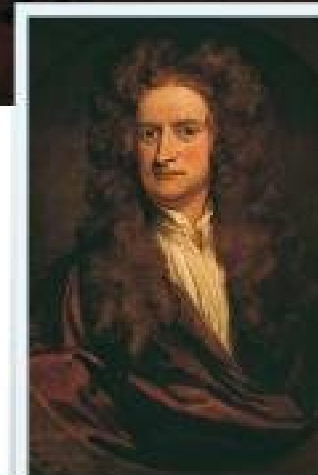
CHAPITRE

4 Fonctions dérivées. Applications

D'un siècle à un autre

Le Centre national de natation de Pékin, surnommé *Water Cube*, a été inauguré pour les Jeux olympiques de l'été 2008. Ce bâtiment écologique est un assemblage complexe de plastique et d'acier, mais il est également la solution à un vieux problème mathématique d'optimisation de pavage de l'espace : un maximum de volume pour un minimum de surface.

De nombreux problèmes d'optimisation peuvent être résolus grâce aux résultats des travaux de Newton et de Leibniz sur les dérivées.



En savoir plus sur **Isaac Newton**

→ Chercheurs d'hier p. 103

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Sens de variation d'une fonction

- Dire qu'une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I signifie que f conserve l'ordre.
Pour tous nombres u et v de I :
si $u < v$, alors $f(u) < f(v)$.

- Dire qu'une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I signifie que f inverse l'ordre.
Pour tous nombres u et v de I :
si $u < v$, alors $f(u) > f(v)$.

1 Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur I = [–8 ; 10].

x	–8		–1		0		3		10
$f(x)$	5	↘	0	↗	4	↘	–2	↗	6

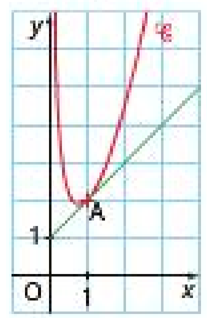
Complétez les pointillés avec < ou >.
a) $f(-5)$ …… $f(-4)$.
b) $f(6)$ …… $f(7)$.
c) u et v sont deux nombres de l'intervalle [0 ; 3] tels que $u < v$, alors $f(u)$ …… $f(v)$.
d) a et b sont tels que $-1 < a < b < 0$, alors $f(a)$ …… $f(b)$.

Nombre dérivé et tangente

- Lorsque f est dérivable en α, le nombre dérivé de f en α est :
$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}.$$

- La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse α a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$ et pour équation réduite :
$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$$

2 La fonction f, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est définie et dérivable sur l'intervalle I =]0 ; +∞[.
Sa fonction dérivée, f', est définie par :
$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}.$$
Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 1.



Minimum et maximum

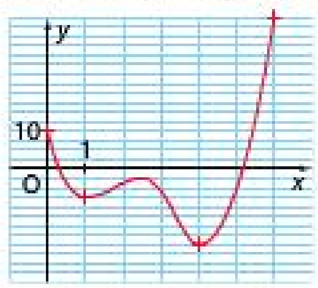
f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre appartenant à I.

- Dire que $f(a)$ est le **minimum de f sur I** signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur prise par la fonction, soit :
pour tout nombre x de I, $f(x) \geqslant f(a)$.

- Dire que $f(a)$ est le **maximum de f sur I** signifie que $f(a)$ est la plus grande valeur prise par la fonction, soit :
pour tout nombre x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.

3 Reprenons le tableau de variation de la question **1**.
a) Précisez le minimum et le maximum de f sur I.
b) Complétez le plus précisément possible :
Si $-1 \leqslant x \leqslant 3$, alors …… $\leqslant f(x) \leqslant$ …… .

4 La courbe représente une fonction g définie sur [0 ; 6].
a) Précisez le minimum et le maximum de g sur [0 ; 6].
b) Précisez le minimum et le maximum de g sur [0 ; 2].

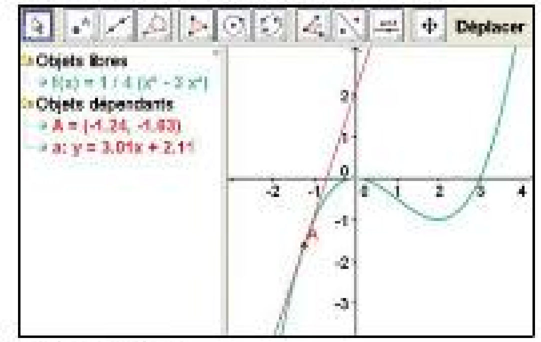


Voir les corrigés p. 363

Activité DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

TICE

1 **a)** À l'aide de GeoGebra, tracez la courbe représentative de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2).$$
b) Placez un point A, d'abscisse **négative**, sur la courbe. Sélectionnez l'icône et tracez la tangente à la courbe en A.



2 **a)** Déplacez le point A et observez le signe du coefficient directeur de la tangente dans la fenêtre algèbre lorsque l'abscisse de A reste inférieure à 0.
b) Recommencez cette observation, mais en faisant maintenant varier l'abscisse de A entre 0 et 2.
c) Enfin, déplacez A pour que son abscisse soit supérieure à 2 et observez de nouveau le signe du coefficient directeur.

3 **a)** Pour quelles valeurs de l'abscisse de A la tangente à la courbe en A est-elle horizontale ?
b) On étudie le sens de variation de f sur l'intervalle [–2 ; 4].
Complétez le tableau suivant par lecture graphique.

x	–2	0	…	4
Signe de $f'(x)$		…	0	
Sens de variation de f				

Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

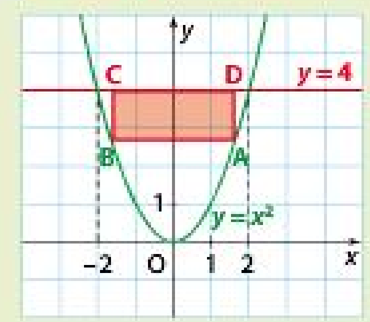
4 **a)** Tracez la courbe représentative d'une nouvelle fonction f en remplaçant $f(x)$ par $\frac{x+1}{x-4}$.
b) On étudie le sens de variation de f sur chacun des intervalles]–10 ; 4[et]4 ; 10[.
Déplacez le point A et construisez un tableau dans lequel vous ferez apparaître le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
c) Quelle conjecture pouvez-vous émettre concernant le lien entre le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f sur un intervalle I ?

Aide
Un clic droit sur l'équation de f vous permet de modifier l'expression de $f(x)$ (menu **Propriétés**, onglet **Basique**).

Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

Dans un repère orthonormé, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et la droite d d'équation $y = 4$.
A et B sont deux points de $\mathscr{P}$ ayant la même ordonnée (inférieure à 4).
C et D sont les deux points de la droite d tels que ABCD est un rectangle.
Estimez la position de A pour laquelle l'aire du rectangle ABCD est maximale.



1 Opérations sur les fonctions dérivées

1.1 Dérivée de la somme $u + v$

Théorème 1

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Principe de la démonstration. Pour démontrer que $u + v$ est dérivable sur I, on prouve que pour tout nombre a de I, le taux d'accroissement de $u + v$ entre a et $a + h$ (où $h \neq 0$ et $a + h \in$ I) a une limite finie lorsque h tend vers 0.

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.

On admet alors le résultat suivant.
Lorsque h tend vers 0, la limite du taux d'accroissement de $u + v$ en a est $u'(a) + v'(a)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a).$$

Ceci est vrai pour tout nombre a de l'intervalle I donc $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Exemple. Sur I $=]0\,;+\infty[$, la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ est la somme des deux fonctions, u et v, dérivables sur I telles que $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.

Leurs dérivées sont définies par $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Il en résulte que f est dérivable sur I et que $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

1.2 Dérivée de λu

Théorème 2

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et λ est un nombre réel.
Alors la fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Principe de la démonstration. Pour démontrer que λu est dérivable sur I, on prouve que pour tout nombre a de I, le taux d'accroissement de λu entre a et $a + h$ (où $h \neq 0$ et $a + h \in$ I) a une limite finie lorsque h tend vers 0.

$$\frac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \frac{\lambda \times u(a+h) - \lambda \times u(a)}{h} = \lambda \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}.$$

Or, par hypothèse, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$. On admet alors le résultat suivant.
Lorsque h tend vers 0, la limite du taux d'accroissement de λu en a est $\lambda u'(a)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \lambda u'(a).$$

Ceci est vrai pour tout nombre a de l'intervalle I donc λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Remarque. Si $\lambda = -1$, on obtient $(-u)' = -u'$. On déduit alors du théorème 1 que si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors $(u - v)' = u' - v'$.

Conséquence. Dérivée des fonctions polynômes. Il résulte des théorèmes 1 et 2, ainsi que du théorème 3 du chapitre 3, que :

Théorème 3
Admis

Toute fonction polynôme $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (avec $a_n \neq 0$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est P' :

$$P' : x \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Exemple. La fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = 3(5x^4) - 2(3x^2) + 5(2x) = 15x^4 - 6x^2 + 10x$.

1.3 Dérivée du produit uv

Théorème 4

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Principe de la démonstration. Pour démontrer que uv est dérivable sur I, on prouve que pour tout nombre a de I, le taux d'accroissement de uv entre a et $a + h$ (où $h \neq 0$ et $a + h \in$ I) a une limite finie lorsque h tend vers 0.

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)\,v(a+h) - u(a)\,v(a)}{h}.$$

Un changement d'écriture permet de faire apparaître les taux d'accroissement de u et de v :

$$\frac{u(a+h)\,v(a+h)-u(a)\,v(a)}{h} = \frac{u(a+h)\,v(a+h) - u(a)\,v(a+h) + u(a)\,v(a+h) - u(a)\,v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}.$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.

On admet alors le résultat suivant, lorsque h tend vers 0 : si v est dérivable en a, alors $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.

Il en résulte que la limite, lorsque h tend vers 0, du taux d'accroissement de uv en a est :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)\,v(a) + u(a)\,v'(a).$$

Ceci est vrai pour tout nombre a de l'intervalle I donc uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple. Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions dérivables définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$, dont les dérivées sont définies par $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

f est dérivable sur I et $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Conséquence. Si u est dérivable sur I, alors u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = u'u + uu' = 2uu'$.

