1-a} = 1 + a$.

5 Calculez $(1-a)(1+a+a^2)$ et $(1-a)(1+a+a^2+a^3)$.
Déduisez-en, pour $a \neq 1$, $\dfrac{1-a^3}{1-a}$ et $\dfrac{1-a^4}{1-a}$.

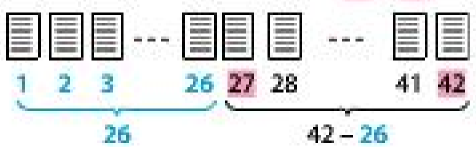
Voir les corrigés p. 363

Activité 1 DÉNOMBREMENT

Le but de cette activité est d'apprendre à dénombrer des éléments.

- Sur cette photographie, prise sur l'Île de Pâques, on compte sept statues et six intervalles.
- Dans un livre, le chapitre qui commence à la page 27 et se termine à la page 42 est constitué de seize pages :

$$16 = 42 - 26 = 42 - (27 - 1) = 42 - 27 + 1$$



D'une manière générale, la liste des nombres entiers de m à p : m, $m+1$, $m+2$, … $(p-1)$, p est constituée de $(p - m + 1)$ nombres.

1 a) Au départ d'une course pédestre, une équipe reçoit les dossards 142 à 158.
Combien de coureurs composent cette équipe ?
b) Une équipe de vingt coureurs reçoit le lot de dossards suivant (le 1er dossard du lot est le 159).
Précisez les dossards reçus par cette équipe.

2 Quel est le dernier nombre de la liste de trente-cinq nombres entiers consécutifs commençant à 12 ?

3 Combien d'années couvrent la période du 1/1/2011 au 31/12/2022 ?

4 a) Combien l'intervalle [5 ; 65], de longueur 60, contient-il de multiples de 5 ?
b) Même question pour l'intervalle [142 ; 217].

5 Dans une rue, du côté pair, combien y a-t-il de maisons numérotées de 26 à 84 ?

Activité 2 ET AINSI DE SUITE…

On envisage d'étudier un ensemble de points définis de la manière suivante :

- on place deux points distincts A et B ;
- puis le point C, milieu du segment [AB] ;
- puis le point D, milieu du segment [BC] ;
- puis le point E, milieu du segment [CD] ;
- et ainsi de suite…

Habituellement, on attribue une lettre à chaque point d'une figure. Ici, les lettres de l'alphabet vont vite s'avérer insuffisantes.

Nous allons attribuer à chacun une lettre (la même pour tous) et un numéro (celui qui correspond à l'ordre d'arrivée). Ainsi, **le 1er sera nommé A_1** (lire « A indice 1 »), **le second A_2** (à la place de B), **et ainsi de suite…**

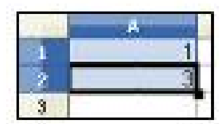
1 Construisez un segment $[A_1A_2]$, de longueur 10 cm, et les cinq points suivants (de A_3 à A_7), construits comme précédemment : A_3 est le milieu de $[A_1A_2]$, A_4 est le milieu de $[A_2A_3]$, et ainsi de suite…

En centimètres, les distances A_1A_2, A_2A_3, etc. s'expriment avec les nombres d_1, d_2, etc.

2 Sachant que $d_1 = 10$, calculez, sous forme fractionnaire, les nombres d_n, avec $2 \leqslant n \leqslant 10$.

3 Conjecturez une relation entre deux nombres consécutifs d_n et d_{n+1}.

Activité 3 CONSTRUCTION DE SUITES À L'AIDE DU TABLEUR TICE



1 Ouvrez une feuille de calcul et saisissez 1 dans la cellule A1 et 3 dans la cellule A2.

2 Sélectionnez **les deux** cellules, puis recopiez vers le bas jusqu'à la cellule A2100.

3 Vérifiez que le contenu de la cellule A90 est 179.

4 Quel est le contenu de la cellule A2011 ?

5 Quelle relation pouvez-vous établir entre les contenus de A5 et A6 ?
Cette relation vous semble-t-elle vérifiée par les contenus de deux cellules consécutives ?

6 Recommencez en modifiant les nombres de départ. Quel point commun ont les suites ainsi construites ?

Problème ouvert Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

Vérifiez que les nombres de points associés aux figures ci-dessous, appelés nombres triangulaires, sont : 1, 3, 6, 10 et 15.

On suppose que le processus de construction se poursuit de la même manière. Combien de points sont associés à la figure 8 ? à la figure 17 ? à la figure 2011 ?

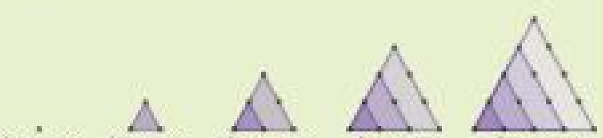


figure 1 figure 2 figure 3 figure 4 figure 5

Dans la vie courante, on utilise fréquemment des listes ordonnées de nombres. Par exemple, pour étudier l'évolution du prix d'un produit, on peut noter p_0 le prix initial, p_1 le prix au bout d'un mois, p_n le prix au bout de n mois. Ainsi, à chaque mois on associe un prix : $n \mapsto p_n$.

En mathématiques, les listes – appelées **suites** – contiennent un nombre infini de termes.

1 Définitions

1.1 Définition et notation

Définition 1 Une **suite** est une **fonction** définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur l'ensemble $\mathbb{N}$ privé des premiers entiers : 0, 1, 2, …, k).

Exemples

- La suite u associe à tout entier naturel n son double, $2n$.

n	0	1	2	3	…	7	8	9	…
$u(n)$	0	2	4	6	…	14	16	18	…

L'image de 3 par u est notée u_3 au lieu de $u(3)$. On lit « u indice 3 ».

Ainsi, $u_3 = 2 \times 3 = 6$ et, plus généralement, $u(n)$, image de n par u, est notée u_n.

u_n est le terme d'indice n de la suite u. La suite u est aussi notée (u_n) ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- La suite v associe à tout entier n ($n \geqslant 7$) le nombre $\sqrt{n-7}$. Elle n'est définie que pour $n \geqslant 7$; on dit aussi « **à partir du rang 7** ». Par exemple, $v_7 = 0$, $v_8 = \sqrt{1}$, $v_9 = \sqrt{2}$.

n	0	1	2	3	…	7	8	9	…	n	…
$v(n)$						0	1	$\sqrt{2}$	…	$\sqrt{n-7}$	…

1.2 Définir une suite par une formule explicite

La donnée d'une formule explicite, qui permet de calculer **directement** chacun des termes de la suite, détermine une suite.

Exemples.
- $s_n = (-1)^n$ alors $s_{2011} = (-1)^{2011} = -1$.
- $w_n = 5n + 3$ alors $w_6 = 5 \times 6 + 3 = 33$. Ici, $w_n = f(n)$ avec $f(x) = 5x + 3$.

Cas particulier. Si f est une fonction définie sur un intervalle $I = [a\,;+\infty[$, avec $a \geqslant 0$, on définit une suite (u_n) en posant, pour tout nombre entier n ($n \geqslant a$), $u_n = f(n)$.

1.3 Définir une suite par récurrence

La donnée du premier terme et d'une relation, dite de récurrence, qui permet de calculer un terme à partir du précédent, détermine une suite. Dans ce cas, on ne peut pas calculer directement u_n à partir de n. Il faut calculer tous les termes qui le précèdent.

Exemple. $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$, soit $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = 3x - 2$.

Ces données permettent de calculer **de proche en proche** les termes de la suite :

$u_1 = 3 \times u_0 - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13$; $\quad u_2 = 3 \times u_1 - 2 = 3 \times 13 - 2 = 37$; etc.

Cas particulier. Si g est une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout x de I, $g(x) \in$ I, on définit une suite (u_n) en prenant u_0 dans I et en posant, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 2 Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Autrement dit Une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

Exemples

- la suite des entiers naturels 0, 1, 2, 3, …, de premier terme 0 et de raison 1 ;
- la suite des nombres pairs 0, 2, 4, 6, …, de premier terme 0 et de raison 2 ;
- la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5n + 3$, qui est une suite arithmétique de raison 5. En effet, $u_{n+1} = 5(n+1) + 3 = 5n + 5 + 3 = u_n + 5$.

La définition par récurrence impose, pour calculer un terme, de connaître le précédent. Le théorème suivant permet de passer de la définition par récurrence à la définition par une formule explicite.

