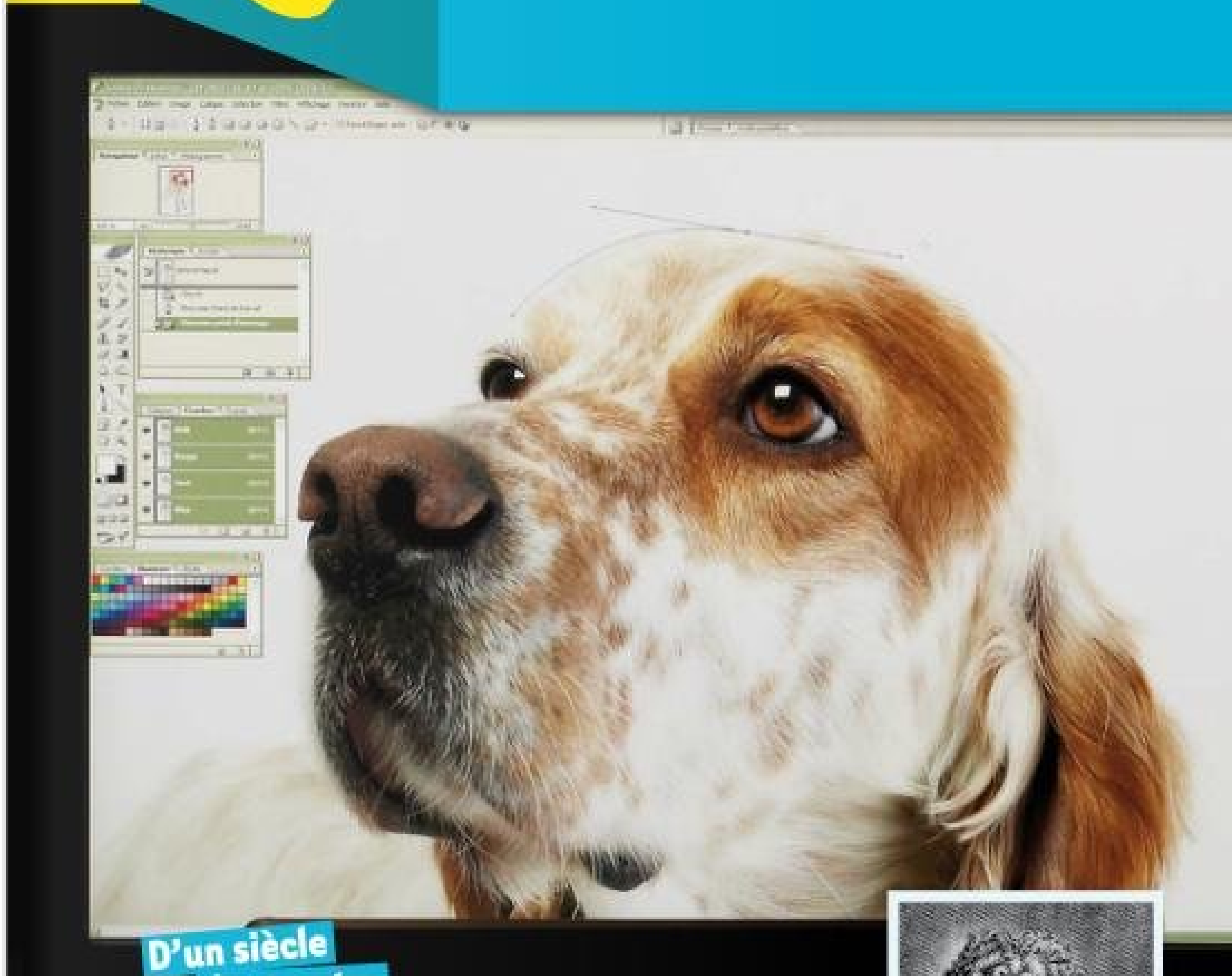
CHAPITRE 3

Dérivation



D'un siècle à un autre

Les infographistes et les web designers connaissent bien les courbes de Bézier : ils les manipulent à longueur de journée.

Elles furent mises au point en 1962 par l'ingénieur français Pierre Bézier. Ces courbes sont construites par morceaux et leur raccordement continu est réalisé grâce à des calculs de dérivées.

Cette notion de dérivée a vu le jour au XVII^{e} siècle dans les écrits de Leibniz et de Newton, qui s'en disputèrent la paternité.

En savoir plus sur **Gottfried Leibniz**

→ Chercheurs d'hier p. 81

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

▶ Équations de droites

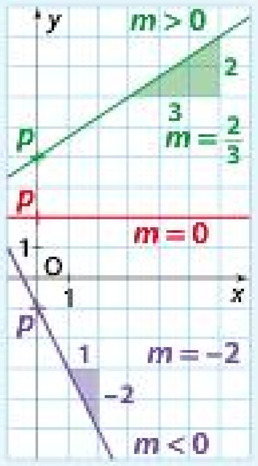
Dans un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme :

$y = mx + p$.

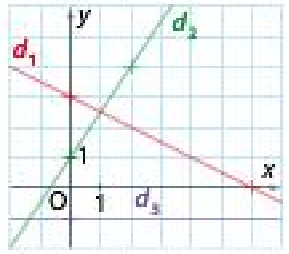
m est **le coefficient directeur** de la droite et p **l'ordonnée à l'origine**.

Suivant le signe de m, on distingue trois cas :

- $m > 0$
- $m = 0$
- $m < 0$



1 Par lecture graphique, donnez une équation de chacune des droites d_1, d_2, d_3.

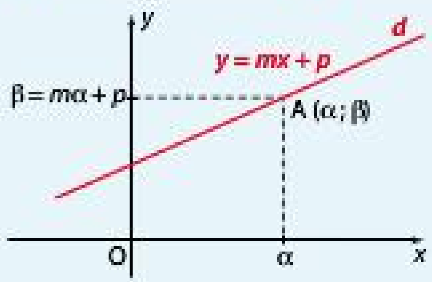


2 Dans un même repère, tracez les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ_4 qui passent par le point A(2 ; 3) et de coefficients directeurs respectifs $-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}$.

▶ Appartenance d'un point à une droite

$y = mx + p$ est une équation de la droite d.

- Si le point A(α ; β) appartient à d, alors $\beta = m\alpha + p$.
- Si $\beta = m\alpha + p$, alors le point A(α ; β) appartient à d.



3 d est la droite d'équation $y = -2x + 3$.
Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à d ?

- $A\left(-\frac{1}{2} ; 4\right)$
- B(0,6 ; 1,8)
- $C\left(\frac{1}{3} ; 2{,}34\right)$

4 A est le point de coordonnées (–4 ; 7).
Parmi les droites suivantes, lesquelles passent par A ?

- $d_1 : y = \frac{x}{4} + 8$
- $d_2 : y = -2x + 5$
- $d_3 : 3x + 2y - 2 = 0$.

5 Dans les deux cas suivants, le point A(3 ; –2) appartient à la droite d.

a) d a pour équation $y = -4x + p$. Calculez p.

b) d a pour équation $y = mx + 6$. Calculez m.

6 Les points A(a ; –4) et B(1 ; b) appartiennent à la droite d'équation $y = 4x + 7$. Calculez a et b.

▶ Coefficient directeur

A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points ($x_A \neq x_B$).
La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple : A(2 ; 3) et B(–1 ; 4). On a $x_A \neq x_B$.
La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{4-3}{-1-2} = -\frac{1}{3}.$$

La droite admet donc une équation de la forme :

$$y = -\frac{1}{3}x + p.$$

Elle passe par A, donc $y_A = -\frac{1}{3}x_A + p$.

Soit $3 = -\frac{1}{3} \times 2 + p$ d'où $p = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.