1.4 Dérivée du quotient $\frac{u}{v}$

Théorème 5
Admis

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et, pour tout nombre a de I, $v(a) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple. Sur I $=]3\,;+\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x+1)\times 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

Conséquence. Si v est dérivable sur I et si, pour tout nombre a de I, $v(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{0 \times v - 1 \times v'}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}$. Ainsi, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

2 Sens de variation

2.1 Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème 6

Admis

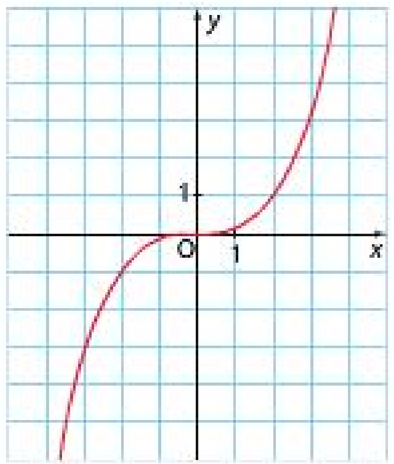
f est une fonction dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est f'.

- Si f' est **strictement positive sur** I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est **strictement négative sur** I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est **nulle sur I**, alors f est constante sur I.

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{3}{8}x^2$.

Donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où elle s'annule.

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2.2 Extremum local

Définition 1

f est une fonction définie sur un intervalle I et c est un nombre de I.

Dire que $f(c)$ est un **maximum** (resp. **minimum**) local de f signifie qu'il existe un intervalle **ouvert** J contenant c et inclus dans I tel que, pour tout x de J, $f(x) \leqslant f(c)$ (resp. $f(x) \geqslant f(c)$).

Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local.

Animation

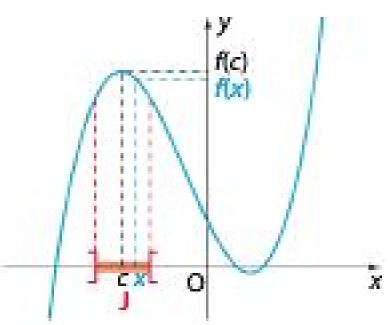
Exemple. Pour tout nombre x de l'intervalle ouvert J, $f(x) \leqslant f(c)$: $f(c)$ est un maximum local de f.

Remarque. Pour une fonction **dérivable** f, s'il existe un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

Attention. La réciproque est fausse.

Dans l'exemple du 2.1, $f'(0) = 0$.

Cependant $f(0)$ n'est pas un extremum local : la dérivée ne change pas de signe donc la fonction ne change pas de sens de variation.



Compléments numériques

OBJECTIF 1 Déterminer des fonctions dérivées

- **Théorèmes 1, 2 et 4.** u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors :
  - $(u+v)' = u' + v'$ • $(\lambda u)' = \lambda u'$ • $(uv)' = u'v + uv'$ • $(u^2)' = 2uu'$.
- **Théorème 5.** u et v sont dérivables sur un intervalle I et pour tout nombre a de I, $v(a) \neq 0$, alors :
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} ; \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$
- **Théorème 3.** Toute fonction polynôme $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $P' : x \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

EXERCICE RÉSOLU A Dériver des fonctions du type $u + v$ et λu

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 7$.
Justifiez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $f'(x)$.

2. g est la fonction définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1 - \frac{3}{2x}$.
Justifiez que g est dérivable sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$, puis calculez $g'(x)$.

Méthode

1. On applique le théorème 3.

- On conclut.

2. On définit g comme étant la somme de deux fonctions que l'on sait dériver sur l'intervalle I.

- On applique les théorèmes 1, 2 et 5 pour calculer $g'(x)$.
- On conclut.

Solution

1. f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 7$.

$f'(x) = 5 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 6 \times 1 - 0$.

- f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 15x^2 - 6x + 6$.

2. La fonction polynôme $u : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur I. g est définie sur I par $g(x) = u(x) - \frac{3}{2}v(x)$.

Les fonctions u et v étant dérivables sur I, g est dérivable sur I.

- $g'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.
- Pour tout x de I, $g'(x) = x^2 + 2x + \frac{3}{2x^2}$.

Mise en pratique

1 Déterminez les fonctions dérivées des fonctions polynômes suivantes, définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$.

c) $h(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 5x - 1}{5}$.

2 u et v sont deux fonctions définies sur $I =]0 ; +\infty[$ par $u(x) = 3x^3 + 2x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.
On note f et g les fonctions définies sur I par $f = u + v$ et $g = \frac{2}{3}u - \frac{1}{4}v$.

1. Démontrez que f et g sont dérivables sur I.

2. Calculez, pour tout nombre x de I, $f'(x)$ et $g'(x)$.

3 **1.** Pourquoi la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{x}$ est-elle dérivable sur I ?

2. Calculez, pour tout nombre x de I, $f'(x)$.

4 f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 4\sqrt{x} + 2x^2 - 1$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.
Trouvez une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

EXERCICE RÉSOLU B Dériver des fonctions de type uv et $\frac{u}{v}$

Pour chacune des fonctions f suivantes dites si elle est dérivable sur $I =]0\,;+\infty[$ puis calculez $f'(x)$.

1. $f(x) = (2x^2 - 1)\sqrt{x}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{2x + 5}$.

Méthode

1. On définit f comme étant le produit de deux fonctions dont on connaît les fonctions dérivées.

- On calcule $u'(x)$ et $v'(x)$.
- On calcule $f'(x)$ en utilisant la formule de dérivation :

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

- On conclut.

2. On définit f comme étant le quotient de deux fonctions dont on connaît les fonctions dérivées.

- On calcule $u'(x)$ et $v'(x)$.
- On en déduit $f'(x)$ en utilisant la formule de dérivation :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

- On développe le numérateur puis on conclut.

Solution

1. f est de la forme uv avec $u(x) = 2x^2 - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur I.

- Pour tout x de I, $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$ soit :

$$f'(x) = 4x\sqrt{x} + (2x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- $f'(x) = \dfrac{8x(\sqrt{x})^2 + 2x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{10x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$.

2. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 8$ et $v(x) = 2x + 5$.
u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I ; v est dérivable sur I et pour tout x de I, $v(x) \neq 0$ donc f est dérivable sur I.

- $u'(x) = 2x - 4$ et $v'(x) = 2$.
- $f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2}$ soit :

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(2x+5) - 2(x^2 - 4x + 8)}{(2x+5)^2}.$$

- $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 10x - 36}{(2x+5)^2}$.

Mise en pratique

Pour les exercices 5 et 6
Calculez $f'(x)$ en précisant sur quel(s) intervalle(s) votre calcul est valable.

5 a) $f(x) = (2x - 1)(5x + 8)$.
b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$.
c) $f(x) = (x^2 - x)\sqrt{x}$.

6 a) $f(x) = -\dfrac{4}{x^3}$.
b) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{x - 2}$.
c) $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{2 + x^2}$.
d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 - x}$.

7 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}.$$

1. Démontrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculez $f'(x)$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}$, courbe représentative de f, au point d'abscisse a, où a est un nombre quelconque.

8 u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $u(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$ et $v(x) = \dfrac{-5}{x + 1}$.
1. a) Démontrez que u et v sont dérivables sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.
b) Calculez $u'(x)$ et $v'(x)$. Que remarquez-vous ?
2. Pour tout nombre x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, calculez $f(x) = u(x) - v(x)$.
Justifiez alors la remarque de la question 1.

OBJECTIF 2 Exploiter le sens de variation d'une fonction

- **Théorème 6.** f est une fonction dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est f'.
- Si f' est **strictement positive** (respectivement strictement négative) **sur** I, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I.
- Si f' est **nulle** sur I, alors f est constante sur I.

EXERCICE RÉSOLU C Déterminer le sens de variation

f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x - 1$.

1. Donnez l'expression de $f'(x)$.
2. Dressez un tableau dans lequel vous indiquerez le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
3. Déduisez-en les extremums locaux éventuels.

Méthode

1. On utilise les règles de dérivation.

2. $f'(x)$ est un trinôme du second degré. Pour étudier son signe, on commence par rechercher ses éventuelles racines.

- Le trinôme est du signe du coefficient de x^2 sauf entre ses racines.

3. On place les valeurs des racines dans la 1re ligne du tableau.

- Dans la 2e ligne, on indique le signe de la dérivé f'.
- Dans la 3e ligne, on indique les valeurs remarquables de la fonction f ainsi que son sens de variation en utilisant des flèches.
- La lecture du tableau permet de conclure.

Solution

1. $f'(x) = \dfrac{2}{3}(3x^2) + \dfrac{3}{2}(2x) - 2 \times 1 = 2x^2 + 3x - 2$.

2. $f'(x)$ est un trinôme du second degré. Son discriminant Δ étant positif ($\Delta = 3^2 + 4 \times 4 = 25$), le trinôme $2x^2 + 3x - 2$ admet deux racines : $x_1 = -2$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

- Le coefficient a est positif ($a = 2$) donc $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]-2\,;\dfrac{1}{2}\right[$ et $f'(x) > 0$ pour $x < -2$ ou $x > \dfrac{1}{2}$.

3. On dresse le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗	$\dfrac{11}{3}$	↘	$-\dfrac{37}{24}$	↗	

- f admet un maximum local, $\dfrac{11}{3}$, en -2 et un minimum local, $-\dfrac{37}{24}$, en $\dfrac{1}{2}$.

Mise en pratique

Pour les exercices 9 et 10
Les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
1. Donnez l'expression de $f'(x)$.
2. Déterminez son signe suivant les valeurs de x puis dressez le tableau de variation de f.

9 a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$.
b) $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$.
c) $f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$.

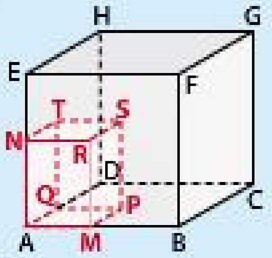
10 a) $f(x) = \dfrac{-3x}{1 + x^2}$. b) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2 + 4}$.