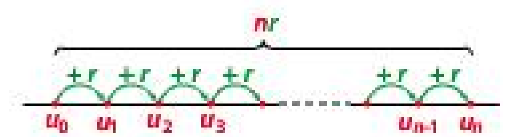
Théorème 1 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Animation

Illustration

$$\begin{aligned}
\cancel{u_1} &= u_0 + r \\
\cancel{u_2} &= \cancel{u_1} + r \\
&\vdots \\
u_n &= \cancel{u_{n-1}} + r \\
\hline
u_n &= u_0 + nr
\end{aligned}$$

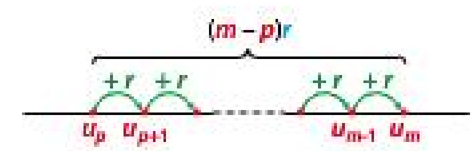
On additionne membre à membre ces égalités, puis on simplifie.



Exemple. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
Alors $u_{2011} = 2 + 2011 \times 3 = 6035$.

Remarques

- Si le premier terme est u_1, alors, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Pour tous nombres m et p, $u_m = u_p + (m-p)r$.



2.2 Somme des entiers de 1 à n

Théorème 2 La somme des entiers de 1 à n s'exprime sous la forme : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Exercice résolu D → p. 126
• Exercice 119, Roc → p. 136

Illustration. On écrit sur une ligne la somme des termes dans l'ordre croissant, de 1 à n, puis sur une seconde ligne on écrit cette somme dans l'ordre décroissant, de n à 1.

$$\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\
S &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \\
\hline
2S &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)
\end{aligned}$$

On additionne membre à membre les deux égalités.

Somme de n termes égaux à $(n+1)$.

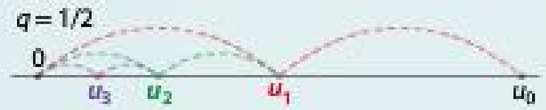
$2S = n(n+1)$ d'où le résultat : $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3 Suites géométriques

3.1 Définition

Définition 3 Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre q non nul tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Autrement dit Une suite est géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre (non nul).



Exemples

- La suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
- La suite (s_n) de terme général $s_n = (-1)^n$ est la suite géométrique de premier terme 1 ($s_0 = 1$) et de raison (–1). La liste des termes est 1, –1, 1, –1, etc.
- La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 \times 3^n$ est une suite géométrique de premier terme 2 ($u_0 = 2$) et de raison 3. En effet, $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = (2 \times 3^n) \times 3 = 3 \times u_n$.

Théorème 3 (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Alors, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = q^n \times u_0}$.

Animation

Illustration. ($u_0 \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\cancel{u_1} &= q \times u_0\\
\cancel{u_2} &= q \times \cancel{u_1}\\
&\ \vdots\\
u_n &= q \times \cancel{u_{n-1}}\\
\hline
\cancel{u_1} \times \cancel{u_2} \times \dots \times \cancel{u_{n-1}} \times u_n &= q^n \times u_0 \times \cancel{u_1} \times \cancel{u_2} \times \dots \times \cancel{u_{n-1}}\\
u_n &= q^n \times u_0
\end{aligned}$$

On multiplie membre à membre ces égalités, puis on simplifie.

Remarques. • Si le premier terme est u_1, alors, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = q^{n-1} \times u_1$.
• Pour tous nombres m et p, $\boldsymbol{u_m = q^{m-p} \times u_p}$

3.2 Somme des puissances successives

Théorème 4 La somme des puissances successives d'un nombre q ($q \neq 1$) s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

Illustration. Notons S la somme de ces puissances $q^0, q^1, q^2, \dots, q^n$.

$$\begin{aligned}
S &= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n,\\
qS &= \phantom{1 +{}} q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}\\
\hline
S - qS &= 1 - q^{n+1}\\
S(1-q) &= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

Or $1 - q \neq 0$, donc $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

On soustrait membre à membre les deux égalités.

• Exercice résolu D → p. 126
• Exercice 120, Roc → p. 136

OBJECTIF 1 Déterminer la nature d'une suite

- Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre r (la raison) tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$. → exercice résolu A
- Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre q non nul (la raison), tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ → exercice résolu B

EXERCICE RÉSOLU A Reconnaître une suite arithmétique

Les suites proposées sont définies pour tout entier naturel n.
Précisez si elles sont arithmétiques. Indiquez alors le 1er terme et la raison.

1. $u_n = 5n - 2$ **2.** $v_n = n^2 + n$

Méthode	Solution
1. On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$.	**1.** Calculons la différence entre deux termes consécutifs quelconques : $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 2 - (5n - 2)$ $= 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5$.
• Selon l'expression de cette différence, on conclut.	Cette différence est constante. La suite (u_n) est arithmétique de raison 5.
• On calcule le premier terme de la suite.	Le premier terme de la suite est : $u_0 = 5 \times 0 - 2 = -2$.
2. ❶ De même, on calcule la différence : $v_{n+1} - v_n$.	**2.** ❶ **En calculant $v_{n+1} - v_n$** $v_{n+1} - v_n = [(n+1)^2 + (n+1)] - (n^2 + n)$ $= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n$ $= 2n + 2$.
• On conclut.	La différence n'est pas constante puisqu'elle varie avec l'indice n : la suite (v_n) n'est pas arithmétique.
❷ On calcule la différence entre les premiers termes : $v_1 - v_0$ et $v_2 - v_1$.	❷ **En calculant des différences** Calculons $v_1 - v_0$ et $v_2 - v_1$: $v_1 - v_0 = 2 - 0 = 2$ et $v_2 - v_1 = 6 - 2 = 4$.
• On obtient un contre-exemple qui permet de conclure.	Les deux différences ne sont pas égales : la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Mise en pratique

Pour les exercices **1** à **6**

Précisez si les suites proposées, définies pour tout entier naturel n, sont arithmétiques ou non. Si oui, précisez le 1er terme et la raison.

1 **a)** $u_n = 2n + 3$ **b)** $u_n = n^2 - n$

2 **a)** $u_n = \dfrac{3n + 1}{2}$ **b)** $u_n = \dfrac{n + 2}{n + 1}$

3 **a)** $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2 + u_n \end{cases}$

4 $u_n = n + (-1)^n$

5 (u_n) est la suite des multiples non nuls de 7.

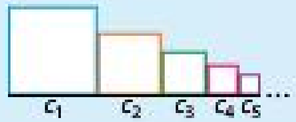
6 (u_n) est la suite dont les termes sont engendrés par l'algorithme suivant :

```
Saisir n
u reçoit 5
Pour i de 1 à n
    u reçoit u – 3
    Afficher u
FinPour
```

EXERCICE RÉSOLU B Reconnaître une suite géométrique

1. Prouvez que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2}{3^n}$ est géométrique. Précisez sa raison.

2. Chaque carré a une aire égale à la moitié de l'aire du carré précédent.



La suite des aires est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Qu'en est-il de la suite (c_n) des mesures des côtés ?

3. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n + 4$.
Prouvez que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n + 2$ est géométrique. Calculez w_0.

Méthode

1. On s'efforce de transformer l'écriture de u_{n+1} de manière à faire apparaître le produit $q \times u_n$.

2. On traduit la propriété des aires.
- On en déduit une relation entre deux termes consécutifs.
- On conclut.

3. On cherche à établir une relation du type $w_{n+1} = q\,w_n$ entre deux termes consécutifs quelconques. Pour cela, on exprime w_{n+1} en fonction de v_{n+1}, puis de v_n.
- On conclut.
- On calcule le premier terme de (w_n).

Solution

1. Pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3 \times 3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}\,u_n.$$
La suite de terme général u_n est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2. Pour tout n, $c_{n+1}^2 = \frac{1}{2}c_n^2$.
Tous les termes c_n sont positifs, donc :
$$c_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,c_n.$$
La suite (c_n) est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. $w_{n+1} = v_{n+1} + 2 = (3v_n + 4) + 2$
$= 3v_n + 6 = 3(v_n + 2) = 3w_n$.

La suite (w_n) est géométrique de raison 3.
Son premier terme est :
$$w_0 = v_0 + 2 = 6 + 2 = 8.$$

Mise en pratique

Pour les exercices 7 à 10
Précisez si les suites (u_n), définies pour tout entier naturel n, sont géométriques ou non. Si oui, précisez leur raison.

7 a) $u_n = 5^{n+3}$ b) $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$

8 a) $u_n = \frac{2n+5}{3}$ b) $u_n = 3^n + 3n$

9 a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 5u_{n+1} - 2u_n = 1 \end{cases}$

10 (u_n) est la suite dont les termes sont engendrés par l'algorithme ci-contre.

```
Saisir n
u reçoit 4
Pour i de 1 à n
    u reçoit 2u – 3
    Afficher u
FinPour
```

11 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et par la relation $u_{n+1} = 2u_n - 5$, pour tout entier naturel n. Prouvez que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 5$ est géométrique. Donnez sa raison et calculez v_n.