La droite (AB) a pour équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

7 La droite d passe par le point M(12 ; –9) et a pour coefficient directeur –6.
Déterminez une équation de cette droite.

8 Dans chaque cas, déterminez une équation de la droite (AB).

a) A(–3 ; –4) et B(3 ; 2).

b) A(0 ; –2) et B(–8 ; 5).

c) $A\left(\frac{1}{2} ; 5\right)$ et B(3 ; 5).

→ Voir les corrigés p. 363

Activité NOTION DE TANGENTE À UNE COURBE TICE

Intéressons-nous au cas de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 2x^2 - x + 3$ au point A(1 ; 4).

1 a) Ouvrez une feuille de travail GeoGebra.
Paramétrez les axes comme indiqué ci-contre.

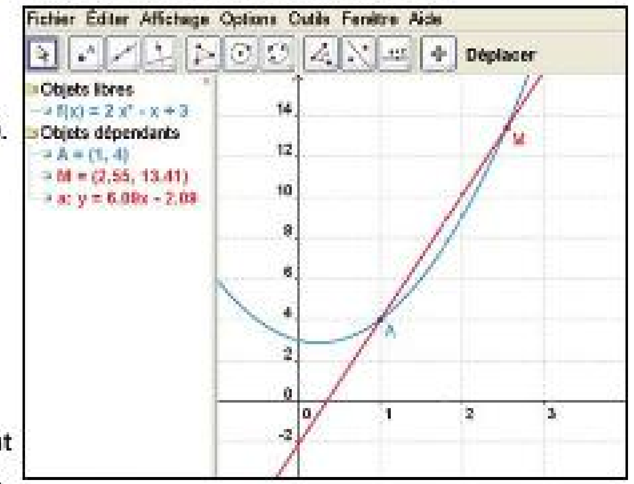
b) Créez la parabole.

c) Créez le point A.

d) Créez ensuite un point mobile, sur la parabole $\mathscr{P}$, distinct de A.

Aide Sélectionnez l'icône, puis cliquez sur la parabole $\mathscr{P}$.

Renommez ce point M puis créez la droite (AM).
Cette droite est dite **sécante** à la parabole $\mathscr{P}$.



2 a) Dans la fenêtre Algèbre, faites afficher l'équation réduite de la droite (AM).

Aide Un clic droit sur l'équation de la droite (AM) permet de sélectionner son équation réduite.

b) Déplacez le point M et observez le coefficient directeur de (AM) lorsque M se rapproche de A.
De quelle valeur ce coefficient directeur semble-t-il « s'approcher » ? On note m cette valeur.

3 a) Déterminez une équation de la droite d passant par le point A et de coefficient directeur m.

b) Créez cette droite en notant son équation dans la zone de saisie.

c) Quelle propriété pouvez-vous attribuer à cette droite ?

4 a) Faites disparaître la droite d en utilisant ✔ Afficher l'objet.

b) Créez la tangente en A à la courbe. Quel est son coefficient directeur ? outil 6

Ce résultat vous conforte-t-il dans votre conjecture ?

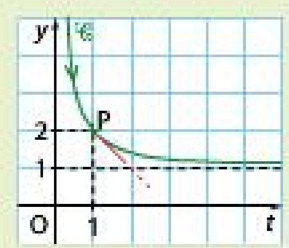
Aide Sélectionnez l'icône, cliquez sur A puis sur $\mathscr{P}$.

5 Recommencez l'activité en prenant un point de votre choix, autre que A, sur la parabole.

Pour une parabole, **intuitivement**, lorsque M « se rapproche » de A, la sécante (AM) « se rapproche » de la tangente en A.

Problème ouvert Refaites cet exercice après le chapitre ... Est-il plus facile ?

La trajectoire d'un mobile est portée par la courbe d'équation $y = 1 + \frac{1}{t}$ avec $t > 0$. Il quitte sa trajectoire tangentiellement en P(1 ; 2).
À quel endroit touchera-t-il le sol, représenté par l'axe (O ; t) ?



1 Nombre dérivé et tangente

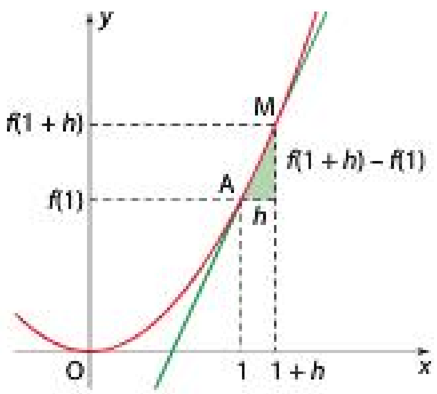
1.1 Taux d'accroissement

Définition 1 La fonction f est définie sur un intervalle I et α est un nombre de I.
À tout nombre h non nul, tel que $(\alpha + h)$ appartient à I, on peut associer le nombre $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ appelé **taux d'accroissement de f entre α et $(\alpha + h)$**.

Exemple et interprétation graphique. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
h désigne un nombre quelconque, non nul.

- Le taux d'accroissement de f entre 1 et $(1 + h)$ est égal à :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h.$$



Animation

- A et M sont les points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives 1 et $(1 + h)$.

Le taux d'accroissement de f entre 1 et $(1 + h)$ est le coefficient directeur de la droite (AM) :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

1.2 Nombre dérivé

Dans l'exemple précédent, lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, les nombres $(2 + h)$ « s'accumulent » autour de 2.

On dit alors que **la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 est 2** et on écrit :

$$\lim_{h \to 0} (2+h) = 2.$$

On dit aussi que le taux d'accroissement tend vers 2 lorsque h tend vers 0.

On s'intéresse donc au problème suivant :

« Pour une fonction f donnée, le taux d'accroissement de f entre α et $(\alpha + h)$ a-t-il une limite lorsque h tend vers 0 ? »

Définition 2 f est une fonction définie sur un intervalle I. Les nombres α et $(\alpha + h)$ appartiennent à I.
Dire que f est dérivable en α signifie que le taux d'accroissement $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
Ce nombre L est appelé **nombre dérivé de f en α**. Il est noté $f'(\alpha)$.

$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \text{L}.$$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2$ vue précédemment est telle que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

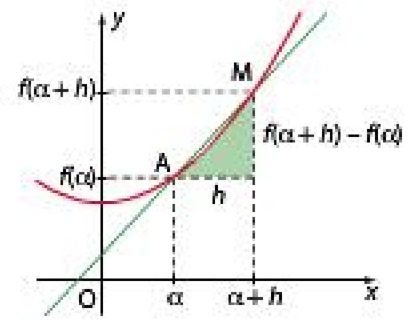
1.3 Tangente à une courbe

A et M sont deux points de la courbe représentative d'une fonction f dérivable en α.

Le fait que le nombre h tende vers zéro se traduit graphiquement par le fait que le point M se « rapproche » du point A.

Les sécantes (AM) ont pour position limite la droite passant par A et de coefficient $f'(\alpha)$.

Cette droite correspond à l'idée intuitive que l'on se fait d'une tangente à une courbe.



Définition 3 f est une fonction définie sur un intervalle I. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative. α est un nombre de l'intervalle I. f est dérivable en α.
La droite qui passe par $A(\alpha\,;f(\alpha))$ et de coefficient directeur $f'(\alpha)$ est **la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A**.

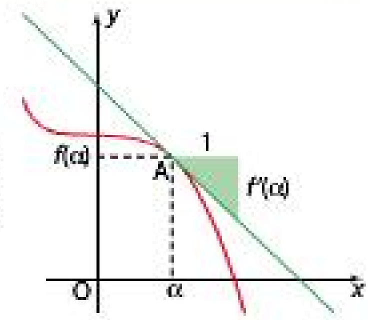
Équation de la tangente à une courbe en un point

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(\alpha\,;f(\alpha))$ est :

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$

En effet, cette tangente a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$, elle a donc une équation du type $y = f'(\alpha) \times x + p$. Comme elle passe par A, alors $f(\alpha) = f'(\alpha) \times \alpha + p$, donc $p = f(\alpha) - f'(\alpha) \times \alpha$. Ainsi cette tangente a pour équation $y = f'(\alpha) \times x + f(\alpha) - f'(\alpha) \times \alpha$ soit :

$$y = f'(\alpha) \times (x-\alpha) + f(\alpha).$$



Exemple. Dans l'exemple du paragraphe 1.1, la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point $A(1\,;1)$ a pour équation :

$$y = 2(x-1) + 1 \text{ soit } y = 2x - 1.$$

2 Fonctions dérivées

2.1 Fonction dérivée

Définition 4 f est une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout nombre x de I.
Alors la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f. On la note f'.