11 Dans chacun des cas suivants, étudiez les variations de la fonction f après avoir déterminé son ensemble de définition.
a) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x - 3}$. b) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x + 1}$.

12 Déterminez les extremums locaux éventuels des fonctions suivantes :
a) $f : x \mapsto x(x^2 - 1)$;
b) $f : x \mapsto 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4$.
c) $f : x \mapsto \dfrac{2 - x}{x^2 + 1}$.

EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU D Utiliser le sens de variation pour optimiser et encadrer



ABCDEFGH est un cube de côté 6 centimètres. M est un point de [AB] et N est un point de [AE] tels que AM = EN = x, avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.
AMPQNRST est un pavé droit de base le carré de côté x et de hauteur [AN].

1. Vérifiez que le pavé droit a pour volume $V(x) = x^2(6 - x)$, avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.

2. Étudiez les variations de la fonction V et dressez son tableau de variation.

3. a) Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ?

b) Déterminez un encadrement du volume $V(x)$ lorsque $3 \leqslant x \leqslant 5$.

Méthode

1. On utilise la formule donnant le volume d'un pavé droit.

Rappel
Le volume d'un pavé droit rectangle est $V = B \times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur.

2. On calcule $V'(x)$.

• **On étudie le signe de $V'(x)$**
$V'(x)$ est un polynôme du second degré.
On recherche ses racines éventuelles.
On détermine alors son signe.

• **On dresse le tableau de variation de V sur [0 ; 6]**
On indique d'abord le signe de $V'(x)$.
On en déduit le sens de variation de V.

3. a) La lecture du tableau permet de conclure.

b) On note dans le tableau V(3) et V(5), et on conclut.

Solution

1. $V(x) = AM^2 \times AN = x^2(6 - x) = -x^3 + 6x^2$.

2. V est une fonction polynôme donc V est dérivable sur I = [0 ; 6].
$V'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$.

• $V'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 4.
Le coefficient du terme en x^2 est négatif ($a = -3$) donc $V'(x) > 0$ pour $0 < x < 4$ et $V'(x) < 0$ pour $4 < x < 6$.

x	0	3	4	5	6
$V'(x)$	0	+	0	−	
$V(x)$	0 ↗	27 ↗	32	25 ↘	0

3. a) Le volume est maximal (32 cm³) pour $x = 4$.

b) Si $3 \leqslant x \leqslant 5$, alors $25 \leqslant V(x) < 32$.

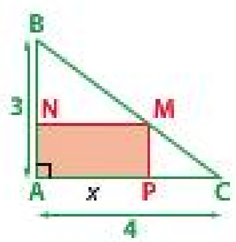
Mise en pratique

13 Dans le département de Charente-Maritime, lors d'une épidémie de grippe, le nombre de personnes malades n jours après l'apparition des premiers cas est estimée à $30n^2 - n^3$.
n est un entier tel que $0 \leqslant n \leqslant 30$.

1. a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur [0 ; 30] par :
$$f(x) = 30x^2 - x^3.$$
b) Dressez le tableau de variation.

2. a) Déduisez de la question précédente le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 30 jours.
b) Précisez le nombre de personnes malades ce jour-là.

14 ABC est un triangle rectangle en A.
AC = 4, AB = 3. P est un point du segment [AC].
On construit le rectangle APMN et on pose AP = x, avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.



1. a) Calculez MP en fonction de x.
b) Déduisez-en que l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle MNAP est égale à $\frac{3}{4}(4x - x^2)$.

2. a) Étudiez les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle [0 ; 4].
b) Déduisez-en la valeur de x pour laquelle $\mathcal{A}$ est maximale.

Pour se tester

Exercices interactifs

EXERCICES

15 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

1. u et v sont deux fonctions dérivables sur I.
a) $(uv)' = \ldots\ldots$
b) $(u + v)' = \ldots\ldots$
c) v ne s'annulant pas sur I, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \ldots\ldots$

2. Multiplier une fonction dérivable par une constante λ multiplie sa dérivée par ……

3. f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
a) Si, pour tout nombre x de I, $f'(x) > 0$, alors, sur I, f est ……
b) Si, pour tout nombre x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors, sur I, f est ……

4. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre x de]−2 ; 1[, $f(x) \leqslant f(0)$. $f(0)$ est un ……

16 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 6x - 3$ est croissante sur [0 ; 1].
b) La dérivée d'une fonction polynôme de degré 3 est une fonction polynôme de degré 2.
c) Il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de maximum sur $\mathbb{R}$.
d) Si f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout nombre x, $f'(x) > 0$.
e) Deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ont la même fonction dérivée sont égales.
f) Ajouter une constante à une fonction ne change pas sa dérivée.

17 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

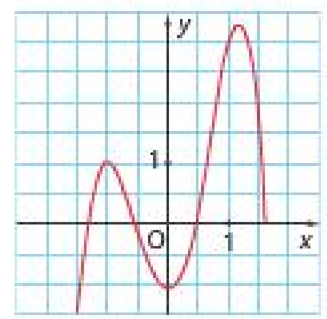
1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{-2x^3 + 6x - 4}{3},$$
alors $g'(x)$ est égal à :
a) $-6x + 6$
b) $-2x^2 + 2$
c) $-6x^2 + 6$
d) $-2x^2 + 2x - \frac{4}{3}$

2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :
$$h(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}.$$
a) $h'(x) = 2x - 2$.
b) Si $-1 < a < b$, alors $h(a) > h(b)$.
c) La courbe représentative de h admet deux tangentes horizontales.
d) La tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

18 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. La courbe ci-contre représente une fonction f dérivable sur I = [−1,5 ; 1,6].



a) La courbe admet trois tangentes horizontales.
b) La fonction dérivée de f est positive sur [0 ; 1,6].
c) Pour tout nombre x de I, $-2 < f(x) < 3,5$.

2. f et g sont deux fonctions dérivables en 2 avec :
• $f(2) = 0$ • $f'(2) = 3$ • $g(2) = -4$ • $g'(2) = -1$
a) $(f + g)'(2) = 2$.
b) $(f \times g)'(2) = -3$.
c) $(f/g)'(2) = -12$.
d) $(f^2)'(2) = 0$.

3. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = ax^3 + bx^2 - ax + c \quad (a > 0).$$
a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - a$.
b) f' change de signe.
c) f n'admet aucun extremum local.
d) f est monotone.

Voir les corrigés p. 366

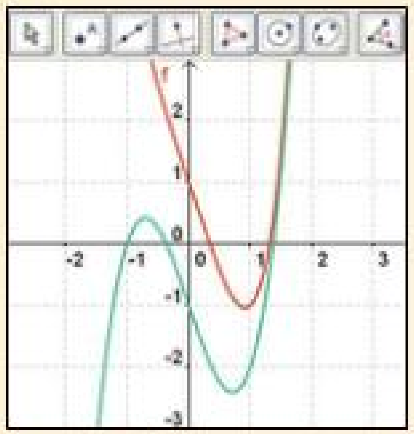
Apprendre à chercher

19 Comparaison de fonctions

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$.

Objectif Comparer ces fonctions.

1. Pour se faire une idée, on peut observer les représentations graphiques de f et g à l'aide d'une calculatrice ou de GeoGebra.



Quelle conjecture faites-vous ?

2. Comparer f et g signifie trouver l'ensemble des nombres x tels que $f(x) \geqslant g(x)$ et l'ensemble des nombres x tels que $f(x) \leqslant g(x)$. En général le plus simple est d'introduire la fonction « différence » d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - g(x)$ puis d'étudier le signe de $d(x)$.

Trouvez et simplifiez $d(x) = f(x) - g(x)$.

3. Le signe de $d(x)$ n'est pas évident. On pense alors à étudier, par dérivation, les variations de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - g(x)$.

a) Vérifiez que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez, pour tout nombre x de $\mathbb{R}$, $d'(x)$.

b) Étudiez le signe de $d'(x)$.

c) Dressez le tableau de variation de d.

d) Le tableau laisse apparaître un minimum. Quelle est sa valeur ? Que peut-on en déduire quant au signe de $d(x)$?

e) Concluez.

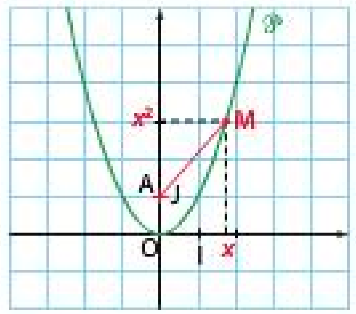
Commentaire

On a pu conclure facilement car, pour tout x de $\mathbb{R}$, $d(x) > 0$. Cela aurait été aussi le cas si d avait eu un maximum négatif ($d(x) < 0$).

En dehors de ces deux cas, établir le signe de $f(x)$ à partir du tableau de variations de d est plus difficile : il faut faire apparaître les antécédents de zéro par d, c'est-à-dire être capable de résoudre l'équation $d(x) = 0$, ce que l'on ne sait pas toujours faire.

20 Minimiser une distance

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$. M est un point quelconque de $\mathscr{P}$ d'abscisse x, et A est le point de coordonnées (0 ; 1).



Objectif Trouver la position du point M telle que la distance AM soit minimale.

1. Pour se faire une idée, on peut construire la figure avec GeoGebra et déplacer le point M.

Quelle conjecture faites-vous ?

2. On admet que « il existe un point M tel que AM est minimal » équivaut à « il existe un point M tel que AM² est minimal ».

Connaissant A(0 ; 1) et M(x ; x^2), on calcule AM² en fonction de x.

Démontrez que $AM^2 = x^4 - x^2 + 1$.

3. La parabole admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie, il suffit donc d'étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

a) Calculez $f'(x)$ et étudiez son signe.

b) Dressez le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

c) Déduisez de ce qui précède qu'il existe deux points M pour lesquels la distance AM est minimale. Calculez cette distance.

4. Pour obtenir les points M qui répondent au problème posé, on utilise le fait que leurs abscisses sont des nombres remarquables, liés à une configuration classique : le carré.

a) Construisez le carré OIKJ de centre Ω.

b) Le cercle de centre O passant par Ω coupe l'axe des abscisses en deux point, L_1 et L_2.
Préciser les abscisses de L_1 et de L_2.