OBJECTIF 2 Calculer des termes et des sommes de termes

- (u_n) est une suite **arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tous les entiers naturels n, m et p :
  - $u_n = u_0 + nr$ (théorème 1).
  - $u_m = u_p + (m - p)r$. → *exercice résolu C*
- La somme des entiers de 1 à n s'exprime sous la forme $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
→ *exercice résolu D*

- (u_n) est une suite **géométrique** de premier terme u_0 et de raison q, $q \neq 0$.
Pour tous les entiers naturels n, m et p :
  - $u_n = q^n \times u_0$ (théorème 3). → *exercice résolu C*
  - $u_m = q^{m-p} \times u_p$ → *exercice résolu D*
- Si q est un nombre différent de 1, alors :
$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
→ *exercice résolu D*

EXERCICE RÉSOLU C Calculer des termes

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont arithmétiques de raison r.
a) $u_0 = 3$ et $r = 5$. Calculez u_{25}, u_{48}. b) $v_{27} = 6$ et $v_{39} = 10$. Calculez v_7 et v_{75}.

2. La suite (w_n) est géométrique de raison q.
$w_0 = 6$ et $q = -2$. Calculez w_5 et w_7.

Méthode

1. a) Connaissant le 1[er] terme u_0 et la raison r, on peut calculer directement (th. 1) tous les termes de la suite :
$$u_n = u_0 + nr.$$
b) On ne connaît ni v_0 ni la raison r.
Cependant, pour obtenir v_{39} à partir de v_{27}, on ajoute douze fois la raison $(12 = 39 - 27)$.
On peut donc calculer la raison.

- On pourrait calculer v_0, mais la formule :
$$v_m = v_p + (m - p)r$$
nous permet d'obtenir directement v_7 et v_{75}.

2. Connaissant le 1[er] terme w_0 et la raison q, on peut calculer directement (th. 3) tous les termes de la suite :
$$w_n = q^n \times w_0.$$

Solution

1. a) La suite (u_n) est arithmétique, $u_0 = 3$ et $r = 5$, donc :
$$u_{25} = u_0 + 25 \times r = 3 + 25 \times 5 = 128.$$
De même, $u_{48} = 3 + 48 \times 5 = 243$.

b) Puisque la suite est arithmétique, on peut calculer la raison r en utilisant la formule $v_m = v_p + (m - p)r$.
Ici, $v_{39} = v_{27} + (39 - 27)r$.
Donc, $10 = 6 + 12r$ et $r = \frac{1}{3}$.

- $v_7 = v_{27} + (7 - 27)r = 6 - 20 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.

$v_{75} = v_{39} + (75 - 39)r = 10 + 36 \times \frac{1}{3} = 22$.

2. La suite (w_n) est géométrique, $w_0 = 6$ et $q = -2$, donc :
$$w_5 = q^5 \times w_0 = (-2)^5 \times 6 = -32 \times 6 = -192.$$
De même, $w_7 = (-2)^7 \times 6 = -128 \times 6 = -768$.

Mise en pratique

Pour les exercices 12 à 15
Les suites sont arithmétiques de raison r.

12 $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31$. Calculez r puis u_{2011}.

13 $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$. Calculez u_{20} et u_{200}.

14 $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Calculez u_{10} et u_{20}.

15 $u_{10000} = 1$ et $u_{2000} = -79$.
Calculez u_{5857} et u_{5000}.

Pour les exercices 16 à 18
Les suites sont géométriques de raison q.

16 $u_0 = 4$ et $q = 5$.
Exprimez u_n en fonction de n et calculez u_5 et u_8.

17 $u_0 = \frac{1}{3}$ et $q = -2$.
Exprimez u_n en fonction de n et calculez u_4 et u_{10}.

18 $u_5 = 8{,}64$ et $q = 1{,}2$. Calculez u_3 et u_{10}.

EXERCICE RÉSOLU D Calculer des sommes de termes

1. La suite (u_n) est arithmétique de 1er terme $u_0 = 5$, et de raison 4.
Calculez u_{12}, u_{25} et la somme S de tous les termes de u_{12} à u_{25}.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_5 = 1$.
Calculez v_7 et la somme S de tous les termes de v_7 à v_{15}.

Méthode

1. Connaissant le 1er terme u_0 et la raison r, on peut calculer directement (th. 2) tous les termes de la suite : $u_n = u_0 + nr$.

Comme dans la démonstration du théorème 2 :

- On écrit la somme S de deux manières différentes :
$$S = u_{12} + u_{13} + \dots + u_{24} + u_{25}$$
$$S = u_{25} + u_{24} + \dots + u_{13} + u_{12}$$
- On ajoute membre à membre.

Le nombre de termes de la somme étant déterminé, on conclut.

2. On calcule v_7.

- Les termes v_p qui suivent v_7 peuvent s'écrire $q^{p-7}v_7$. On écrit la somme des termes de v_7 à v_{15}.
- Le facteur v_7 est commun à tous les termes de la somme. On factorise.
- On utilise le théorème 4 pour calculer la somme des puissances de 2.

Solution

1. La suite est arithmétique, $u_0 = 5$ et $r = 4$ donc :
$$u_{12} = u_0 + 12 \times r = 5 + 12 \times 4 = 53.$$
De même, $u_{25} = 5 + 25 \times 4 = 105$.

S est la somme de quatorze termes $(25 - 12 + 1 = 14)$.
$$S = 53 + (53 + 4) + (53 + 8) + \dots + 105$$
$$S = 105 + (105 - 4) + (105 - 8) + \dots + 53$$
En ajoutant membre à membre :
$2S = 14 \times (53 + 105)$
$S = 14 \times \frac{158}{2} = 1\,106$.

2. La suite est géométrique, $v_5 = 1$ et $q = 2$, donc $v_7 = q^{7-5} \times v_5 = 2^2 \times 1 = 4$.
$S = v_7 + 2v_7 + 2^2v_7 + \dots + 2^{(15-7)}v_7$.

$S = v_7(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8)$.

Or $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8 = \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2^9 - 1$.
Finalement,
$S = 4 \times (2^9 - 1) = 4 \times 511 = 2\,044$.

Mise en pratique

Pour les exercices 19 à 21
Les suites sont arithmétiques de raison r.

19 $u_0 = 5$ et $u_{100} = -95$. Calculez r et u_{20}, puis la somme S des termes de u_0 à u_{20}.

20 $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Calculez r et u_{100}, puis la somme S des termes de u_{40} à u_{100}.

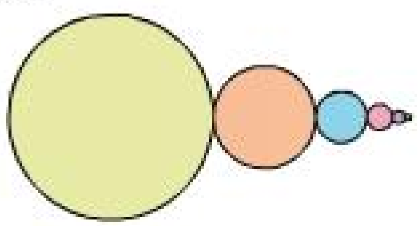
21 $u_{10000} = 1$ et $u_{2000} = -79$. Calculez la somme S des termes de u_{2000} à u_{10000}.

Pour les exercices 22 et 23
Les suites sont géométriques de raison q.

22 $w_3 = 27$ et $q = \frac{1}{3}$.
Calculez, sous la forme d'une fraction, la somme :
$$w_5 + w_6 + \dots + w_9.$$

23 $t_{10} = 100$ et $q = 10$.
Calculez la somme $t_4 + t_5 + \dots + t_{10}$.
Le calcul peut être fait mentalement.

24 Le premier disque a un rayon de quatre centimètres. Les rayons des cinq disques suivants sont obtenus en divisant par deux le rayon du précédent. Les aires sont donc successivement divisées par quatre. Quelle est l'aire totale des six disques ?



Pour se tester

Exercices interactifs

25 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

1. La suite (u_n) est telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
a) La suite (u_n) est ......
b) Le réel r est appelé ......
c) Pour tous entiers naturels m et p, $u_m - u_p =$ ......

2. La suite (v_n) est telle que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$ avec $q \neq 0$.
a) La suite (v_n) est ......
b) Le réel q est appelé ......
c) Pour tous entiers naturels m et p, $u_m = u_p \times$ ......