2.2 Dérivées de fonctions usuelles

Pour les démonstrations de ce paragraphe, on calcule le taux d'accroissement $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$, puis on détermine sa limite lorsque h tend vers 0.

Théorème 1 Toute fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = m$.

Démonstration. Quels que soient les nombres α et h ($h \neq 0$) :

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \frac{m(\alpha+h)+p-m\alpha-p}{h} = \frac{mh}{h} = m.$$

Ainsi, le taux d'accroissement lorsque h tend vers 0, a pour limite m.

Quel que soit le nombre α, f est dérivable en α et $f'(\alpha) = m$: la fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = m$ (fonction constante).

Exemples. Lorsque $m = 1$ et $p = 0$, $f(x) = x$ et $f'(x) = 1$. Lorsque $m = 0$, $f(x) = p$ et $f'(x) = 0$. Ainsi, toute **fonction constante** sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée la **fonction nulle**.

Théorème 2 Toute fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie par $f'(x) = 2ax + b$.

Idée de la démonstration.

Quels que soient α et h ($h \neq 0$), $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \dfrac{a(\alpha+h)^2+b(\alpha+h)+c-a\alpha^2-b\alpha-c}{h}$

$$= \frac{a\alpha^2+2a\alpha h+ah^2+b\alpha+bh+c-a\alpha^2-b\alpha-c}{h} = \frac{ah^2+2a\alpha h+bh}{h} = ah+2a\alpha+b.$$

Le taux d'accroissement est égal à $ah + 2a\alpha + b$. Lorsque h tend vers 0, ce taux d'accroissement a pour limite $2a\alpha + b$.

Ainsi, quel que soit le nombre α, f est dérivable en α et $f'(\alpha) = 2a\alpha + b$.

La fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$.

Théorème 3 Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Admis Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = nx^{n-1}$.

Théorème 4 La fonction inverse f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
Sa fonction dérivée est définie sur chacun de ces intervalles par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Idée de la démonstration. Quels que soient les nombres $\alpha > 0$ et h tels que $\alpha + h > 0$,

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \frac{\dfrac{1}{\alpha+h}-\dfrac{1}{\alpha}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{\alpha(\alpha+h)}}{h} = -\frac{1}{\alpha(\alpha+h)}.$$

Lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement a pour limite $-\dfrac{1}{\alpha^2}$. Ainsi, quel que soit le nombre $\alpha > 0$, f est dérivable en α et $f'(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha^2}$. On obtient le même résultat lorsque $\alpha < 0$.

La fonction dérivée est définie sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Théorème 5 La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle **ouvert** $]0\,;+\infty[$.
Sa fonction dérivée est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Idée de la démonstration. Quels que soient les nombres $\alpha > 0$ et h tels que $\alpha + h > 0$,

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \frac{\sqrt{\alpha+h}-\sqrt{\alpha}}{h} = \frac{(\sqrt{\alpha+h}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha+h}+\sqrt{\alpha})}{h(\sqrt{\alpha+h}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\alpha+h-\alpha}{h(\sqrt{\alpha+h}+\sqrt{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha+h}+\sqrt{\alpha}}.$$

Lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Ainsi, quel que soit le nombre $\alpha > 0$, f est dérivable en α et $f'(\alpha) = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

La fonction dérivée est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

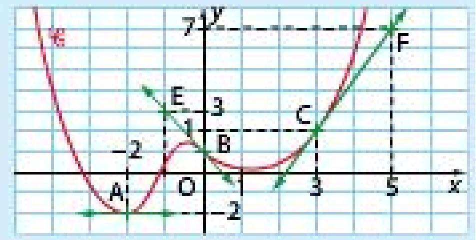
! Attention La fonction f n'est pas dérivable en zéro.

OBJECTIF 1 Associer tangente et nombre dérivé

Si f est une fonction dérivable en α, sa courbe représentative $\mathscr{C}$ admet au point $A(\alpha\,;\,f(\alpha))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(\alpha)$.

EXERCICE RÉSOLU A Exploiter graphiquement le nombre dérivé

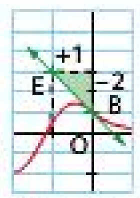
La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction f dérivable pour tout nombre a. En chacun des points A, B et C la courbe admet une tangente.
Déterminez graphiquement les nombres suivants :
• $f(0)$ • $f(3)$ • $f(-2)$ • $f'(0)$ • $f'(3)$ • $f'(-2)$.



Méthode

• On lit sur la figure les ordonnées des points A, B et C.

• On lit les coefficients directeurs des tangentes directement sur la figure.



• On peut aussi déterminer, par exemple, le coefficient directeur $f'(3)$ de la droite (CF) par le calcul.
On peut, de la même façon, déterminer le coefficient directeur $f'(0)$ de la droite (BE).

Solution

• Graphiquement, on lit :
$f(0) = 1\,;\,f(3) = 2\,;\,f(-2) = -2$.

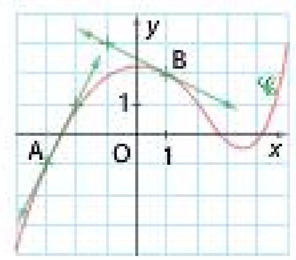
• Graphiquement, on lit :
$f'(0) = -2\,;\,f'(3) = \dfrac{5}{2}$.
La tangente à $\mathscr{C}$ en A est horizontale donc son coefficient directeur est nul. $f'(-2) = 0$.

• La tangente à $\mathscr{C}$ en $C(3\,;2)$ passe par le point $F(5\,;7)$.
Son coefficient directeur est $m = \dfrac{7-2}{5-3} = \dfrac{5}{2}$
donc $f'(3) = \dfrac{5}{2}$.

Mise en pratique

Pour les exercices 1 à 3 Les fonctions étudiées sont dérivables pour tout nombre de $\mathbb{R}$.

1 La courbe ci-contre est celle d'une fonction f.
Utilisez le quadrillage pour donner le nombre dérivé associé à la tangente en A et en B.



2 La courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f passe par le point $A(2\,;3)$. La tangente à la courbe en A passe par le point $B(4\,;-1)$. Calculez $f'(2)$.

3 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f.
On donne :
• $f(0) = 2$ • $f(4) = 5$ • $f(7) = 3$ • $f(10) = 5$
• $f'(0) = 1$ • $f'(4) = 0$ • $f'(7) = 0$ • $f'(10) = 2$

1. a) Placez les points A, B, C et D d'abscisses respectives $0\,;4\,;7\,;10$.

b) Tracez les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ en ces points.

2. Dessinez une allure possible de $\mathscr{C}$ dans l'intervalle $[0\,;10]$.

OBJECTIF 2 Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé

- Les dérivées des fonctions usuelles sont à connaître. Voir **théorèmes 2 à 5**.
- f est une fonction dérivable sur un intervalle I. a est un nombre de I. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f, au point A de coordonnées $(a\,;f(a))$, admet pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

EXERCICE RÉSOLU B Tangente en un point d'une courbe

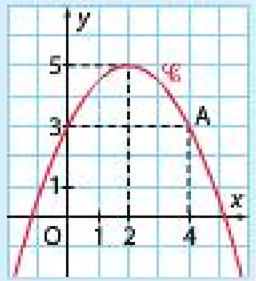
La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

Le point A d'abscisse 4 est un point de $\mathscr{C}$.