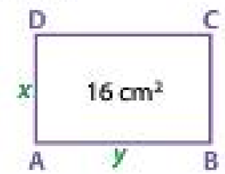
c) Déduisez de ce qui précède, la construction des points M de la parabole pour lesquels la distance AM est minimale.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

21 Un rectangle de périmètre minimal

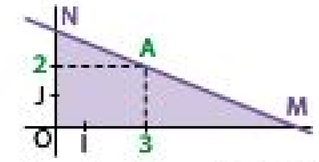
1. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « De tous les rectangles d'aire 16 cm², le carré est celui de périmètre minimal » ?



2. Plus généralement, l'affirmation précédente est-elle encore vraie si l'aire du rectangle est égale à a, avec $a > 0$?

22 Un triangle d'aire minimale

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on donne le point A(3 ; 2).



M est un point de coordonnées (x ; 0), avec $x > 3$.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en N. Après avoir démontré que :

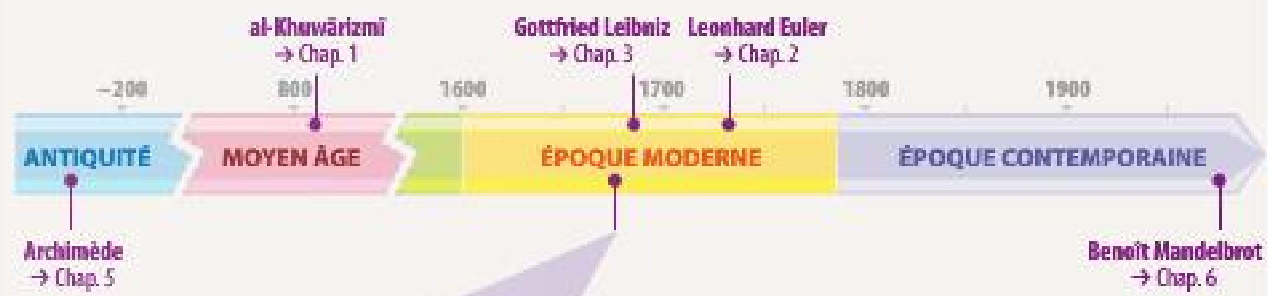
$$\text{aire (OMN)} = \frac{x^2}{x-3},$$

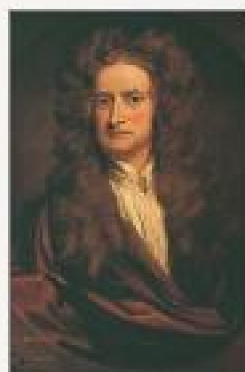
trouvez la position exacte de M pour laquelle l'aire du triangle OMN est minimale.

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.





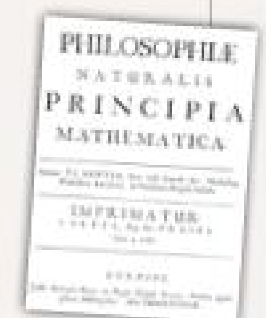
Isaac Newton (1643-1727)

Newton est considéré au même titre que Leibniz comme le fondateur du calcul différentiel.

Ses travaux sur les fonctions et les courbes sont de première importance.

Il est aussi célèbre pour ses travaux sur la gravitation (la pomme…).

Il prétendait que l'on peut comprendre tout l'Univers grâce à de simples lois mathématiques.



▲ Un œuvre majeure dans l'histoire des sciences.

Sur le Web http://www.astrofiles.net/astronomie-isaac-newton

Utiliser GeoGebra

→ Pour résoudre un problème d'optimisation

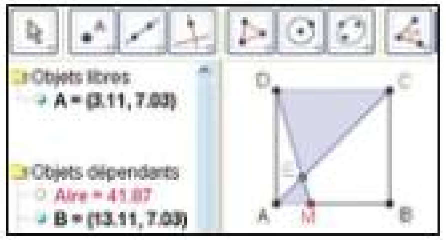
TP 23 Recherche d'une aire minimale

COMPÉTENCES

TICE
- Construire une figure
- Utiliser l'affichage des grandeurs pour conjecturer un résultat
- Construire le point solution

Mathématiques
- Calculer l'aire d'une figure
- Utiliser le théorème de Thalès
- Transformer une écriture algébrique
- Étudier les variations d'une fonction

ABCD est un carré de côté 10.
M est un point du segment [AB]. On pose AM = x.
Les segments [DM] et [AC] se coupent en E.
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la figure formée par les deux triangles AEM et DEC (surface colorée sur le dessin).
Le but de l'exercice est de déterminer pour quelle position de M sur [AB] l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.



1. Réaliser la figure outil 1

a) Construisez le segment [AB] de longueur 10 (icône), puis construisez le carré ABCD.

b) Placez le point M sur [AB]. Construisez les segments [DM] et [AC], puis créez le point E.

c) Créez les triangles AEM et DCE. Leurs aires s'affichent dans la fenêtre Algèbre : poly2 et poly3.

Aide
- Pour créer le carré ABCD, sélectionnez l'icône, cliquez sur A puis sur B, et indiquez 4 pour le nombre de points.
- Pour créer le triangle AEM par exemple, sélectionnez l'icône, cliquez sur les points A, E et M, puis de nouveau sur A.

2. Conjecturer avec GeoGebra

a) Définissez l'aire $\mathcal{A}(x)$ dans la zone de saisie. Saisie : Aire=poly2+poly3

b) Déplacez le point M sur [AB] et observez les variations de l'aire dans la fenêtre Algèbre.
Conjecturez la position du point M pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale et une valeur approchée de cette aire.

3. Démontrer

La perpendiculaire à (AB) passant par E coupe [AB] en H et [CD] en H'.
On note h la longueur EH.

a) Démontrez que AHEM est un carré.

b) Justifiez l'égalité : $\frac{h}{10-h} = \frac{x}{10}$.

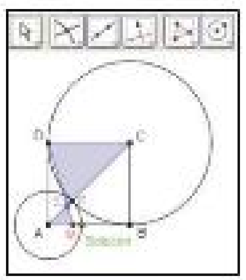
c) Déduisez-en que $h = \frac{10x}{10+x}$.

d) Montrez que $\mathcal{A}(x) = \frac{5x^2+500}{x+10}$.

e) Étudiez les variations de la fonction $\mathcal{A}$ et répondez au problème posé.

4. Construire le point solution

Tracez le cercle de centre C et de rayon 10 cm qui coupe [AC] en un point F. Puis tracez le cercle de centre A et de rayon AF. Démontrez que ce dernier cercle coupe le segment [AB] en un point qui répond au problème posé.



Utiliser GeoGebra

→ Pour résoudre un problème d'optimisation

TP 24 Recherche d'un volume maximal

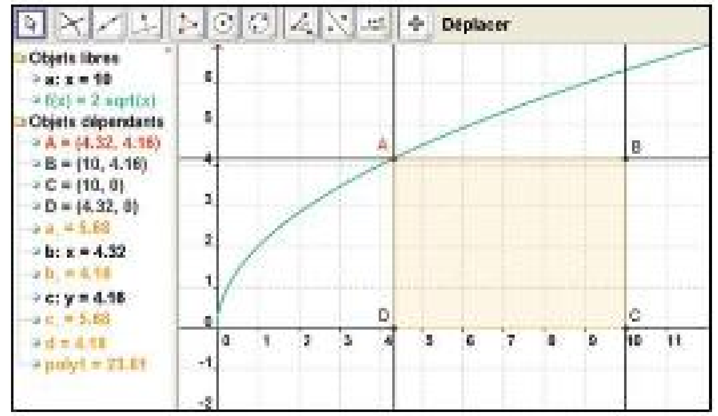
COMPÉTENCES

TICE
- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique
- Utiliser l'affichage des grandeurs pour conjecturer un résultat

Mathématiques
- Calculer la dérivée d'une fonction
- Étudier les variations d'une fonction et déterminer un maximum

Un artisan envisage de construire, sous un hangar dont la base est un carré de vingt mètres de côté, une salle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Il souhaite obtenir un volume maximal.

Il constate que son problème peut se réduire à la recherche d'un rectangle ABCD d'aire maximale, comme l'indique la figure ci-contre, le sommet A étant un point de la courbe représentative de la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(x) = 2\sqrt{x}$.



1. Conjecturer avec GeoGebra

a) Créez la courbe et un point A sur cette courbe.

b) Créez la droite d'équation $x = 10$, puis les droites perpendiculaires aux axes passant par A.

Aide Pour la courbe, saisissez f(x) = 2 sqrt(x).

c) Créez les points d'intersection B, C et D et enfin le rectangle ABCD dont l'aire, « poly1 », s'affiche dans la fenêtre Algèbre.

d) Déplacez le point A sur la courbe et observez l'évolution du nombre « poly1 ».
Conjecturez la position de A pour laquelle le nombre « poly1 » est maximal.

2. Démontrer

On note x l'abscisse du point A.

a) Prouvez que l'aire (en m²) du rectangle ABCD est égale à $2(10-x)\sqrt{x}$.

b) Notons g la fonction définie sur]0 ; 10] par $g(x) = 2(10-x)\sqrt{x}$.
Justifiez la dérivabilité de la fonction g sur l'intervalle]0 ; 10] puis exprimez $g'(x)$.

c) Déduisez de ce qui précède les variations de la fonction g.
Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle ABCD est-elle maximale ?

d) Concluez en donnant les dimensions pour lesquelles le volume de la salle est maximal, puis calculez ce volume à 1 m³ près.

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

25 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Calculez $f'(x)$.

26 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x + 1$.
Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 ?

27 Quel est le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$?

28 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ est-elle décroissante sur $[-1\,;1]$?

29 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$. Lorsque x appartient à l'intervalle $[-2\,;0]$, à quel intervalle appartient $f(x)$?

30 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$. Si x appartient à l'intervalle $[0\,;3]$, à quel intervalle appartient $f(x)$?

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Pour les exercices 31 à 37
Calculez $f'(x)$ sur l'intervalle I indiqué.