26 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

a) 47 est un des termes de la suite définie par $u_n = 3n - 1$.
b) La suite définie par $u_n = 3 + 2n$ est arithmétique.
c) La suite définie par $u_n = 3 + n^2$ est arithmétique.
d) La suite définie par $u_n = 3 + n^2$ est géométrique.
e) Si u_n, u_{n+1} et u_{n+2} sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors le produit $u_n \times u_{n+2}$ est égal au carré de u_{n+1}.
f) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ et $\sqrt{2} + 2$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

27 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. La suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{2n+1}{n}$ est :
a) arithmétique b) géométrique
c) ni arithmétique ni géométrique

2. La suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3}u_n$ est :
a) arithmétique b) géométrique
c) ni arithmétique ni géométrique

3. (u_n) est une suite définie par la donnée de u_0 $(u_0 = 1)$ et par la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$.
(v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 3$. Concernant les suites (u_n) et (v_n) :
a) elles sont géométriques b) une est arithmétique
c) une seule est géométrique

4. $x^3 \times x^5 \times x^7 \times \dots \times x^{17} \times x^{19}$ est égal à :
a) x^{100} b) x^{99} c) x^{101}

28 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x-1}$ et (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = f(n)$.
a) $u_{17} > u_{16}$ b) $u_{13} \in \mathbb{N}$
c) 4 est un terme de la suite (u_n)

2. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$.
a) $u_{n+1} = \frac{1}{n^2+1} + 1$
b) $u_{n+1} = \frac{1}{n^2+2n+2}$
c) $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$

3. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 3$, avec $u_0 = 1$.
La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3n - 1$.
Les suites (u_n) et (v_n) :
a) sont arithmétiques
b) ont même raison c) $u_0 = v_{10}$

Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

29 Calculer le nombre de termes

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 5$.

On ajoute les «premiers» termes de la suite afin d'obtenir une somme S supérieure à 750.

Objectif Trouver le plus petit nombre N de termes de la somme S qui permet de dépasser 750.

1. La suite (u_n) étant arithmétique, chacun des N termes de la somme S s'exprime en fonction de u_0 et de la raison r. D'autre part, le premier indice étant 0, le N-ième terme est u_{N-1} et $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{N-1}$.

Exprimez la somme S en fonction de u_0, de la raison r et de N (regroupez les termes «en u_0» et ceux «en r»).

2. Il en résulte que dans l'expression de S, en comptabilisant les termes «en r», on a fait apparaître la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + (N - 1)$, somme que l'on peut calculer en utilisant le théorème 2. Nous pouvons alors exprimer S en fonction de l'inconnue N.

Vérifiez que $S = \frac{5}{2}N^2 - \frac{1}{2}N$.

3. Par hypothèse, $S > 750$. L'objectif est donc maintenant de résoudre, dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, une inéquation du second degré d'inconnue N.

a) Résolvez l'inéquation $\frac{5}{2}N^2 - \frac{1}{2}N > 750$ et concluez.

b) L'algorithme suivant, écrit avec AlgoBox, a pour but de répondre au problème posé.

On calcule pas à pas la somme S et on incrémente «tant que» S ne dépasse pas 750.

Complétez cet algorithme.

```
▼ VARIABLES
  ├ n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ U EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ n PREND_LA_VALEUR 0
  ├ U PREND_LA_VALEUR 2
  ├ S PREND_LA_VALEUR ......
  ▼ TANT_QUE (S<=750) FAIRE
    ├ DEBUT_TANT_QUE
    ├ n PREND_LA_VALEUR n+1
    ├ U PREND_LA_VALEUR ......
    ├ S PREND_LA_VALEUR ......
    └ FIN_TANT_QUE
  ├ n PREND_LA_VALEUR
  ├ AFFICHER "Le nombre de termes est N="
  └ AFFICHER n
└ FIN_ALGORITHME
```

30 Une suite arithmétique

Les nombres a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Leur somme est 21 et la somme de leurs carrés est 197.

Objectif Trouver ces trois nombres.

a, b et c sont trois nombres consécutifs d'une suite arithmétique et, dans ce cas, lorsqu'on connaît un terme et la raison r, on connaît tous les termes. Choisissons donc un terme. Dans ce genre de situation, il est souvent commode de choisir le terme central, ici b.

1. Exprimez alors a et c en fonction de b et de r.

2. Écrivez un système qui permet de trouver les valeurs de b et de r, et résolvez-le.

3. Déduisez-en a et c.

31 Utiliser une suite auxiliaire

La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$$

Objectif Exprimer de manière explicite les termes de la suite (u_n) définie par récurrence.

1. L'intérêt de ce passage de la définition par récurrence à la définition explicite est de permettre le calcul direct d'un terme sans avoir à connaître ceux qui le précèdent. Cette transformation est aisée pour une suite arithmétique ou géométrique.

Vérifiez que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On introduit alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

Une étude graphique comme celle de l'exercice 35 p. 130 peut permettre de justifier ce choix.

a) Calculez les premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

Démontrez-le.

c) Exprimez v_n en fonction de n.

d) Concluez en exprimant u_n en fonction de n.

Narration de recherche

→ **L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.**

32 À partir de la somme des termes

(u_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n non nul $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 3n^2 + 5n$. Calculez u_{2011}.

33 À la découverte de suites

Que vous inspire le tableau ci-dessous ?

Imaginez les nombres de la ligne 7 (en tenant compte des erreurs d'arrondi).

	A	B	C
1	2	2	2
2	2,020000	2,020000	2,020000
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]

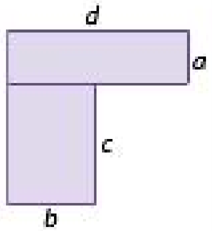
Travail en groupe

À votre tour créez une suite, proposez les premiers termes à votre voisin afin qu'il découvre le terme suivant.

34 Les deux rectangles

a) Les nombres a, b, c et d sont, dans cet ordre, quatre termes consécutifs d'une suite géométrique.

Comparez les aires des deux rectangles.



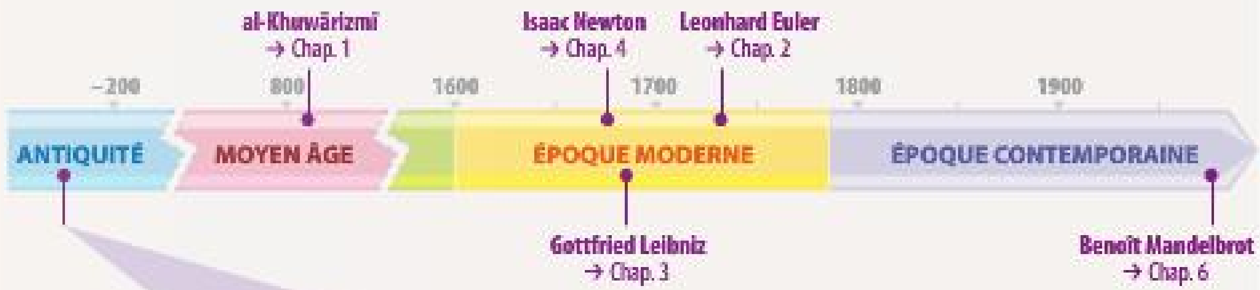
b) On suppose maintenant que ces quatre nombres sont, dans cet ordre, quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 5 (cm).

Comparez les périmètres et les aires des deux rectangles.

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ **Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.**

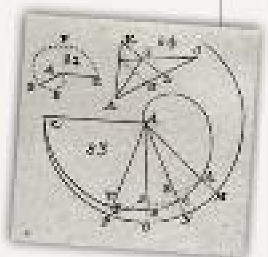


Archimède
(IIIe s. avant J.-C.)

Archimède fut avec Euclide (287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.) l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité.

Son œuvre mathématique concerne la géométrie et l'arithmétique.

Sa célébrité résulte surtout de sa contribution à la physique (en statique et en hydrostatique) et de son fameux «principe d'Archimède».



▲ Extrait de son ouvrage *Quatre livres sur les coniques*, édition de 1675.

Sur le Web http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/hist_mat/textes/mirliton.htm

EXERCICES

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

Utiliser GeoGebra

→ Pour représenter les termes d'une suite (u_n) lorsque $u_{n+1} = f(u_n)$

TP 35 Étude graphique d'une suite définie par une relation de récurrence

COMPÉTENCES

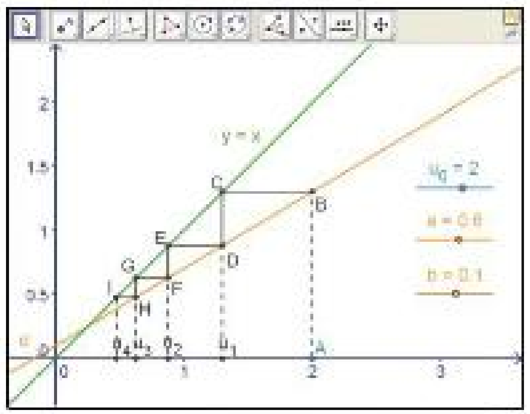
TICE
- Créer et utiliser des curseurs
- Animer une configuration
- Émettre et tester des conjectures

Mathématiques
- Interpréter un graphique
- Lire des coordonnées
- Caractériser une suite

a et b sont deux nombres. (u_n) est la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

L'objectif est de représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) et d'observer l'influence des nombres a, b et u_0 sur la nature de la suite.