1. Exprimez $f'(x)$.

2. Calculez $f'(4)$ et tracez la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.

3. Déterminez une équation de T.



Méthode

1. On exprime la dérivée de la fonction trinôme en appliquant le théorème 2.

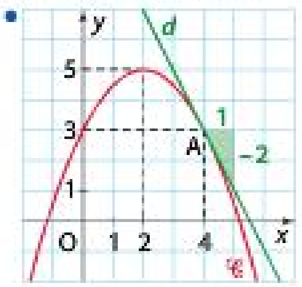
2. • On calcule $f'(4)$.
• La tangente en A a pour coefficient directeur -2. D'où sa construction.

3. • On applique la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
• On calcule $f(4)$.

Solution

1. $f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times 2x + 2 = -x + 2$.

2. • $f'(4) = -4 + 2 = -2$.
•



3. • La tangente en A à la courbe a pour équation $y = f'(4)(x-4) + f(4)$.
• $f(4) = -8 + 8 + 3 = 3$. La tangente en A a donc pour équation :
$y = -2(x-4) + 3$, soit $y = -2x + 11$.

Mise en pratique

4 f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. a) Calculez $f'(1)$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Tracez la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives 1 et $-\dfrac{1}{2}$.

2. Déterminez une équation de ces tangentes.

5 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. a) Calculez $f'(1)$ et $f'(4)$.

b) Tracez la tangente à $\mathscr{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 4.

2. Déterminez une équation de ces tangentes.

6 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

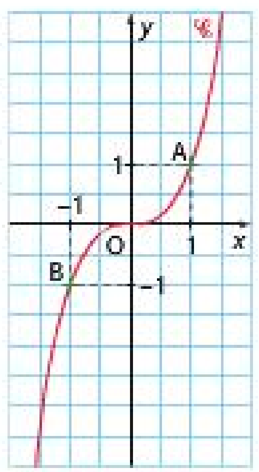
A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et -1.

1. Calculez $f'(1)$ et $f'(-1)$.

2. Tracez les tangentes en A et B à $\mathscr{C}$.

3. a) Quelle conjecture faites-vous concernant ces tangentes ?

b) Prouvez-le.



Pour se tester

Exercices interactifs

7 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

1. f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. a et $(a+h)$ sont deux nombres de I, $(h \neq 0)$.

a) Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle ……

b) Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0, alors L s'appelle ……

2. A est le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.

a) $f(a)$ est …… du point A.

b) $f'(a)$ s'appelle ……

c) L'équation de la tangente en A à $\mathscr{C}$ est ……

8 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

a) Si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 5$, alors $g'(x) = 7$.

b) Si g est une fonction dérivable en 3, alors sa courbe admet une tangente au point d'abscisse 3.

c) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$, alors $f'(2) = 12$.

d) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{3}$. Pour tout nombre x, $f'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{3}}$.

e) f est définie pour tout nombre x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La tangente au point A d'abscisse 2 à la courbe représentant f a pour équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.

9 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$.
a) $f'(x) = 6x + 6$. **b)** $f'(x) = 6x + 4$. **c)** $f'(x) = 6x + 2$.

2. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction « carré ». La tangente au point d'abscisse -3 a pour équation :
a) $y = -6x - 27$. **b)** $y = -6x - 9$. **c)** $y = 9x + 3$.

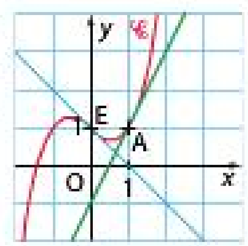
3. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x + 1$. Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est :
a) $-h^2 - h$. **b)** $-1 - h$. **c)** $-2 - h - \dfrac{1}{h}$.

4. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 16 a pour équation :
a) $y = \dfrac{1}{4}x$. **b)** $y = \dfrac{1}{8}x - 2$. **c)** $y = \dfrac{1}{8}x + 2$.

10 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

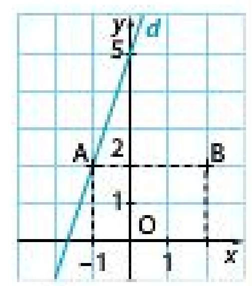
1. $\mathscr{C}$ représente une fonction dérivable pour tout a de $\mathbb{R}$. On a tracé en A et E les tangentes à $\mathscr{C}$.



On peut affirmer que :
a) $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
b) $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1$.
c) $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$.
d) $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.
a) La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 passe par le point A$(-3\,;5)$.
b) Il existe un seul point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 1.
c) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -2x + 3$.

3. f est une fonction trinôme. La courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par les points A et B. La droite d est tangente en A à $\mathscr{C}$.



a) $f(x) = -x^2 + x + 4$.
b) La tangente en B a pour équation $y = -3x + 8$.
c) La tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est horizontale.

Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

11 Tangentes à une courbe passant par un point

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{H}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. A est le point de coordonnées (1 ; –1).

Objectif Déterminez, si elles existent, les tangentes à $\mathscr{H}$ passant par A.

1. Réaliser une figure aide à bien visualiser la situation.

a) Tracez l'hyperbole $\mathscr{H}$ et placez le point A.

b) Conjecturez le nombre de tangentes passant par A.

2. Cela revient à trouver les points de $\mathscr{H}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{H}$ passe par A. Pour connaître un point de $\mathscr{H}$ il suffit de connaître son abscisse. On choisit donc pour inconnue l'abscisse m (non nulle) d'un point M de $\mathscr{H}$.

a) Trouvez, en fonction de m, une équation de la tangente T_m en M à $\mathscr{H}$.

b) Démontrez que « La tangente en M passe par A » équivaut à « $m^2+2m-1=0$ ».

c) Résolvez cette équation. Combien trouvez-vous de tangentes T_m ? Concluez en plaçant sur $\mathscr{H}$ les points trouvés et en traçant les tangentes.

12 Tangentes communes à deux courbes

Dans un repère (O ; I, J), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$, $(x\neq 0)$.

Objectif Trouver les tangentes communes à ces deux courbes.

1. Une tangente commune à deux courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$ est une droite tangente à la fois en A à $\mathscr{P}$ et en B à $\mathscr{H}$.
A priori les points A et B sont distincts.
Pour se faire une idée et suivre le raisonnement, on peut faire une figure.

a) Construisez $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ dans le repère (O ; I, J).

b) Essayez de construire une tangente commune. Semble-t-il y en avoir une seule ? plusieurs ?

2. A est un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a et B un point de $\mathscr{H}$ d'abscisse b $(b\neq 0)$. L'idée est d'écrire :
- une équation T_a de la tangente en A à $\mathscr{P}$;
- une équation T_b de la tangente en B à $\mathscr{H}$.

On voit ensuite s'il est possible de choisir a et b de façon que T_a et T_b soient confondues.

Aide Deux droites d'équations respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont confondues si et seulement si $m=m'$ et $p=p'$.

a) Trouvez une équation de T_a, puis une équation de T_b.

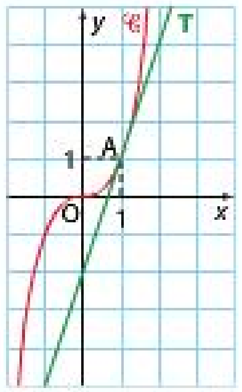
b) Déduisez-en que les droites « T_a et T_b sont confondues » équivaut à « Il existe des nombres a et b tels que $2a=-\frac{1}{b^2}$ et $-a^2=\frac{2}{b}$ ».

c) Calculez a et b et concluez.

Aide (–2) est le seul nombre dont le cube est (–8).

13 Position d'une courbe et d'une tangente en l'un de ses points

Dans un repère, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ et T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.



Objectif Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T.