31 $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

32 $f(x) = (3x-1)(x+1)^2$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

33 $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2$ et $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

34 $f(x) = \frac{3}{4x} - \frac{2x}{5}$ et $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

35 $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ et $\mathrm{I} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

36 $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{4-x}$ et $\mathrm{I} =]-\infty\,;4[$.

37 $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{3-x}$ et $\mathrm{I} =]-\infty\,;3[$.

38 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$ et $g(x) = \frac{9}{x-2}$.

1. a) Prouvez que f et g sont dérivables sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

b) Calculez $f'(x)$ et $g'(x)$. Que remarquez-vous ?

2. Calculez $f(x) - g(x)$. Justifiez alors la remarque de la question 1.

DÉRIVÉES ET TANGENTES

Pour les exercices 39 à 41
Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.

39 $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$ et $a = -1$.

40 $f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{x^2+1}$ et $a = 0$.

41 $f(x) = (4x+8)\sqrt{x}$ et $a = 4$.

42 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$.

1. Pourquoi f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Calculez $f'(x)$.

2. Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a, où a est un nombre quelconque.

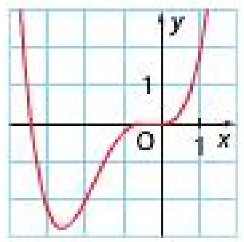
43 La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 8.$$

1. Calculez $g'(x)$.

2. Démontrez que la courbe représentative de g admet deux tangentes horizontales. Précisez les abscisses des points correspondants.

44 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 6$. Démontrez que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 passe par le point A(0 ; 8).

45 La courbe ci-dessous est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$



1. En combien de points la courbe semble-t-elle avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

2. Par le calcul, trouvez la valeur exacte des abscisses de ces points.

46 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. a) Démontrez que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$.

b) Calculez $f'(x)$.

2. Quels sont les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$?

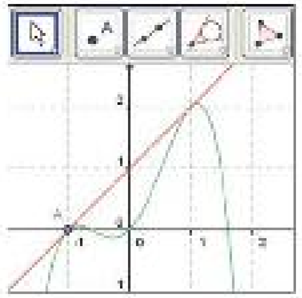
3. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point A(0 ; 1) ?

47 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 5$?
Si oui, précisez en quels points.

48 Avec GeoGebra, on a obtenu la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$$
et la tangente T à cette courbe au point A(−1 ; 0).

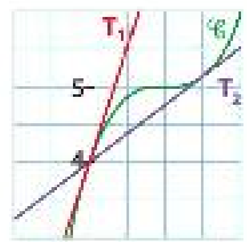


Cette droite T semble être tangente à la courbe en un second point. Démontrez-le.

49 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$
et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. Déterminez les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 3.

2. On a tracé ci-contre une partie de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.
Il semble que par le point A(0 ; 4) on puisse mener à $\mathscr{C}$ deux tangentes. Démontrez-le.



50 **1.** On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

a) Donnez l'expression de $f'(x)$.

b) Déterminez l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f, au point d'abscisse 0. Vérifiez à l'aide de votre calculatrice.

2. Faites de même avec la fonction polynôme :
$$g : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 3x + 2.$$

3. Que remarquez-vous concernant l'équation réduite de la tangente au point $(0\,;g(0))$? Éventuellement, recommencez avec une ou plusieurs fonctions polynômes de votre choix.

4. a, b, c et d sont quatre nombres réels ($a \neq 0$). P est la fonction polynome définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\mathrm{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a) Calculez P(0) et P′(0).

b) Déterminez l'équation réduite de la tangente de la courbe $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ représentative de P au point d'abscisse 0. Énoncez la propriété établie.

5. La propriété établie est-elle vérifiée par la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x+1} + 2x + 1$?

POSITIONS RELATIVES D'UNE COURBE ET D'UNE DE SES TANGENTES

51 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Le but de l'exercice est d'étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 1.

1. Donnez l'équation réduite de T.

2. On considère la fonction g définie par :
$$g(x) = f(x) - (4x - 3).$$

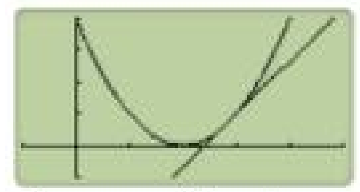
a) Étudiez les variations de g et dressez son tableau de variation.

b) Calculez $g(-3)$. Placez -3 et $g(-3)$ dans le tableau de variation.

c) Déduisez-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x et concluez.

52 **Avec la calculatrice**

À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu la droite d'équation $y = \frac{5}{3}x - 4$ et la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

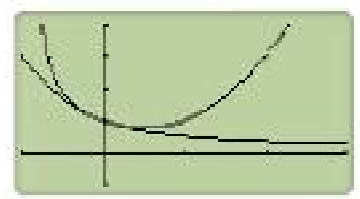


La droite semble tangente à la courbe.
Est-ce bien le cas ?

53 **Avec la calculatrice**

Sur l'écran de la calculatrice sont affichées (en partie) les représentations graphiques des fonctions :

- $f : x \mapsto x^2 - x + 1$;
- $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.



1. Distinguez l'arc de parabole lié à f de l'arc d'hyperbole lié à g.

2. a) Quelle conjecture pouvez-vous faire en ce qui concerne d'éventuels points communs à ces deux courbes ?

b) Démontrez-le par le calcul.

3. a) Quelle conjecture pouvez-vous faire en ce qui concerne les tangentes à chacune de ces courbes en un point commun ?

b) Démontrez-le par le calcul ?

SENS DE VARIATION

Pour les exercices 54 à 60
Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle I indiqué, où elle est définie et dérivable.

54 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ et $I = \mathbb{R}$.

55 $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{5}{6}x - 5$ et $I = \mathbb{R}$.

56 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 3$ et $I = \mathbb{R}$.

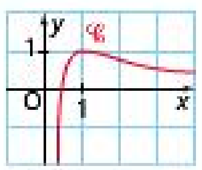
57 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^2}$ et $I = [-6 ; 0[$.

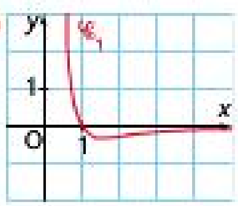
58 $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x - 1}$ et $I =]1 ; +\infty[$.

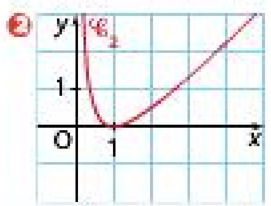
59 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 6}$ et $I = \mathbb{R}$.

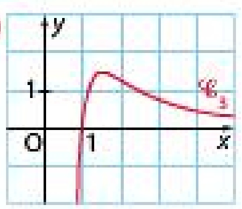
60 $f(x) = (3 - x)\sqrt{x}$ et $I =]0 ; 9]$.

61 La figure ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f ?

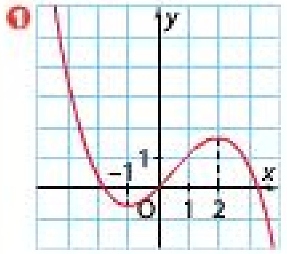


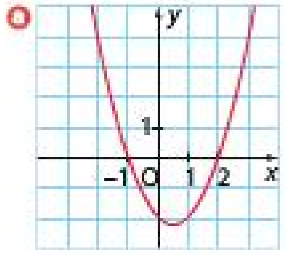
1


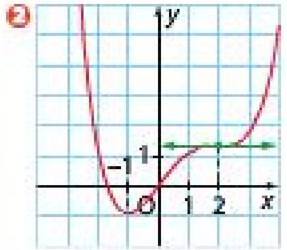
2


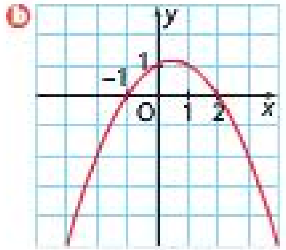
3


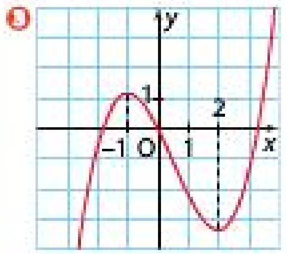
62 Les courbes suivantes représentent trois fonctions (courbes 1, 2, 3) et leurs fonctions dérivées (courbes a, b, c) dans un ordre arbitraire.
Observez attentivement ces courbes et associez à chaque fonction sa fonction dérivée.

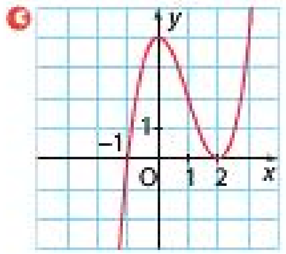
1


a


2


b


3


c


63 On donne le tableau suivant concernant une fonction f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↗	1	↘	‖	↘	-1	↗	2	↘	

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est celui de f' ?

2. f possède-t-elle des extremums locaux ?

3. Esquissez une courbe possible pour f.

64 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2.$$

1. Dressez le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminez un encadrement de $f(x)$ sur les intervalles :
• $[0 ; 1]$ • $[0 ; 3]$ • $[-3 ; 0]$ • $[-3 ; 3]$.

65 **« Pour tout » et « Il existe »** LOGIQUE

Les phrases suivantes permettent-elles d'affirmer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I ? Justifiez votre réponse. Si la réponse est négative, trouvez un contre-exemple.

1. Il existe un nombre x appartenant à I tel que $f'(x) > 0$.

2. Pour tout nombre x de I, $f'(x) > 0$.

3. Pour tout nombre x de I, $f'(x) \geqslant 0$.

66 **Avec la dérivée de la dérivée**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5.$$
On note f' la dérivée de f et f'' la dérivée de f'.

Note f'' se lit « f seconde ».

1. Calculez $f''(x)$ et étudiez son signe.

2. Déduisez-en les variations de f'.

3. Calculez $f'(1)$, puis déduisez des questions précédentes le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Étudiez enfin les variations de f.