1. Réaliser la figure

a) Créez trois curseurs a, b et u_0 (saisissez u_0).
Dans un premier temps, choisissez, comme sur la vue d'écran ci-contre, $u_0 = 2$, $a = 0{,}6$ et $b = 0{,}1$ (pour l'intervalle des trois curseurs, on prendra min : –5 ; max : 5 ; incrément : 0,1).

outil 1

b) Créez la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ et la droite d'équation $y = x$.

outil 3

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

c) Créez dans l'ordre, comme sur la vue d'écran, le point A de coordonnées $(u_0 ; 0)$ (saisissez (u_0,0)), puis les points B, C, D, E, F, G, H, I en utilisant les touches :
- pour tracer une perpendiculaire ;
- pour définir un point d'intersection ;
- pour créer un segment.

Aide Après avoir construit les points, masquez les droites perpendiculaires à un des axes en décochant [Afficher l'objet]. La figure sera plus lisible.

d) Sachant que toutes les droites tracées sont perpendiculaires à un des axes, justifiez que les coordonnées du point B sont $(u_0 ; u_1)$ et que celles de C sont $(u_1 ; u_1)$ (rappel, A est le point d'abscisse u_0).
Déduisez-en les coordonnées des points D, E, F, G, H, I.

e) Créez alors les points de l'axe des abscisses correspondants aux nombres u_1, u_2, u_3 et u_4. Pensez à utiliser la touche , intersection entre deux objets.

2. Conjecturer avec GeoGebra et démontrer

a) • Les curseurs étant toujours ceux de la vue d'écran, pourquoi pouvez-vous conjecturer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique ?
• À l'aide du curseur, faites varier u_0. Cela modifie-t-il votre conjecture ?

b) • Mettez les trois curseurs à 1. Que constatez-vous ? Conjecturez la nature de la suite, puis démontrez-le.
• Faites varier b, en prenant éventuellement des valeurs négatives. Cela semble-t-il changer la nature de la suite ? Que représente b lorsque $a = 1$? Démontrez-le.

c) Choisissez $u_0 = 1$ et $b = 0$. Faites varier a (a non nul). Conjecturez la nature de la suite lorsque $b = 0$. Démontrez-le.

Utiliser les outils de calcul

→ Pour calculer des termes d'une suite

TP 36 Évaluer le terme d'indice n d'une suite définie par récurrence

Le calcul du terme d'indice n d'une suite définie par récurrence nécessite la connaissance de tous les termes qui le précède.
L'utilisation des outils de calculs (tableur, calculatrice, etc.) est alors indiquée, mais il faut rester prudent sur les conclusions (danger des valeurs approchées – voir l'exercice 143 p. 139).
La suite étudiée est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.
L'objectif est donc de déterminer le terme u_n (pour un indice « raisonnable », compte tenu des limites des outils de calcul).

1. Avec le tableur

Saisissez le contenu des cellules A1-B3 comme indiqué ci-contre.
Recopiez vers le bas jusqu'à la valeur de n souhaitée.

	A	B
1	n	Un
2	0	1
3	1	=2*B2+5

2. Avec la calculatrice programmable ou avec AlgoBox

L'algorithme suivant permet de programmer le calcul du terme d'indice n :

outil 14

i : le compteur.
u : le terme de rang i.

n : l'indice du terme cherché.

```
Variables
u , i
entrée
n
Traitement
u = 1
Pour i de 1 à jusque n faire
u reçoit 2×u+5
FinPour
Sortie
Afficher « u » n « = » u
```

la formule de récurrence.

a) Testez avec l'outil de votre choix, le programme qui en découle.

Avec une TI

Avec une Casio

Avec AlgoBox

3. Applications

Déterminez, avec l'outil de votre choix, une valeur éventuellement approchée :
- du terme u_{10} de la suite définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 5 + \frac{u_n}{2}$;
- du terme v_{100} de la suite définie par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n - 1$.

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

37 $u_n = n^2 - 3n + 1$. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

38 $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 3$. Calculez u_1 et u_2.

39 Les nombres suivants sont-ils, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

a) 12 ; 25 ; 38 b) $\frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{4}{3}$

40 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et $u_5 = 6$. Calculez u_0, u_{10}.

41 (u_n) est une suite arithmétique. $u_5 = 11$ et $u_{11} = 3$. Calculez u_0, u_{14}.

42 Calculez $1 + 2 + \ldots + 20$.

43 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et $u_0 = 0$. Calculez $u_8 + u_9 + \ldots + u_{15}$.

44 Les nombres suivants sont-ils, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

a) 12 ; 24 ; 36 b) $\frac{1}{3}; -2; 12$

45 (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}2$ et $u_5 = 1{,}6$. Calculez u_0, u_8.

46 (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$. $u_3 = 8$ et $u_5 = 2$. Calculez u_4, u_8.

DÉFINIR UNE SUITE

Pour les exercices 47 à 49
Trouvez la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, et calculez les termes de u_0 à u_5.

47 a) $u_n = 2n + 5$ b) $u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 2}$

48 a) $u_n = n^2 + 2n - 5$ b) $u_n = |3 - 2n|$

49 a) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ b) $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$

Pour les exercices 50 et 51
Trouvez la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, et calculez les termes de u_1 à u_5.

50 a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

51 a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$

Pour les exercices 52 et 53
La suite (u_n) est définie par la donnée explicite du terme u_n pour tout entier naturel n.
Exprimez en fonction de n les termes $u_{n-1}, u_{n+1}, u_{2n}, u_{2n+1}$ de la suite (u_n).

52 a) $u_n = 3n^2 - 1$ b) $u_n = \frac{2n - 1}{n + 1}$

53 a) $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n + 1}$ b) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n + 1)}$

Pour les exercices 54 à 56
La suite (u_n) est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation de récurrence. Calculez les termes, de u_1 à u_5, puis conjecturez une formule explicite du terme général $u_n = f(n)$.
À partir de la formule obtenue, retrouvez u_0 et la relation donnée entre u_{n+1} et u_n.

54 $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$.

55 $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 5$.

56 $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1 + u_n}.$$

57 (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = n^3 - 3n^2 + 2n + 1.$$

a) Calculez u_0, u_1 et u_2.
Tous les termes de la suite sont-ils égaux ?

b) Factorisez $(u_n - 1)$. Combien de termes de la suite sont égaux à 1 ?

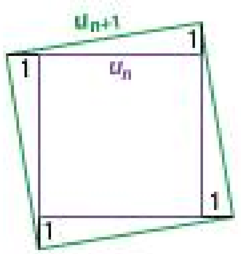
58 f est la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

1. On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = f(n)$. Calculez $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_{50}, u_{100}$.

2. On note (v_n) la suite définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
Calculez v_1, v_2, v_3, v_4.

59 À partir d'un carré de côté $u_0 = 5$, on construit les carrés de côtés $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}$ en utilisant des segments de longueur 1 comme indiqué sur la figure ci-contre.



a) Calculez les valeurs exactes de u_1 et u_2.

b) Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n.

60 On donne :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 1 + \frac{1}{2},\ u_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}},\ u_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

a) Calculez u_1, u_2, u_3.

b) Conjecturez l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Calculez u_4, u_5, u_6 et représentez les premiers termes sur un axe gradué.

61 **Obtenir des termes choisis** ALGORITHMIQUE

1. Qu'obtenez-vous pour $n = 7$ et $p = 15$ à l'aide de l'algorithme suivant ?

```
Variables
i, u, n, p
entrées
n, p
Traitement
Pour i de n jusque p faire
u reçoit 3×i − 2
Afficher « u » i « = » u
FinPour
```

2. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{3}{2}n + 4.$$

En vous inspirant de l'algorithme précédent, écrivez un algorithme permettant d'obtenir les dix termes qui suivent le terme d'indice n (n n'étant pas fixé).

SUITES ARITHMÉTIQUES

Pour les exercices 62 à 64
Précisez si la suite est arithmétique ou non. Si oui, donnez sa raison.

→ exercice résolu A, page 123.

62 a) $u_n = \frac{5}{3}n - 1$ b) $u_n = 2^n$

63 a) $u_n = \frac{2n + 1}{5}$ b) $u_n = \sqrt{n - 1}$ $(n \neq 0)$

64 a) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ b) $u_n = \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$

Pour les exercices 65 et 66
La suite (u_n) est arithmétique de raison r. Exprimez u_n en fonction de n.

→ exercice résolu C, page 125.

65 a) $u_0 = -3$ et $r = -\frac{1}{2}$ b) $u_1 = 5$ et $r = \frac{1}{10}$

66 a) $u_5 = -\frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{2}$ b) $u_{10} = 0$ et $r = -3$

Pour les exercices 67 à 69
La suite (u_n) est arithmétique de raison r.

67 $u_5 = 27$ et $u_{10} = 33$. Calculez u_{20}.

68 $u_{2000} = 74$ et $u_{2010} = 33$. Calculez u_{10000}.