1. Notons g la fonction affine dont la représentation graphique est T. Dire que « $\mathscr{C}$ est au-dessus de T » équivaut à dire que « $f(x)>g(x)$ » ou « $f(x)-g(x)>0$ ». Ainsi, étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T revient à étudier le signe de $f(x)-g(x)$.

a) Trouvez une équation de la droite T.

b) Démontrez que :
« $f(x)-g(x)>0$ » équivaut à « $x^3-3x+2>0$ ».

2. Il reste à résoudre cette inéquation de degré 3. Pour résoudre une telle inéquation, on factorise l'expression puis on étudie son signe dans un tableau.

a) Vérifiez que pour tout nombre x,
$$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2).$$

b) À l'aide d'un tableau, donnez le signe de ce produit.

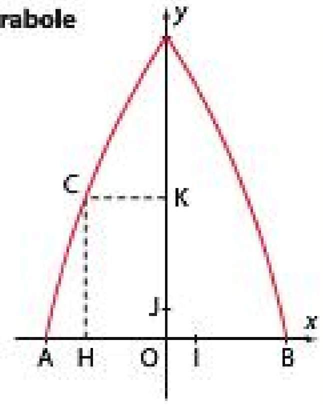
c) Déduisez-en la résolution de l'inéquation $x^3-3x+2>0$.

d) Concluez.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

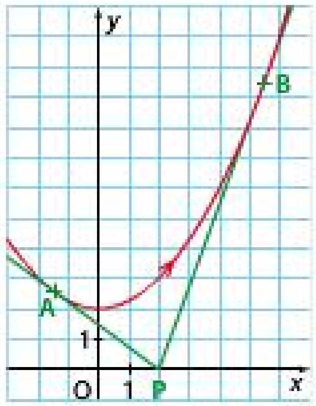
14 Voûte d'ogive et parabole



La figure ci-contre est le profil d'une voûte d'ogive constituée par deux arcs de parabole parfaitement symétriques.
- AB = 12 m.
- OH = 4 m.
- OK = 7 m.

La tangente en C à la voûte a un coefficient directeur égal à 3. Dans le repère orthonormé indiqué, l'équation du demi-profil gauche est :
$$y=ax^2+bx+c.$$
Quelle est la hauteur totale de la voûte ?

15 Circuit automobile

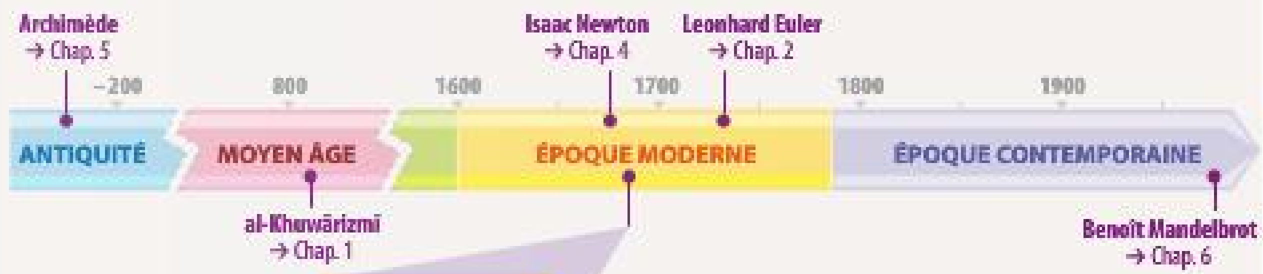


La figure ci-contre est une partie d'un plan qui représente un circuit automobile (en rouge). Un observateur placé en P n'aperçoit dans son champ de vision que le « virage AB ».
Sur ce plan, dans le repère orthonormé indiqué (unité graphique 25 m), l'arc symbolisant le virage a pour équation $y=\frac{1}{4}x^2+2$ et P a pour coordonnées (2 ; 0). À quelle distance l'observateur aperçoit-il la voiture à l'entrée du virage et la perd-il de vue à la sortie du virage ?

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

Chercheurs d'hier

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



Gottfried Leibniz
(1646-1716)

Chargé par les princes allemands d'une mission diplomatique auprès de Louis XIV pour éviter un conflit, il rencontre Huygens, à Paris, qui l'incite à étudier les mathématiques. Dans ses travaux qui posent les bases du calcul différentiel, il s'intéresse notamment au lien entre l'équation d'une courbe et la pente de la tangente à cette courbe en un point.

On lui doit de nombreuses notations, en particulier $\frac{dy}{dx}$, ainsi que les termes « fonction » et « coordonnées ».

▲ Machine à calculer conçue par Leibniz, qui permet d'effectuer les quatre opérations.

Sur le Web http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/viemaths/hist/mthacc/leibniz.htm

Utiliser GeoGebra

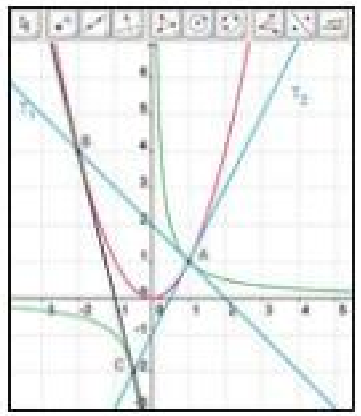
→ Pour étudier des tangentes à des courbes de référence

16 Tangentes à une parabole et à une hyperbole

COMPÉTENCES

TICE
- Émettre et tester des conjectures.
- Animer une configuration.
- Créer et utiliser des curseurs.

Mathématiques
- Déterminer des équations de tangentes.
- Déterminer des intersections de courbes et de droites.



On note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ les courbes représentatives des fonctions de référence $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et A(1 ; 1) leur point commun.

La tangente T_1 à $\mathscr{H}$ en A recoupe la parabole $\mathscr{P}$ au point B.

La tangente T_2 à $\mathscr{P}$ en A recoupe l'hyperbole $\mathscr{H}$ au point C.

L'objectif est dans un premier temps d'étudier la position de la droite (BC) par rapport aux deux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$.

Dans un second temps, de façon plus générale, on s'intéresse aux courbes d'équations $y = ax^2$ et $y = \dfrac{b}{x}$ ($a > 0$ et $b > 0$).

1. Réaliser la figure

a) Créez les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ en saisissant successivement, $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1/x$.

b) Sélectionnez l'icône puis créez le point commun A.

c) Sélectionnez l'icône puis créez les tangentes T_1 et T_2.
Créez les points B et C et enfin la droite (BC). **outil 6**

2. Conjecturer

a) Que pouvez-vous conjecturer concernant la position de la droite (BC) par rapport aux deux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$?

b) Créez la tangente en B à $\mathscr{P}$. Que constatez-vous ? Vérifiez votre conjecture à l'aide des équations dans la fenêtre Algèbre.

> **Aide** Si nécessaire, cliquez sur les équations pour afficher les équations réduites des droites.

outil 3 **c)** On envisage maintenant d'observer si la propriété est conservée pour les courbes d'équations $y = ax^2$ et $y = \dfrac{b}{x}$ où a et b sont deux nombres strictement positifs.

- Créez deux curseurs a et b avec les paramètres suivants.
- Par un clic droit sur les équations, accédez au menu « propriétés » et modifiez les fonctions f et g pour obtenir $f(x) = ax^2$ et $g(x) = \dfrac{b}{x}$.
- Faites varier alternativement les nombres a et b. Que constatez-vous ?

> **Aide** Pour modifier f, saisissez a*x².

3. Démontrer

On se limitera dans cette partie au cas $a = b = 1$, c'est-à-dire à la situation initiale.

a) Déterminez les équations des tangentes T_1 et T_2. Déduisez-en les coordonnées de B et de C et l'équation de la droite (BC) du type $y = mx + p$. Vous pouvez vérifier l'exactitude de vos calculs dans la fenêtre Algèbre.

b) Précisez par le calcul les éléments qui vous permettent d'affirmer que la droite (BC) est tangente aux deux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$. Concluez.