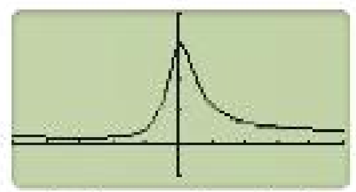
EXTREMUMS LOCAUX. ENCADREMENTS

67 a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

b) Démontrez que, quel que soit le nombre x strictement positif, la somme de x et de son inverse est supérieure ou égale à 2.

68 **Avec la calculatrice**

À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{4x^2 + 1}.$$



Elle semble atteindre un maximum local en zéro.
Est-ce bien le cas ?

69 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2.$$

1. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

2. Précisez les extremums locaux de f.

3. Dans chaque cas, donnez un encadrement de $f(x)$ lorsque x vérifie la condition donnée :

a) $x \in [-2 ; 1]$;

b) $0 \leqslant x \leqslant 3$;

c) $x \in [-2 ; 2]$.

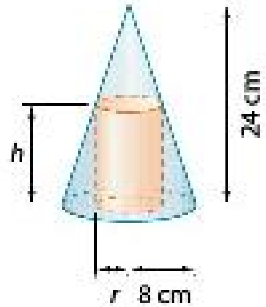
70 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -2x^2 + 4x - 3.$$

1. Étudiez les variations de f.

2. Déduisez-en le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

OPTIMISATION

71 La hauteur d'un cône de révolution mesure 24 cm, et le rayon de la base, 8 cm. On veut inscrire, dans ce cône, un cylindre de révolution dont le volume V soit le plus grand possible.

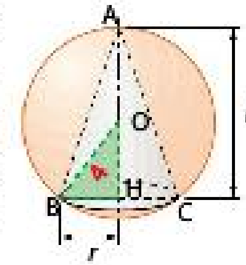


1. Démontrez que $h = 3(8 - r)$.

2. a) Déduisez-en que le volume V est défini sur $[0 ; 8]$ par $V(r) = 3\pi r^2(8 - r)$.

b) Étudiez les variations de V puis déduisez-en la valeur de r pour laquelle $V(r)$ est maximal. Quelle est alors la hauteur h ?

72 Dans une sphère de centre O et de rayon 4 centimètres, on inscrit un cône de révolution de hauteur h. On note r le rayon de base du cône.



1. Utilisez le théorème de Pythagore dans le triangle BOH pour démontrer que :
$$r = \sqrt{h(8 - h)}.$$

2. On note $V(h)$ le volume du cône. Démontrez que :
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(8h^2 - h^3).$$

3. a) Étudiez les variations de V sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

b) Déduisez la valeur de h pour laquelle le volume est maximal.

73 **Un enclos**

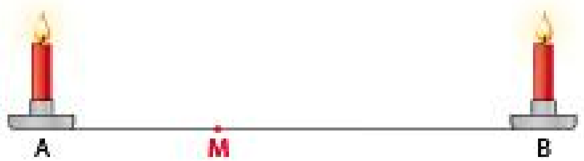
Contre le mur de sa grange un fermier veut construire un enclos grillagé rectangulaire.
Il dispose pour cela de quarante mètres de grillage pour clore trois côtés du rectangle (le 4e côté étant une partie du mur).
Démontrez que la surface de l'enclos est maximale lorsque la longueur est égale au double de la largeur.

74 Un autre enclos

Le fermier de l'exercice **73** envisage de construire, le long du mur de sa grange, un second enclos rectangulaire grillagé.
Il souhaite que l'aire de l'enclos soit de 200 m².
Pour clore trois côtés du rectangle (le 4ᵉ étant le mur), il veut utiliser le minimum de grillage.
Pouvez-vous l'aider à choisir les dimensions de l'enclos ?

75 Éclairement

On utilise dans cet exercice la propriété physique suivante :
« Lorsqu'un point M est situé à une distance d d'une source lumineuse de puissance p, l'intensité de l'éclairement en M est égale à $\frac{p}{d^2}$. »
A et B sont deux sources lumineuses de puissances respectives p et $8p$. M est un point de [AB], distinct de A et B. On pose AB = ℓ et AM = x avec $0 < x < \ell$.

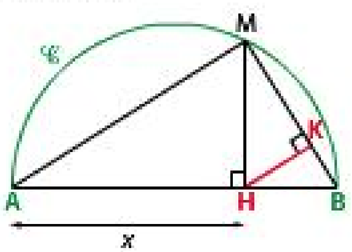


1. Démontrez que l'intensité de l'éclairement en M est égale à $\frac{p}{x^2} + \frac{8p}{(\ell - x)^2}$.

2. Où faut-il choisir M sur [AB] pour que l'intensité soit minimale ?

Aide $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

76 On considère le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB], (AB = 6). H est un point du segment [AB] distinct de A et de B. On note x la longueur AH. La perpendiculaire en H à (AB) coupe $\mathscr{C}$ en M. K est le pied de la hauteur issue de H dans le triangle MHB.



L'objectif de cet exercice est de déterminer pour quelle(s) position(s) de H sur]AB[, le segment [HK] a une longueur maximale. On note HK = $f(x)$.

1. a) En exprimant $\cos(\widehat{BAM})$ de deux manières différentes, prouvez que AM = $\sqrt{6x}$.

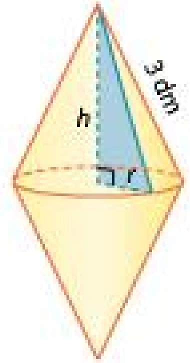
b) Justifiez le parallélisme de (HK) et de (AM) et déduisez-en que $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}(6 - x)\sqrt{x}$.

2. a) f est définie et dérivable sur]0 ; 6[. Exprimez $f'(x)$.

b) Déduisez-en les variations de f et concluez.

77 Volume d'une bouée

Une bouée a la forme d'un double-cône de génératrice 3 dm. On désigne par h (en dm) la hauteur du cône et par r (en dm) le rayon de sa base. On souhaite déterminer h et r pour que le volume de la bouée soit maximal.



1. Exprimez le volume V de la bouée en fonction de r et h.

2. Justifiez que ce volume peut s'écrire sous la forme $V(h) = \frac{2}{3}\pi(9h - h^3)$, $h \in [0 ; 3]$.

3. a) Étudiez les variations de la fonction V qui à h associe V(h).

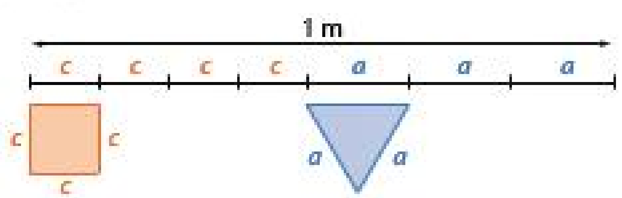
b) Déduisez-en que V admet un maximum V_0 pour un nombre h_0 dont on donnera la valeur exacte.

4. a) Calculez une valeur approchée, en dm³, de V_0 à 10^{-3} près.

b) Exprimez en fonction de h_0 le rayon r_0 de la base correspondant à ce volume maximal.

78 Avec un bout de ficelle

À l'aide d'un bout de ficelle d'un mètre de long, on réalise un carré de côté c et un triangle équilatéral de côté a.



On se pose la question suivante :
Comment effectuer le découpage de ce bout de ficelle pour que la somme des aires du carré et du triangle soit minimale ?

1. Démontrez que $c = \frac{1 - 3a}{4}$.

2. a) Calculez, en fonction de a, l'aire du carré et celle du triangle.

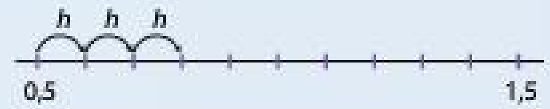
b) Déduisez-en que la somme S(a) des aires est égale à :
$$\frac{1}{16}\left[\left(9 + 4\sqrt{3}\right)a^2 - 6a + 1\right].$$

3. a) Déduisez-en la valeur de a pour laquelle S(a) est minimale.

b) Vérifiez que, dans ce cas, $\frac{a}{c} = \sqrt{3}$.

79 Signe du taux d'accroissement ALGORITHMIQUE

On considère la fonction F1 définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$ par $F1(x) = x + \frac{1}{x}$.
L'algorithme suivant, écrit avec AlgoBox, a pour objectif de déterminer le signe du taux d'accroissement de f entre deux valeurs de x distantes de h, avec $h = \frac{1}{n}$ et où n est choisi par l'utilisateur.




```
1   VARIABLES
2     n EST_DU_TYPE NOMBRE
3     x EST_DU_TYPE NOMBRE
4     taux EST_DU_TYPE NOMBRE
5     h EST_DU_TYPE NOMBRE
6   DEBUT_ALGORITHME
7     AFFICHER "Nombre de subdivisions ?"
8     LIRE n
9     h PREND_LA_VALEUR 1/n
10    x PREND_LA_VALEUR 0.5
11    TANT_QUE (x<=1.5-h) FAIRE
12      DEBUT_TANT_QUE
13      taux PREND_LA_VALEUR (F1(x+h)-F1(x))/h
14      SI (abs(taux)<0.01) ALORS
15        DEBUT_SI
16        AFFICHER x
17        FIN_SI
18        SINON
19          DEBUT_SINON
20          SI (taux == abs(taux)) ALORS
21            DEBUT_SI
22            AFFICHER "+"
23            FIN_SI
24            SINON
25              DEBUT_SINON
26              AFFICHER "-"
27              FIN_SINON
28          FIN_SINON
29      x PREND_LA_VALEUR x+h
30      FIN_TANT_QUE
31  FIN_ALGORITHME
32
33  Fonction numérique utilisée :
34  F1(x)=x+1/x
```

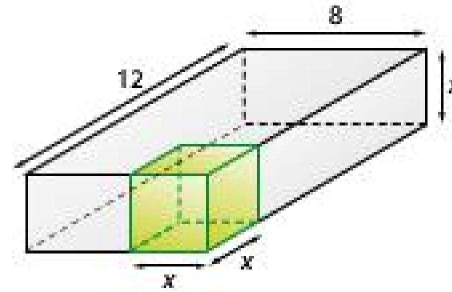
1. Dressez le tableau de variation de F1 sur l'intervalle I.