69 $u_3 = \sqrt{2}$ et $u_5 = \sqrt{8}$. Calculez u_{10}.

Pour les exercices 70 à 73
(u_n) est une suite arithmétique. Calculez u_0 et la raison r.

70 $u_2 + u_3 + u_4 = 36$ et $u_9 = 48$.

71 $u_5 + u_6 + u_7 = -27$ et $u_9 = -15$.

72 $u_{10} + u_{12} + u_{14} = 33$ et $u_{100} = 55$.

73 $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_8 = 176$ et $u_3 = 7$.

74 Déterminez cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est 55.

75 On aperçoit, dans la colonne A ci-dessous, quelques termes d'une suite.

	A
49	195
50	199
51	203
52	207
53	211

a) Pourquoi est-il raisonnable d'imaginer que la suite est arithmétique ?

b) Son premier terme est dans la cellule A1. Quel est-il ?

76 Les nombres ci-contre sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique construite avec un tableur.

	A
231	343
232	344,5
233	346
234	347,5

Déterminez le contenu des cellules A30 et A100.

77 La suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$.

a) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

Prouvez que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$w_n = 2u_n + 3v_n.$$

Prouvez que la suite (w_n) est arithmétique.

78 (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Prouvez que les suites (v_n) et (w_n) définies, pour tout entier naturel n, respectivement par $v_n = 2u_n + 5$ et $w_n = u_{3n} - 1$ sont arithmétiques et donnez leur raison.

79 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$.

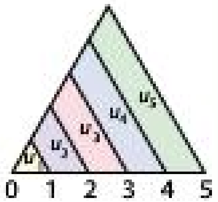
a) Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Si $u_n \neq 0$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

Calculez $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$.

c) Prouvez que la suite (v_n) est arithmétique. Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

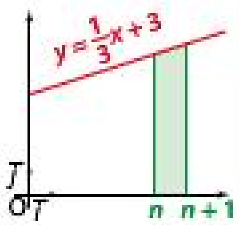
80 La figure ci-contre indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les triangles de la figure sont équilatéraux.



a) Prouvez que la suite (u_n) des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?

b) La suite (v_n) des périmètres est-elle arithmétique ?

81 a_n et p_n sont respectivement l'aire et le périmètre du domaine en vert sur la figure ci-contre dans un repère orthonormé.



a) Calculez a_n et p_n en fonction de n.

b) Vérifiez que les suites (a_n) et (p_n) sont arithmétiques.

82 **Démonstration par un contre-exemple** LOGIQUE

La suite (u_n) est arithmétique de raison r ce qui signifie que la différence de deux termes consécutifs quelconques de la suite est constante et égale à r, r étant, par exemple, la différence $u_1 - u_0$.
Ceci se traduit par la proposition (P) :

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_1 - u_0$.

1. Exprimez la négation de la proposition (P).

Il suffit donc, pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique, de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire ici une différence de termes consécutifs qui ne soit pas égale à la première, $u_1 - u_0$.

2. Application : pour chacune des suites suivantes, précisez si elle est arithmétique ou pas.

- $u_n = n^2 - 2n$
- $v_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$
- $\begin{cases} w_0 = \pi \\ w_{n+1} = w_n + 1 \end{cases}$

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Pour les exercices 83 et 84
Précisez si la suite est géométrique ou non. Si oui, donnez sa raison.

→ *exercice résolu B, page 124.*

83 a) $u_n = \dfrac{2^{n+3}}{3^{n+2}}$ b) $u_n = 5^n - n$

84 a) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1} \end{cases}$

Pour les exercices 85 à 90
(u_n) est une suite géométrique de raison q.

→ *exercice résolu C, page 125.*

85 $u_0 = 3$, $q = 5$. Calculez u_3 et u_{10}.

86 $u_0 = 2$, $q = -\dfrac{1}{2}$. Calculez u_3 et u_{10}.

87 $u_5 = 486$, $u_7 = 4374$; $q > 0$.
Calculez u_0 et u_{10}.

88 $u_2 = -1{,}92$, $u_4 = -1{,}2288$; $q > 0$.
Calculez u_0 et u_5.

89 Pour tout naturel $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Tous les termes sont non nuls et sa raison q est positive.
Trouvez q.

90 (u_n) n'est pas constante. De plus, $u_0 = 5$ et $2u_2 = 3u_1 - u_0$. Trouvez sa raison q.

91 On aperçoit, dans la colonne A ci-dessous, quelques termes d'une suite.

	A
7	5,4918391000
8	6,0410230100
9	6,6451253110
10	7,3096376421

a) Pourquoi est-il raisonnable d'imaginer que la suite est géométrique ?

b) Son premier terme est dans la cellule A1. Quel est-il ?

92 Les nombres suivants sont des termes consécutifs d'une suite géométrique « construite » avec un tableur.

	A
4	0,0512000000
5	0,0409600000
6	0,0327680000

Déterminez le contenu des cellules A8 et A9.

93 a et c sont deux nombres strictement positifs. Déterminez en fonction de a et de c le nombre positif b tel que a, b et c soient dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

94 (u_n) est une suite géométrique. $u_{n-1} = 45$ et $u_{n+1} = 2205$. Déterminez u_n.

95 **Boule de neige**

Sur une grille à mailles carrées d'un centimètre de côté, on place une boule de neige de dix centimètres de diamètre. Elle fond, et son volume est divisé par huit à chaque heure écoulée.
On fait une observation toutes les heures. Dans combien de temps constaterons-nous que ce qui reste de la boule n'est plus retenu par la grille ?

96 Le prix d'un article augmente tous les ans de 3 %. On note p_0 son prix initial, p_1 son prix un an après, p_n son prix au bout de n années (n est un entier naturel).

a) Exprimez en fonction de son prix initial, son prix au bout de cinq ans.

b) Exprimez en pourcentage l'augmentation de p_0 à p_5.

97 Quelle somme doit-on placer avec un taux d'intérêt de 5 % l'an afin de détenir une somme de 10 000 € au bout de dix ans :

a) lorsque les intérêts sont capitalisés ;

b) lorsque les intérêts ne sont pas capitalisés.

Aide
Dire que les intérêts sont capitalisés signifie que chaque année ils sont ajoutés au capital et produisent, à leur tour, des intérêts.

DÉNOMBREMENT

98 On considère l'intervalle $I = [15 ; 54]$.
Combien I contient-il :

a) de nombres entiers ? b) de nombres pairs ?

99 On considère l'intervalle $I = [28 ; 113]$.
Combien I contient-il :

a) de multiples de 3 ? b) de multiples de 7 ?

100 Déterminez le nombre de termes de la somme :

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + 57$;

b) $9 + 12 + 15 + \ldots + 123 + 126$;

c) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$.

101 La suite (u_n) est géométrique.
Indiquez le nombre de termes proposés :

a) $q^5, q^6, q^7, \ldots, q^{14}$

b) $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{23}$

c) $3^7, 3^9, 3^{11}, \ldots, 3^{47}$

SOMME DE TERMES

Pour les exercices 102 à 118
Voir l'exercice résolu D, page 126.

102 a) Démontrez que la somme $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$ est le carré d'un entier naturel.

Aide Voir le principe de démonstration du théorème 2 p. 121.

b) Calculez, en fonction de n, la somme des n premiers entiers naturels impairs.

$$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

103 (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et $u_4 = 12$. Calculez $u_4 + u_5 + \ldots + u_9$.

104 (u_n) est une suite arithmétique telle que :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_{10} + u_{11} = 40 \end{cases}$$

a) Prouvez que u_0 et la raison r sont tels que :

$$\begin{cases} u_0 + 2r = 3 \\ 2u_0 + 21r = 40 \end{cases}$$

Calculez alors u_0 et r.

b) Calculez la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{50}$.

105 (u_n) est une suite arithmétique.
$u_{10} = -12$ et $u_{20} = -32$.

a) Calculez u_0 et la raison r.

b) Calculez $u_{10} + u_{20} + \ldots + u_{100}$.

Pour les exercices 106 à 108
La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_1.
On note $S_n = u_1 + \ldots + u_n$.

106 $u_{17} = 105$ et $r = -2$. Calculez u_1 et S_{17}.

107 $r = -7$ et $S_{33} = 0$. Calculez u_1 et u_{33}.

108 $u_n = 14$, $r = 7$ et $S_n = -1\,176$. Calculez n et u_1.

109 a) Calculez la somme de tous les entiers naturels multiples de 3 inférieurs à 1 000.

b) Calculez la somme de tous les entiers naturels multiples de 5 inférieurs à 9 999.