Utiliser sa calculatrice

→ Pour calculer un nombre dérivé
→ Pour tracer une tangente à une courbe

TP 17 Vérifier des résultats avec la calculatrice

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimez $f'(x)$.

2. Calculez $f(2)$ et $f'(2)$, puis déterminez une équation de la tangente au point d'abscisse 2.

3. Vérifiez vos résultats avec une calculatrice.

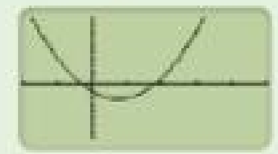
Avec une Casio

- Sélectionnez le menu GRAPH puis entrez l'expression de f dans Y1.
- Paramétrez la fenêtre d'affichage SHIFT F3 (V-Window) : $-2 < x < 5$ et $-8 < y < 10$
- Sélectionnez le menu TABLE, appuyez sur SHIFT MENU (SET UP) et activez la commande « Derivative ».

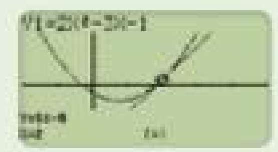
- Appuyez sur EXE. Dans le menu TABLE, F5 (SET), réglez start : –2, End : 5, Step : 0,1.
- Utilisez l'instruction TABL (F6) pour afficher les valeurs de x, de $f(x)$ et de $f'(x)$.

Sélectionnez $x = 2$ pour obtenir $f(2)$ et $f'(2)$.

- Sélectionnez le menu GRAPH, puis utilisez l'instruction DRAW (F6) pour afficher la courbe.



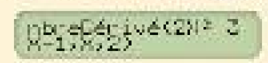
- Appuyez sur F4 (Sketch), puis sélectionnez l'instruction Tang (F2).
- Déplacez le curseur jusqu'au point de la courbe d'abscisse 2 et appuyez sur EXE.



Cela confirme-t-il vos résultats ?

Avec une TI

- En mode Calcul, appuyez sur math puis dans le menu, sélectionner l'option 8 : **nbreDérivé** (8).
- Complétez comme indiqué ci-contre.

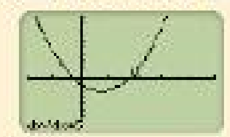


- Appuyez sur entrer. Vous obtenez $f'(2)$.

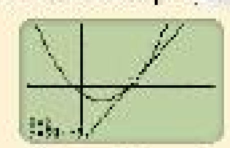
> **Note** L'instruction **nbreDérivé(** s'utilise ainsi : **nbreDérivé(**expression, variable, valeur).

Autre méthode
- Appuyez sur f(x), puis entrez l'expression de f dans Y1.
- Appuyez sur fenêtre pour paramétrer la fenêtre d'affichage.

- Tapez 2nde trace (calculs), puis sélectionnez l'option 6 : dy/dx (6).
- Appuyez sur 2 et validez par entrer.



- Appuyez sur graph pour afficher l'écran graphique avec la courbe de f.
- Tapez 2nde prgm (dessin), puis sélectionnez l'option 5 : Tangente((5).
- Appuyez sur 2 et validez par entrer.



Cela confirme-t-il vos résultats ?

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

18 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. Calculez $f(2)$ et $f'(2)$.

2. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 a-t-elle pour équation $y = 4x - 4$?

19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

a) La tangente au point d'abscisse 0 est « horizontale ».

b) La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 3x - 2$.

20 Quel est le nombre dérivé en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$?

21 Le taux d'accroissement d'une fonction f, dérivable en 1, est tel que $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{3h+2}{(1+h)^2}$, avec $h \neq 0$ et $1 + h \neq 0$.
Calculez $f'(1)$.

NOMBRE DÉRIVÉ

Pour les exercices 22 à 27

Utilisez la définition 2 pour prouver l'existence du nombre dérivé au point a de la fonction f indiquée, puis calculez sa valeur.

22 $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = -1$.

23 $f(x) = x^2 - 5x + 3$; $a = 2$.

24 $f(x) = x^3 + 1$; $a = 2$.

25 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $a = 2$.

26 $f(x) = x^3 - 3x$; a est un nombre donné.

27 $f(x) = \dfrac{3}{x}$; a est un nombre donné.

28 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

1. Vérifiez que pour tout h tel que $h \neq 0$ et $1 + h > 0$:
$$f(1+h) = \frac{2h + h^2}{1+h}.$$

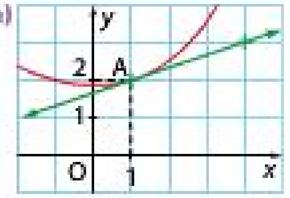
2. Déduisez-en que f est dérivable en 1 et calculez $f'(1)$.

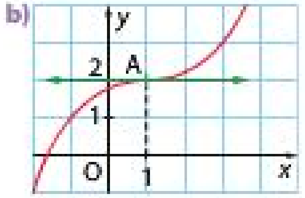
29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)^3$.

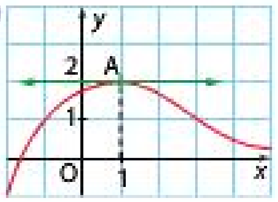
a) Démontrez que pour $h \neq 0$:
$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h^2 - 9h + 27.$$

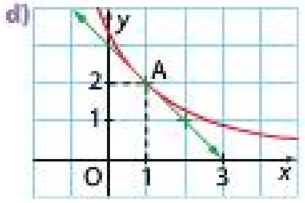
b) Déduisez-en que f est dérivable en 0 et calculez $f'(0)$.

30 Les fonctions suivantes sont dérivables en $x = 1$. Lire $f'(1)$.

a)


b)


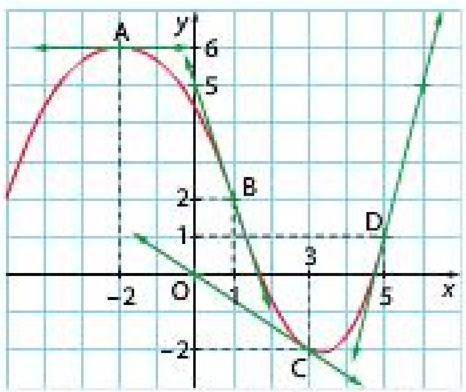
c)


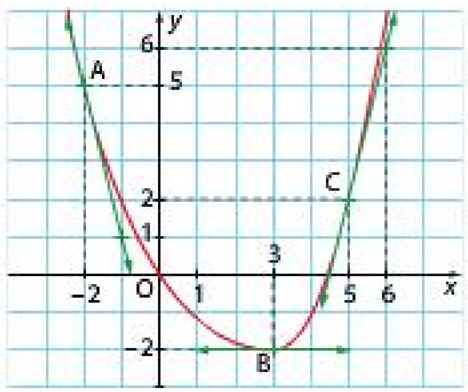
d)


TANGENTE ET NOMBRE DÉRIVÉ

Pour les exercices 31 et 32

Les fonctions sont dérivables pour tout nombre a. Par lecture graphique donnez le coefficient directeur de la tangente aux points indiqués puis trouvez une équation de cette tangente.

31


32


33 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne :

- $f(-3) = -1$ • $f(0) = -2$ • $f(3) = 0$ • $f(6) = 4$
- $f'(-3) = 0$ • $f'(0) = -1$ • $f'(3) = 3$ • $f'(6) = 0{,}5$

1. Placez les points A, B, C et D d'abscisses respectives -3 ; 0 ; 3 et 6.

2. Construisez les tangentes aux points A, B, C et D.

3. Dessinez une allure possible de la courbe sur l'intervalle $[-3 ; 6]$.

34 h est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Trouvez une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de h au point d'abscisse 2 et au point d'abscisse -2.

2. a) Tracez $\mathscr{C}$ et les deux tangentes.

b) Quelle particularité présentent ces deux tangentes ?

Pour les exercices 35 à 39

f est une fonction et a un nombre donné. f est dérivable en a. Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

35 $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ et $a = -2$.