2. a) Pour $n = 10$, l'affichage est - - - - - + + + + +.
Est-ce en accord avec votre tableau de variation ?

b) Pour $n = 100$, l'affichage est : 50 signes « – » et 49 signes « + », séparés par le nombre 1. Sur quel intervalle peut-on affirmer que le taux est strictement inférieur à 0,01 (ligne 14) ?

80 Un cube

Dans une pièce de bois parallélépipédique de longueur 12, de largeur 8 et d'épaisseur x (en cm), on extrait un cube d'arête x.



Comment choisir x pour que le volume restant soit maximal ?

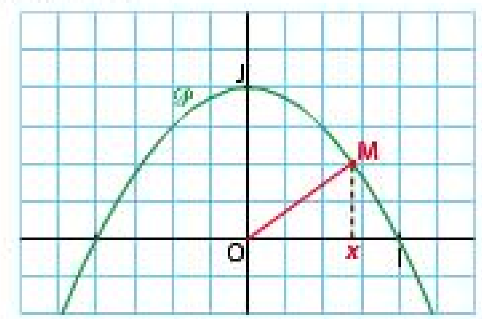
81 Une distance minimale

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^4 - x^2 + 1.$$

a) Calculez, pour tout nombre x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$.

b) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

2. Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = 1 - x^2$.



M est un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse x.

a) Démontrez que $OM^2 = f(x)$.

b) On admet que « il existe un point M tel que la distance OM est minimale » équivaut à « il existe un point M tel que la valeur de OM^2 est minimale ».
Quelles sont les coordonnées des points de la parabole $\mathscr{P}$ qui sont les plus près de l'origine O ?

82 L'aire du trapèze

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x + 3)^2(3 - x).$$

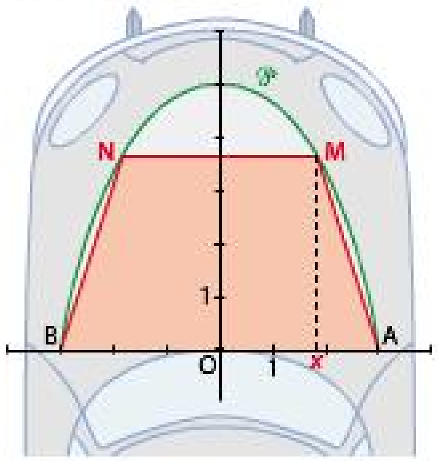
1. a) Calculez $f'(x)$.

b) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

c) Lorsque x décrit l'intervalle [0 ; 3], donnez un encadrement de $f(x)$.

2. Application

Un fabricant d'accessoires de tuning veut produire des autocollants pour le capot de certains modèles de voitures. Il souhaite que l'image, trapézoïdale, ait la plus grande surface possible.



Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = \dfrac{9 - x^2}{2}$.

A et B sont les points de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives $(3 ; 0)$ et $(-3 ; 0)$.

M et N sont les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives x et $-x$, avec $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Déterminez la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze AMNB est maximale.

AVEC LES TICE

83 Une aire minimale

Dans un repère orthonormé, la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = 4 - x^2$.

M est un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse m tel que m appartient à $]0 ; 2]$.

La tangente en M à $\mathcal{P}$ coupe les axes de coordonnées en A et B.

On s'intéresse à l'aire du triangle OAB lorsque m décrit l'intervalle $]0 ; 2]$.

1. Conjecturer avec GeoGebra

a) Créez la parabole $\mathcal{P}$ en saisissant $y = 4 - x^2$, puis créez le point M sur $\mathcal{P}$.

b) Créez la tangente en M à $\mathcal{P}$, puis les points A et B.

c) Créez le triangle OAB. Son aire (poly1) s'affiche dans la fenêtre Algèbre.

d) Déplacez M sur $\mathcal{P}$ et conjecturez l'abscisse de M pour laquelle l'aire du triangle OAB est minimale.

2. Démontrer

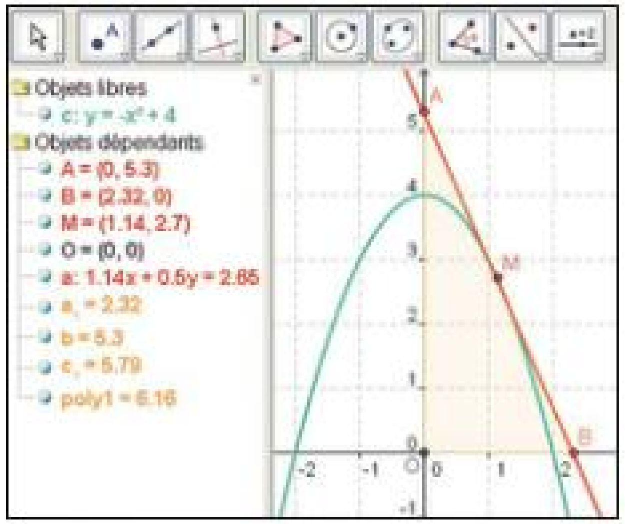
a) Trouvez en fonction de m une équation de la tangente en M à $\mathcal{P}$.

b) Déduisez-en les coordonnées de A et B.

c) Démontrez que l'aire $\mathcal{A}(m)$ du triangle OAB est égale à $\dfrac{(m^2 + 4)^2}{4m}$.

d) Étudiez les variations de la fonction f définie sur $]0 ; 2]$ par $f(x) = \dfrac{(x^2 + 4)^2}{4x}$.

e) Déduisez-en la valeur exacte de m pour laquelle l'aire du triangle est minimale. Le résultat est-il conforme à votre conjecture ?



ROC Restitution organisée de connaissances

84 Dérivées de u^2 et de u^3

Prérequis :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

1. Démonstration

Démontrez que si u est une fonction dérivable sur I, alors :

a) u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$.

b) u^3 est dérivable sur I et $(u^3)' = 3u^2u'$.

2. Application

Justifiez que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculez l'expression de leurs dérivées.

a) $f(x) = (3x - 1)^2$.

b) $g(x) = \left(\dfrac{x}{2} + 3\right)^3$.

Prendre toutes les initiatives

85 La droite d'équation $y = 7x + 9$ peut-elle être tangente à la courbe d'équation $y = x^3 + 4x + 11$?

Si oui, précisez en quel(s) point(s) ?

86 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Démontrez que :

$$f(x) \in [-1 ; 1] \text{ équivaut à } x \in [-1 ; 1].$$

Approfondissement

87 Une fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x},$$

où a, b et c sont des nombres.

On connaît son tableau de variation :

x	0	1	3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖	↗ −9 ↗	−5	↘	

1. À l'aide des renseignements portés dans ce tableau, montrez que a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} c = 9a \\ a + b + c = -9 \\ 3a + b + \dfrac{c}{3} = -5 \end{cases}$$

2. Résolvez ce système et déduisez-en $f(x)$.

88 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où a, b, c et d sont des nombres.

On connaît son tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	5	↘	1	↗	

1. a) À l'aide des renseignements portés dans ce tableau, montrez que a, b, c et d sont solutions du système :

$$\begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 5 \end{cases}$$

b) Déduisez-en $f(x)$.

2. a) Déterminez une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse 1.

b) Quel est le point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à T ?

3. a) La proposition suivante est-elle vraie :

« si $x \geqslant -3$, alors $f(x) > 0$ » ?

b) La réciproque de cette proposition est fausse. Trouvez un contre-exemple.

89 On considère une fonction f dont on ne connaît que quelques propriétés :

- f est définie sur l'ensemble
$$D = [-2 ; -1[\cup]-1 ; +\infty[;$$
- f est dérivable sur chacun des intervalles de D ;
- sa dérivée f' s'annule en -2 et en 0 ;
- le signe de sa dérivée est donné par le tableau suivant :

x	-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	−	‖	−	0	+	

1. Donnez les variations de f.

2. Si $-1 < a < b < 0$, comparez $f(a)$ et $f(b)$.

3. Si $-1 < a < b < 2$, peut-on comparer $f(a)$ et $f(b)$?

4. Si $a = -2$ et $b = 0$, peut-on comparer $f(a)$ et $f(b)$?

On sait de plus que f peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto \frac{x^2 + mx + n}{x + p},$$

où m, n et p sont des nombres, p étant non nul, et que $f(0) = -1$;

Trouvez la fonction f satisfaisant aux propriétés précédentes.

90 Avec la calculatrice

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 7x - 4.$$

La fonction g est définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x + 4}{x - 1}.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal.

1. Faites afficher à l'écran de votre calculatrice les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Conjecturez leur position relative.

2. Dressez, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f.

3. a) Justifiez que la fonction g est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

b) Calculez $g'(x)$ et dressez le tableau de variation de g.

4. Calculez la différence $g(x) - f(x)$ et étudiez son signe.

Déduisez-en la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

91 Une entreprise souhaite fabriquer une boîte parallélépipédique à base carrée de 128 cm³ de volume. Le fond et le couvercle lui reviennent à 0,04 € le cm², les faces latérales à 0,02 € le cm². En centimètres, on désigne par x le côté de la base et par h la hauteur, exprimés en centimètres.

1. Exprimez h en fonction de x.

2. Déduisez-en que le prix de revient est, en centimes d'euros, $p(x) = 8x^2 + \dfrac{1\,024}{x}$.

3. Étudiez les variations de p.

4. Pour quelles dimensions le prix de revient est-il minimal ?

92 **En économie**

Une entreprise fabrique et vend un produit imperméabilisé pour vêtements et équipements de randonnée. La quantité hebdomadaire produite x (en litres) varie entre 0 et 1 000.

Le coût de fabrication, en euros, de x litres est donné par :

$$C(x)=\frac{x^3}{1\,000}-\frac{x^2}{20}+40x+5\,000.$$

La recette, en euros, est donnée par $R(x)=-0{,}2x^2+640x$.

1. On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x litres de produit. Exprimez $B(x)$ en fonction de x et étudiez les variations de la fonction B sur $[0\,;1\,000]$.

2. Quelle quantité doit fabriquer l'entreprise pour que son bénéfice soit maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

93 **En économie**

Une entreprise fabrique des articles de maroquinerie.