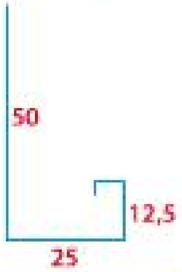
110 Un épargnant décide de bloquer (sans intérêts), sur un compte, de l'argent chaque mois.
Il commence le 1er janvier 2010 avec 10 €.
Le 1er de chaque mois, il dépose 10 € de plus que le mois précédent.
Combien aura-t-il sur son compte le 2 juin 2011 ?

111 Calculez $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots + \dfrac{1}{1\,048\,576}$.

112 Calculez $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} - \ldots - \dfrac{1}{6\,561}$.

113 Un cycliste a effectué cinq tours de piste en 2 minutes et 40 secondes. Sachant qu'à chaque tour il a mis une seconde de plus qu'au précédent, donnez le temps mis pour chaque tour.

114 On construit, à l'aide d'une ficelle, la figure suivante :
On note x_1 la longueur du 1er segment (x_1 = 50 cm), x_2 celle du deuxième et ainsi de suite.
Calculez la longueur totale des sept premiers segments.



115 **Calcul d'une somme** ALGORITHMIQUE

a) Quelle est la nature de la suite utilisée dans cet algorithme ?

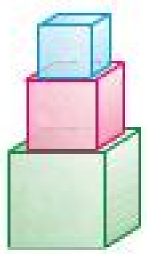
b) Précisez l'objectif de cet algorithme écrit avec AlgoBox.

```
▼ VARIABLES
  ├ i EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ u EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ u PREND_LA_VALEUR 1
  ├ S PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    ├ DEBUT_POUR
    ├ u PREND_LA_VALEUR u+3
    ├ S PREND_LA_VALEUR S+u
    └ FIN_POUR
  └ AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

116 **Calcul d'une autre somme** ALGORITHMIQUE

Écrivez un algorithme permettant de calculer la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$ (le nombre n étant choisi par l'utilisateur).

117 **Avec des cubes**
Sur un cube de dix centimètres de côté, on empile des cubes de plus en plus petits : le volume d'un cube (autre que le premier) est égal à la moitié du volume du cube précédent.



a) Calculez le volume du huitième cube.

b) Calculez la somme des volumes des dix premiers cubes (à 1 mm³ près).

118 **1.** Vérifiez que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = 2^n - 2n + 2$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. Prouvez que la suite (u_n) définie pour n entier non nul par $u_n = -2n + 2$ est arithmétique ;
et que la suite (v_n) définie pour n entier non nul par $v_n = 2^n$ est géométrique.

3. Calculez la somme $w_1 + w_2 + \ldots + w_{10}$.

ROC Restitution organisée de connaissances

119 **Somme des termes d'une suite arithmétique**

Prérequis :
La somme des entiers de 1 à n s'exprime sous la forme : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Démonstration
Démontrez que la somme des n premiers entiers naturels non nuls multiples de 3 est $\frac{3n(n+1)}{2}$.

2. Application
Utilisez le résultat précédent pour calculer la somme $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 301$.

120 **Somme des termes d'une suite géométrique**

Prérequis :
Pour $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

1. Démonstration
(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Démontrez que :
$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. Application
Utilisez le résultat précédent pour calculer la somme : $9 + 27 + \ldots + 3^{10}$.

Prendre toutes les initiatives

121 Calculez la somme de tous les nombres entiers naturels inférieurs à 2 154 ayant 3 pour chiffre des unités.

122 Les mesures des côtés d'un triangle rectangle peuvent-elles être trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Approfondissement

123 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 1} \end{cases}$$

a) Calculez les cinq premiers termes de la suite.
Que pouvez-vous conjecturer ?

b) Démontrez que pour tout entier naturel n, $u_{n+3} = u_n$.

Vocabulaire (u_n) est dite périodique de période 3.

124 Les nombres $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3+\sqrt{5}}$ sont-ils des termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Pour les exercices 125 et 126
Trouvez trois nombres a, b et c, termes consécutifs d'une suite arithmétique, qui remplissent les conditions données.

→ exercice 30, Apprendre à chercher, page 128.

125 Les nombres a, b et c sont tels que :
$$\begin{cases} a + b + c = 39 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 525 \end{cases}$$

126 Les nombres a, b et c sont tels que :
$$\begin{cases} a + b + c = -15 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 107 \end{cases}$$

127 Trouvez cinq nombres a, b, c, d et e, termes consécutifs d'une suite arithmétique tels que :
$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 55 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 695 \end{cases}$$

→ exercice 30, Apprendre à chercher, page 128.

128 a, b, c, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison non nulle. b, c, a, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. De plus $a + b + c = 18$. Calculez a, b et c.

129 (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 différent de 0, et de raison q différente de –1.
On pose : $v_n = u_n + u_{n+1}$ et $w_n = u_n \times u_{n+1}$.

a) Prouvez que, pour tout n, v_n est non nul.

b) Démontrez que la suite (t_n) de terme général $\frac{w_n}{v_n}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.

130 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$$

a) Prouvez que la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n^2$ est arithmétique.

b) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

131 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}. \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

a) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

b) La suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :
$$v_n = \frac{1}{u_n} + 1.$$
Calculez les premiers termes de la suite (v_n).
Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ? Démontrez-le.

c) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

132 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \end{cases}$$

a) Calculez u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

b) On pose, pout tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.
Prouvez que la suite (v_n) est géométrique.

c) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

133 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + 3 \end{cases}$$

a) Calculez u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

b) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 4$.
Prouvez que la suite (v_n) est géométrique.

c) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

134 **Déterminer la nature d'une suite** TICE
La suite (u_n) est définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{4 - u_n}. \end{cases}$$

On admet que pour tout entier naturel n, u_n existe (c'est-à-dire qu'aucun terme de la suite ne prend la valeur 4).

1. Utilisez un tableur pour calculer les vingt premiers termes de la suite.

	A	B
1	n	Un
2	0	-1
3	1	=4*B2/(4-B2)

La suite (u_n) vous semble-t-elle arithmétique ? géométrique ? Démontrez-le.

2. Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = 0$. Exprimez alors u_{n-1}, u_{n-2}, etc.

3. On considère maintenant la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{3u_n + 2}{u_n}.$$

Utilisez de nouveau le tableur pour calculer les vingt premiers termes de la suite.

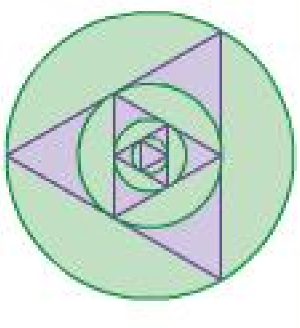
	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	-1	=(3*B2+2)/B2
3	1	=4*B2/(4-B2)	=(3*B3+2)/B3

Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?
Démontrez-le.

4. a) Exprimez v_n en fonction de n.

b) Après avoir justifié que, pour tout entier naturel n, $v_n - 3$ est non nul, démontrez que $u_n = \frac{2}{v_n - 3}$.
Exprimez alors u_n en fonction de n.

135 Dans la figure ci-contre tous les triangles sont équilatéraux.

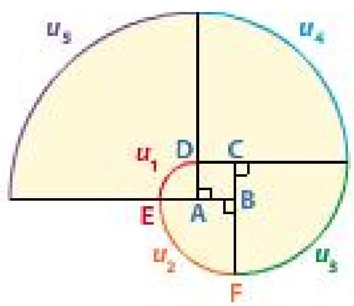


a) Prouvez que la suite des aires des disques est géométrique.

b) Prouvez que la suite des aires des triangles est géométrique.

136 Une spirale

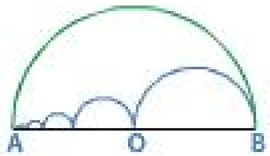
La spirale représentée ci-dessous est composée de quarts de cercles dont les centres sont successivement les sommets du carré ABCD de côté 1 cm.