36 $f(x) = \dfrac{1}{2}(-7x + 5 + x^2)$ et $a = 5$.

37 $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 9$.

38 $f(x) = x^3$ et $a = 2$.

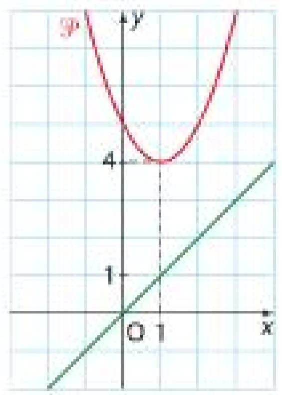
39 $f(x) = (2x+1)^2$ et $a = 0$.

40 $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = 2x^2 - 5x - 3$.
d est la droite d'équation $y = x + p$.

1. Pour quelle valeur de p, $\mathscr{P}$ et d ont-elles un seul point commun A ?

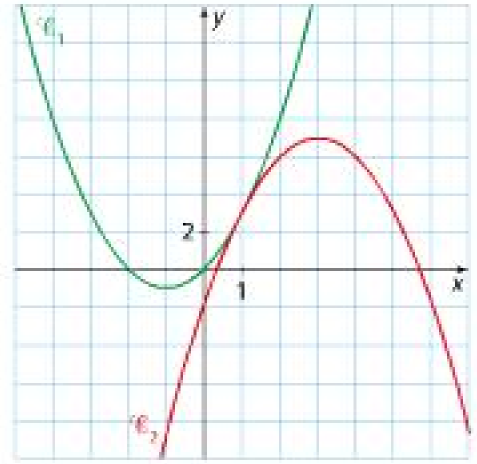
2. Démontrez que dans ce cas d est tangente à $\mathscr{P}$.

41 $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 5$ et d la droite d'équation $y = x$.



Existe-t-il des points de $\mathscr{P}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $y = x$?

42 $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ et $g(x) = x^2 + 2x$.



1. Attribuez à chaque fonction sa courbe.

2. a) Démontrez que ces courbes ont un unique point commun A.

b) Démontrez qu'en ce point, les deux courbes ont une tangente commune.

43 **Implication réciproque. Contre-exemple** LOGIQUE

La phrase « si $f(x) = x^2 + 10$ alors $f'(x) = 2x$ » est une implication.

a) Énoncez l'implication réciproque.

b) À l'aide d'un contre-exemple, prouvez que cette implication réciproque est fausse.

44 **Taux d'accroissement** ALGORITHMIQUE

1. f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$.
Voici un algorithme incomplet, écrit avec AlgoBox. Complétez-le afin d'obtenir les valeurs successives du taux d'accroissement de la fonction f en a : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, pour des valeurs de h égales à 10^{-n}, où n est un entier naturel, $2 \leqslant n \leqslant 10$.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  t EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  POUR n ALLANT_DE ... A ...
    DEBUT_POUR
    h PREND_LA_VALEUR ..........
    t PREND_LA_VALEUR ........
    AFFICHER t
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

2. Testez cet algorithme et conjecturez le nombre dérivé de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ en 3 puis en 24.

Aide
Pour définir la fonction utilisée, saisissez F1(x) = sqrt(x + 1).
x^n s'obtient par l'instruction pow(x, n).

45 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$. A est le point de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f d'abscisse 0.

1. Quel est le point B de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 6 ?

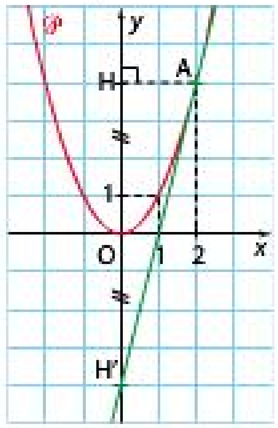
2. Quelles sont les coordonnées du point C de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB) ?

46 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Résoudre l'équation $f'(a) = \frac{1}{8}$, $a \in]0 ; +\infty[$.

2. La droite d'équation $y = \frac{1}{8}x + 2$ est-elle tangente à $\mathscr{C}$?

47 $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$. Le point A d'abscisse 2 appartient à $\mathscr{P}$.
Le point H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées. Le point H′ est le symétrique de H par rapport à l'origine O du repère.



1. Quelles sont les coordonnées des points A, H et H′ ?

2. Démontrez que la droite (AH′) est tangente en A à $\mathscr{P}$.

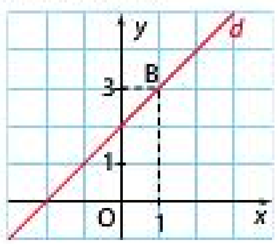
48 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1. Trouvez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 3.

2. a) Étudiez le signe de $f(x) - (-8x + 18)$.

b) Déduisez-en la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

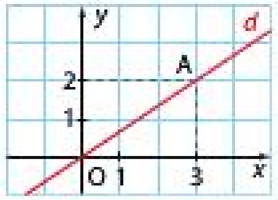
49 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx$. B est le point de coordonnées (1 ; 3).
La droite d d'équation $y = x + 2$ est tangente en B à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.



1. Démontrez que « d est tangente en B à $\mathscr{C}$ » équivaut à « $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ ».

2. Déduisez-en la valeur de a et de b et l'expression de $f(x)$.

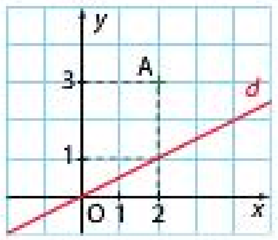
50 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + c$ $(a \neq 0)$.
Le point A(3 ; 2) est un point de sa courbe représentative et la tangente en A à $\mathscr{C}$ passe par l'origine O du repère.



1. Démontrez que « d est tangente en A à $\mathscr{C}$ » équivaut à « $f(3) = 2$ et $f'(3) = \frac{2}{3}$ ».

2. Déduisez-en la valeur de a et de c, puis l'expression de $f(x)$.

51 f est une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.
La droite d est tangente à $\mathscr{C}$ à l'origine O du repère et $\mathscr{C}$ passe par le point A(2 ; 3).



1. Démontrez que :
- $f(0) = 0$
- $f'(0) = \frac{1}{2}$
- $f(2) = 3$.

2. a) Déduisez-en la valeur de c, de b et de a.

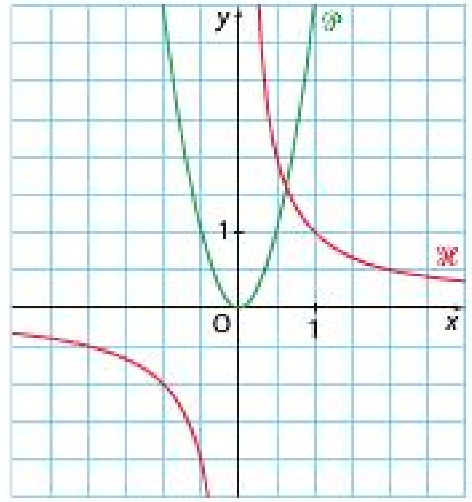
b) Quelle est l'expression de $f(x)$?

52 **Point de chute**
La trajectoire d'un mobile est portée par la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{1}{t}$ dans un repère orthonormé.

On admet que lorsqu'il quitte sa trajectoire en M, le mobile poursuit son mouvement en ligne droite sur la tangente en M.
À quel endroit doit-il quitter sa trajectoire pour passer par le point A(4 ; 0) ?

Aide On appelle t_0 l'abscisse de M.

53 $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ sont les représentations graphiques des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2$ et g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.



1. Existe-t-il un nombre a tel que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ aient des tangentes parallèles en leurs points d'abscisse a ?

2. Trouvez une équation pour chaque tangente.

AVEC LES TICE

54 Dans un repère, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. $\mathscr{P}$ est sa courbe représentative. A est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse -1. M est un point variable de $\mathscr{P}$ d'abscisse m $(m \neq -1)$. Les tangentes à la courbe en A et M se coupent en I. Les points J et N sont les milieux respectifs des segments [AM] et [IJ].
On s'intéresse aux questions suivantes :
- À quelle ligne appartient le point N ?
- Quelle particularité présente la tangente en N à cette ligne ?