- Le **coût de fabrication**, en euros, de x articles a été modélisé, pour $x \in [0\,;90]$, par la fonction :
$$C(x)=x^3-90x^2+2\,700x+8\,836.$$
- Le **coût marginal** est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire. On considère que le coût marginal est égal à la dérivée du coût total. On le note C_m.
- Le **coût moyen** est le coût d'un article. On le note C_M.

1. Donnez les expressions de $C_m(x)$ et $C_M(x)$ pour $x \neq 0$.

2. Démontrez que la dérivée du coût moyen est égale à :
$$C'_M(x)=\frac{(x-47)(2x^2+4x+188)}{x^2}.$$

3. Étudiez les variations de C_M et vérifiez que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

4. Contrôlez la réponse à la question précédente en affichant à l'écran de votre calculatrice les courbes des fonctions C_m et C_M.
Vous prendrez comme fenêtre $0<x<90$ et $0<y<5\,000$.

Remarque
Ce résultat se généralise : le coût moyen atteint sa valeur minimale lorsqu'il est égal au coût marginal.

94 **En pharmacologie**

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est 576 mm³.
On note y la hauteur ; ses autres dimensions sont x et $2x$ (x et y sont en mm).

1. Calculez y en fonction de x.

2. Calculez la surface totale $S(x)$, en mm², de ce parallélépipède rectangle en fonction de x.

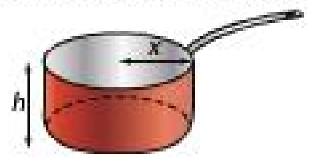
3. x est nécessairement compris entre 3 et 12 mm. Étudiez le sens de variation de S sur l'intervalle $[3\,;12]$ et déduisez-en la valeur de x pour laquelle $S(x)$ est minimale.

Aide $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Commentaire
La vitesse avec laquelle un comprimé soluble, de volume donné, se dissout, augmente avec sa surface. Ceci explique pourquoi les fabricants de médicaments se posent parfois des problèmes de recherche d'extremums.

95 **Les proportions d'une casserole économique**

Vous êtes-vous demandé pourquoi la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quelle que soit sa contenance ?



Pour répondre à cette question, on se propose de résoudre le problème suivant :
Comment fabriquer une casserole de volume v donné avec le moins de métal possible ?
On suppose que le prix de revient du manche ne dépend pas des dimensions de la casserole.
L'unité est le centimètre. On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et $\mathcal{S}$ l'aire totale, égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

1. a) Démontrez que $h=\dfrac{v}{\pi x^2}$.

b) Démontrez que $\mathcal{S}(x)=\pi x^2+\dfrac{2v}{x}$.

2. a) Étudiez sur $]0\,;+\infty[$ les variations de la fonction :
$$\mathcal{S}: x \mapsto \pi x^2+\frac{2v}{x}.$$

b) Concluez en montrant que $h=x$.

Aide Vous pouvez utiliser l'égalité $v=\pi x^2 h$.

96 **Implication réciproque** LOGIQUE

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.

1. a) Calculez $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ avec $h>0$.

b) Déduisez-en que f est dérivable en 0. Précisez $f'(0)$.

2. a) Justifiez que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

b) Calculez $f'(x)$, pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

3. Déduisez-en que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

4. La phrase « Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors la fonction $u \times v$ est dérivable sur I » est une implication.

a) Énoncez l'implication réciproque.

b) Prouvez que cette implication réciproque est fausse en fournissant un contre-exemple.

97 **Utile en statistiques**

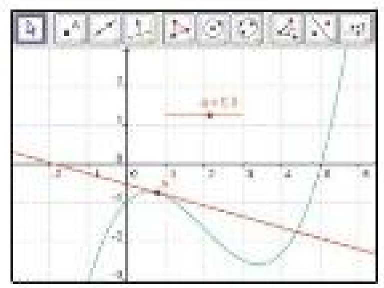
x_1, x_2 et x_3 sont trois nombres.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2.$$
Démontrez que f admet un minimum atteint pour $x=\overline{x}$, où $\overline{x}$ désigne la moyenne arithmétique des nombres x_1, x_2 et x_3.

Prolongement : Refaites cette démonstration en prenant n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au lieu de trois.

Note
Le nombre $\dfrac{f(\overline{x})}{n}$, utilisé en statistiques, est appelé la variance des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

98 **Positions de la tangente** TICE

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{6}-x^2+x-1$.
A est un point de $\mathcal{C}$.
On s'intéresse au comportement de la tangente en A lorsque A parcourt $\mathcal{C}$.



1. Expérimenter avec GeoGebra

a) Créez la courbe $\mathcal{C}$ et un curseur a ($-5 \leqslant a \leqslant 5$).

b) Créez le point A = (a, $f(a)$), puis la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

c) Choisissez a négatif et observez la position de la tangente par rapport à la courbe dans un « voisinage » du point A. Par exemple pour $a=-2$, la tangente est au-dessus de la courbe.

- Faites varier a de -2 à 4. Qu'observez-vous ? Pour quelle valeur de a la tangente semble-t-elle traverser la courbe en A ?
- Dans la fenêtre Algèbre, choisissez, pour la tangente, l'équation réduite et observez les variations du coefficient directeur, c'est-à-dire de $f'(a)$. Quel lien établissez-vous entre le minimum de $f'(a)$ et la position de la tangente ?

2. Démontrez

a) Calculez $f'(x)$, puis $f''(x)$ où f'' est la fonction dérivée de la fonction f'.

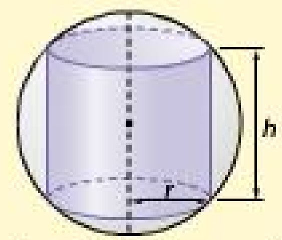
b) Étudiez le signe de $f''(x)$ et déduisez-en les variations de f'. Pour quelle valeur de a la fonction f' atteint-elle son minimum ?

Prendre toutes les initiatives

99 Existe-t-il une fonction polynôme du troisième degré dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 1) et admette en ces points des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

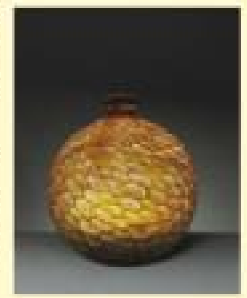
100 **Cylindre inscrit dans une sphère**

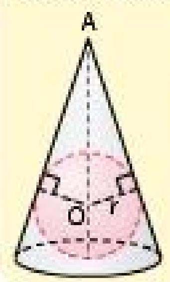
Dans une sphère de rayon 4 cm, on inscrit un cylindre de hauteur h. Les deux bases du cylindre sont des disques de rayon r.



Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?

101 Dans une verrerie d'art située sur l'île de Murano, on fabrique des vases sphériques en verre soufflé.
Pour le transport et la commercialisation de ces pièces, on souhaite fabriquer un emballage original conique, tout en minimisant les coûts.





S est une sphère de centre O et de rayon 6 cm.
On souhaite inscrire cette sphère dans un cône de révolution dont le volume v est le plus petit possible.
Quelles doivent être les dimensions de ce cône ?

EXERCICES

Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les** ***coups de pouce*** **page 381.**

A Calculatrice

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.
Déterminez les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d d'équation $y = 3x + 5$.

B Une tangente commune

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. Déterminez les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 1.

2. Démontrez que, pour deux de ces points, la tangente est commune.

C Vrai ou faux ?

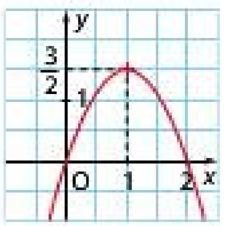
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.
Justifiez chacune des affirmations suivantes :

1. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f' dérivée de f.

2. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est horizontale.

3. 4 est un maximum local de f.

4. Si $f(x) \in [2 ; 4]$ alors $x \in [-1 ; 3]$.



D D'une implication à sa réciproque

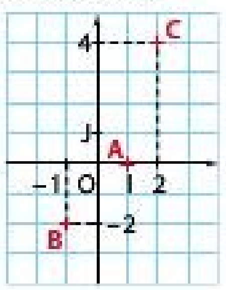
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4$.

1. Démontrez que si $x \in \left[-1 ; \frac{4}{3}\right]$ alors $f(x) \in [4 ; 7]$.

2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

E À la recherche d'une fonction

Dans un repère orthonormé (O ; I, J) on donne les points :
A(1 ; 0), B(–1 ; –2) et C(2 ; 4).
f est la fonction définie sur :
$I =]-\infty ; 3[$ par $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.



1. a) Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A, B, C si et seulement si a, b, c sont solutions du système :

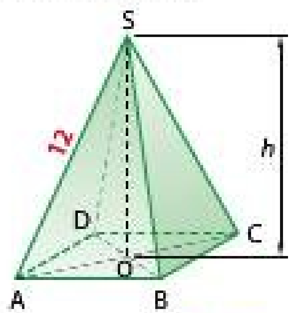
$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{a+1}{b+c} = 0 \\ \dfrac{2a+1}{2b+c} = 4 \\ \dfrac{1-a}{c-b} = -2 \end{cases}$$

b) Déduisez-en a puis b et c.
Vérifiez que la fonction f est définie sur $]-\infty ; 3[$ par :
$$f(x) = \frac{4(1-x)}{x-3}.$$

2. Démontrez que la tangente en A à $\mathscr{C}$ est parallèle à (BC).

F Une pyramide au volume maximal

Une pyramide régulière de base carrée et de hauteur h (en cm) est telle que SA = 12 cm.



1. Calculez AB en fonction de h.

2. a) Démontrez que le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide est défini par :
$$\mathscr{V}(h) = -\frac{2}{3}h^3 + 96h \text{ avec } 0 \leqslant h \leqslant 12.$$

b) Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?

c) Déduisez-en la valeur du volume correspondant.

G La réciproque est-elle vraie ?

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = ax^3 + bx^2 - ax$$
avec a réel non nul et b réel.

1. Démontrez que f admet pour tout $a \neq 0$ et tout b, deux extremums locaux.

2. Dans cette question on suppose $a = b = 1$.

a) Étudiez les variations de f et dressez le tableau de variation.

b) Démontrez que si $x \in [-1 ; 1]$ alors $f(x) \in [-1 ; 1]$.
La réciproque est-elle vraie ?