On note u_1 la longueur du quart de cercle $\overset{\frown}{DE}$ de centre A, u_2 la longueur du quart de cercle $\overset{\frown}{EF}$ de centre B, et ainsi de suite…



a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) On prolonge la figure de quatre nouveaux arcs, ajoutés aux cinq arcs déjà dessinés. Quelle est la longueur de la spirale ainsi obtenue ?

137 Dans le demi-disque de diamètre [AB], de centre O et de longueur dix centimètres, on enlève cinq demi-disques dont les diamètres sont de plus en plus petits, chacun d'eux étant la moitié du précédent. Quelle aire reste-t-il ?



138 La désintégration de l'uranium 234

L'uranium 234 est un corps radioactif qui se désintègre en thorium 230, en émettant des particules α.
Le taux d'atomes d'uranium 234 désintégrés en thorium 230 est de 0,0276 % par siècle. On appelle « demi-vie » d'un corps radioactif le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de ses atomes.

a) Justifiez que déterminer la demi-vie de l'uranium 234 revient à déterminer l'entier naturel n à partir duquel $0{,}999724^n \leqslant 0{,}5$. Utilisez la calculatrice ou le tableur pour résoudre ce problème.

b) Le thorium 230 est lui-même instable et se désintègre en radium 226. Sa demi-vie est de 76 000 ans. À l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), déterminez le taux d'atomes de thorium 230 désintégrés par siècle.

Aide

Pour résoudre, à la calculatrice, l'équation $X^{760} = 0{,}5$, on calcule $0{,}5^{1/760}$.

c) Que devient le thorium 230 après 152 000 ans ?

Note

Pour la question b) et la question c), on part du principe que le thorium a été séparé de l'uranium, c'est-à-dire qu'aucun atome de thorium ne se forme pendant la désintégration en radium 226.

139 Isolation phonique

Une plaque d'isolant phonique absorbe 45 % du son qui la traverse. Combien doit-on superposer de plaques pour que l'intensité du son soit inférieure à 1 % de sa valeur initiale ?

140 En économie

Un employeur propose deux plans de rémunération mensuelle à un nouveau salarié : Le salaire sera de 1 900 € au départ avec deux options possibles :

A. Chaque année, une augmentation de 100 € ;

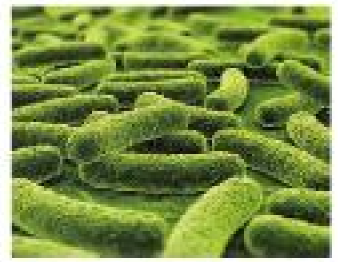
B. Chaque année, une augmentation de 4 %.

1. Quelle est l'option la plus intéressante pour le salarié au bout d'un an ?

2. Cette option est-elle la plus intéressante quelle que soit l'ancienneté ?

141 En biologie

Un biologiste souhaite étudier l'évolution d'une population de bactéries.



Il a effectué les relevés suivants :

heure	10 h	10 h 20	10 h 40	11 h	11 h 20
nombre	1 000	2 100	4 000	7 900	16 000

a) On note p_0 la population à 10 heures, p_1 la population à 10 h 20 et ainsi de suite.
Comment notez-vous la population à 12 heures ? à 14 heures ?

b) Pour pouvoir faire des prévisions, le biologiste doit modéliser l'évolution.
Remarquez que celle-ci est assez régulière.
Quelle modélisation de l'évolution préconisez-vous ? Exprimez alors p_n en fonction de n.

c) Utilisez cette modélisation pour prévoir la population à 20 heures.

142 Deux placements

Enzo choisit un placement à intérêts capitalisés. Il place une somme de 1 000 € le premier janvier 2011, au taux annuel de 2,5 %.
Valentin place le même jour une somme de 900 €, au taux annuel de 3 %. Les intérêts de ce placement sont également capitalisés.

a) Calculez les sommes dont ils disposeront un an plus tard.

b) On note u_n le capital dont disposera Enzo et v_n celui dont disposera Valentin le 1er janvier de l'année 2011 + n.
Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ?

c) De quelles sommes disposeront-ils le 1er janvier 2017 ?

d) En quel début d'année le capital de Valentin dépassera-t-il celui d'Enzo ?

Aide

Dire que les intérêts sont **capitalisés** signifie que chaque année ils sont ajoutés au capital et produisent, à leur tour, des intérêts.

143 Se méfier de la calculatrice

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :

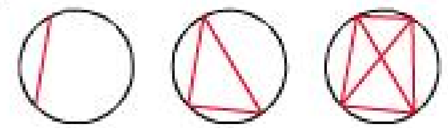
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{7} \\ u_{n+1} = 8u_n - 1 \end{cases}$$

a) Calculez, « à la main », les termes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Que vous permettent de conjecturer ces quelques calculs ?

b) Déterminez u_n avec la calculatrice pour n de 1 à 20. Que constatez-vous ?

144 Dénombrement

On place sur un cercle n points distincts et on s'intéresse au nombre p_n de segments ayant pour extrémités deux de ces points.



a) Indiquez les valeurs de p_2, p_3, p_4 et p_5.

b) n points étant placés et les p_n segments étant tracés, on ajoute un nouveau point, distinct des précédents. Combien de nouveaux segments pouvez-vous tracer ?

c) Déduisez de ce qui précède une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, puis utilisez cette relation pour exprimer p_n en fonction de n.

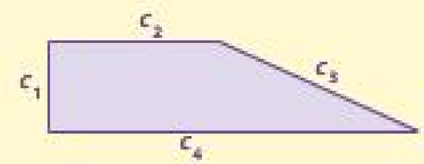
Prendre toutes les initiatives

145 Trouvez trois nombres a, b et c, termes consécutifs d'une suite géométrique, tels que :

$$\begin{cases} a + b + c = 21 \\ 2a + b - c = 27 \end{cases}$$

146 Exprimez de deux manières différentes le nombre 11,111 1111 comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

147 Les mesures des côtés d'un trapèze rectangle peuvent-elles être quatre termes consécutifs d'une suite géométrique ?



148 Nombres pentagonaux

Les nombres de points 1, 5, 12, 22 sont associés aux figures ci-dessous.
On suppose que le processus de construction se poursuit ainsi.
Combien de points sont associés à la figure 8 ? à la figure 2011 ?

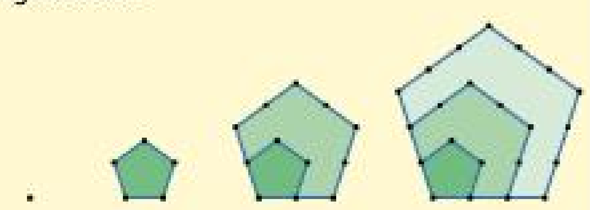


figure 1 figure 2 figure 3 figure 4

Travail en autonomie

EXERCICES

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les** ***coups de pouce*** **page 381.**

A Choisir son taux

À quel taux annuel doit-on placer une somme de 1 000 € pour obtenir au bout de 15 ans un capital de 1 800 € (à un euro près) sachant que les intérêts sont capitalisés annuellement.

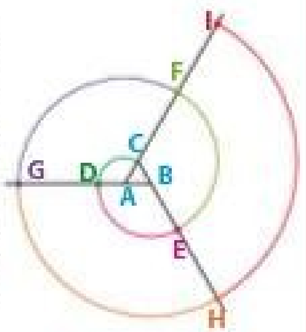
B Un peu d'Histoire

Un ouvrage d'Histoire est consacré aux Trois Glorieuses. Quel est le nombre de pages de cet ouvrage sachant que la somme des numéros des pages correspond à l'année du thème du livre ?

Amédée Bourgeois (1798-1837), Attaque de l'Hôtel de Ville de Paris et combat du pont d'Arcole, 28 juillet 1830, huile sur toile, Musée du Château de Versailles

C Une spirale

On construit la courbe ci-dessous de la manière suivante : Le triangle ABC est équilatéral de côté 1 cm. Tous les arcs de cercle, qui correspondent à des tiers de cercle, sont centrés en un des sommets A, B ou C. Le premier arc, $\overset{\frown}{CD}$, est centré en A, le second arc, $\overset{\frown}{DE}$, est centré en B, le troisième arc, $\overset{\frown}{EF}$, est centré en C, etc.



a) Quelle est la nature de la suite des rayons ?

b) Quelle est la longueur de la courbe obtenue en effectuant cinq tours (seuls deux tours sont représentés ici) ?

D Réduire au même numérateur

La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2-u_n} \end{cases}$$

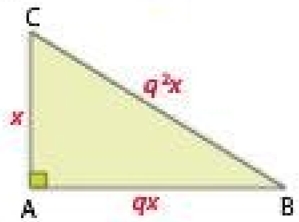
On admet que la suite est définie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire qu'aucun terme n'est égal à 2.

a) Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Conjecturez la valeur de u_{100}.

E Un triangle rectangle particulier

Les mesures des côtés d'un triangle rectangle peuvent-elles être trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ?



F Somme de sommes

L'objectif est de calculer la somme des nombres contenus dans le tableau suivant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	11	12	13	14	15	16	17

a) Pour les trois premières lignes, calculez la somme des nombres.

b) Déduisez-en la somme de tous les nombres.

G Une suite récurrente

Le programme ci-dessous est destiné à calculer le terme de rang P (non nul) d'une suite.

Avec une Casio

```
"P="?→P↵
1→N↵
1→U↵
While N≤P↵
U×N→U↵
N+1→N↵
WhileEnd↵
"U=":U◢
```

Avec une TI

```
:Prompt P
:1→N
:1→U
:While N≤P
:U*N→U
:N+1→N
:End
:Disp "U=",U
```

a) La suite est-elle arithmétique ?

b) La suite est-elle géométrique ?