1. Expérimenter avec GeoGebra
- Paramétrez les axes comme indiqué :

- Saisissez la fonction f. Créez le point A et un point M.
- Créez les tangentes à $\mathscr{P}$ en A et M puis le point I.
- Créez J puis N.

Déplacez M sur $\mathscr{P}$. Quelle conjecture faites-vous concernant N ?
- Créez la tangente en N à $\mathscr{P}$ et déplacez M.

Quelle conjecture faites-vous concernant la tangente en N ?

2. Démontrer

1. a) Démontrez que la tangente en M a pour équation $y = 2mx - m^2$.

b) Déduisez-en l'équation de la tangente en A.

c) Calculez les coordonnées de I et celles de J.

2. a) Démontrez que N a pour coordonnées :
$$\left(\frac{m-1}{2} ; \left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right).$$

b) Sur quelle ligne se déplace N ?

c) Étudiez la position relative de la droite (AM) et de la tangente en N à $\mathscr{P}$.

ROC Restitution organisée de connaissances

55 **Tangente passant par l'origine**
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère d'origine O.
A est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

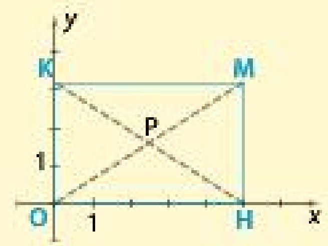
1. Démonstration
Démontrez que « La tangente en A passe par O » équivaut à « $f(a) = af'(a)$ ».

2. Application
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Quels sont les points de sa courbe représentative en lesquels la tangente passe par l'origine du repère ?
Trouvez une équation des tangentes. Vérifiez vos résultats à la calculatrice.

Prendre toutes les initiatives

56 Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{H}$ est l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.
On donne les points A(1 ; −1), B(1 ; 2) et C(2 ; 0).
Trouvez, si elles existent, les équations des tangentes à $\mathscr{H}$ passant respectivement par A, B et C.

57 Dans un repère orthonormé d'origine O, M est le point de coordonnées $(x ; y)$ avec $x > 0$ et $y > 0$. Le rectangle OHMK a pour aire 16.



1. Démontrez que le point M appartient à un arc $\mathscr{H}$ d'hyperbole que l'on tracera.

2. P est le centre du rectangle OHMK.

a) Pourquoi P appartient-il à la courbe $\mathscr{H}_1$ d'équation $y = \frac{4}{x}$ avec $x > 0$?

b) Démontrez que la droite (KH) est tangente en P à $\mathscr{H}_1$.

Approfondissement

Compléments numériques

58 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$$

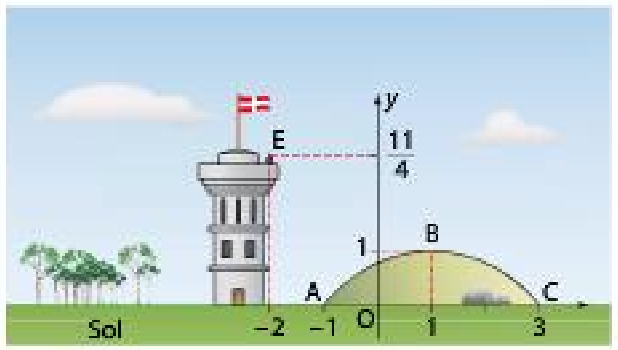
$\mathscr{P}$ est sa courbe représentative. M est un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a.

Pour quelles valeurs de a la tangente en M passe-t-elle par le point A(0 ; –3) ?

59 Point de vue !

Sur la figure ci-dessous, « l'arc » de parabole ABC représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses. Un observateur est placé en E de coordonnées $\left(-2 ; \frac{11}{4}\right)$ dans le repère choisi.

Le but de l'exercice est de déterminer les points de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles du point d'observation E.



1. On note f la fonction définie sur [–1 ; 3] par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Déterminez a, b, c pour que « l'arc ABC » soit la représentation graphique de f.

2. a) Reproduisez le schéma ci-dessus et indiquez sur la figure les points de la colline et ceux du sol qui ne sont pas visibles en E.

b) Faites les calculs nécessaires pour trouver les abscisses de ces points.

60 Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et A est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; -2\right)$.

On se propose de trouver les équations des tangentes à $\mathscr{P}$ issues de A.

1. Conjecturez le nombre de tangentes que l'on peut mener de A à la parabole.

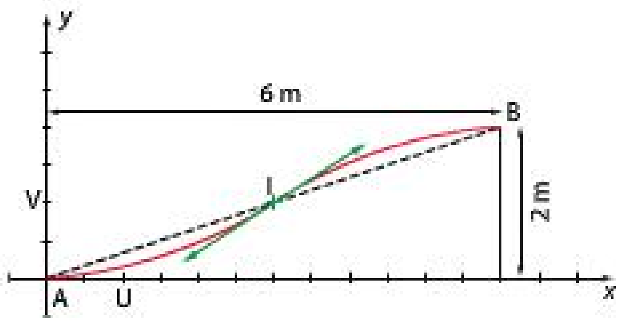
2. M est un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse m. Trouvez, en fonction de m, une équation de la tangente T en M à $\mathscr{P}$.

3. Démontrez que « T passe par le point A » équivaut à « $m^2 - m - 2 = 0$ ».

4. Déduisez-en les équations des tangentes passant par A ainsi que les coordonnées des points de tangence.

61 Une rampe de skateboard

On veut construire une rampe de skateboard. La figure ci-après représente le plan de fabrication.



La distance au sol entre A et B est de six mètres et le dénivelé en B est de deux mètres. Le point I est le milieu du segment [AB].

On réalise cette rampe à l'aide de deux arcs de parabole $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{IB}$, avec les contraintes suivantes :

- ces deux arcs représentent une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 6] ;
- la tangente en I est commune aux deux arcs ;
- le repère indiqué d'origine A est orthonormé ;
- les tangentes en A et B sont horizontales.

Pour la réalisation de la rampe, certains éléments ont besoin d'être précisés.

1. Trouvez une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour chacun des arcs de parabole.

2. Déduisez-en les expressions de f suivant les intervalles [0 ; 3] et [3 ; 6].

62 Sur la figure ci-après on a tracé les paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 2x + 3$.

A est un point de $\mathscr{P}_1$ d'abscisse a et B un point de $\mathscr{P}_2$ d'abscisse b.

1. Trouvez une équation de la tangente :

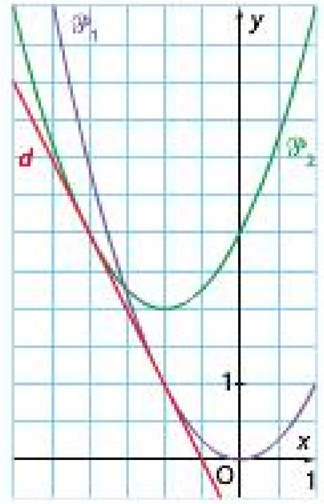
a) T_a en A à $\mathscr{P}_1$;

b) T_b en B à $\mathscr{P}_2$.

2. Démontrez que la droite d est une tangente commune aux deux courbes si et seulement si a et b vérifient le système :

$$(S)\ \begin{cases} a = b + 1 \\ a^2 = b^2 - 3. \end{cases}$$

3. Résolvez le système et déduisez-en une équation de d.



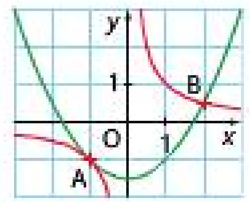
63 1. Vérifiez que :

$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$.

2. Dans un repère orthonormé on a tracé les courbes représentatives des fonctions :

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3)$

et g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

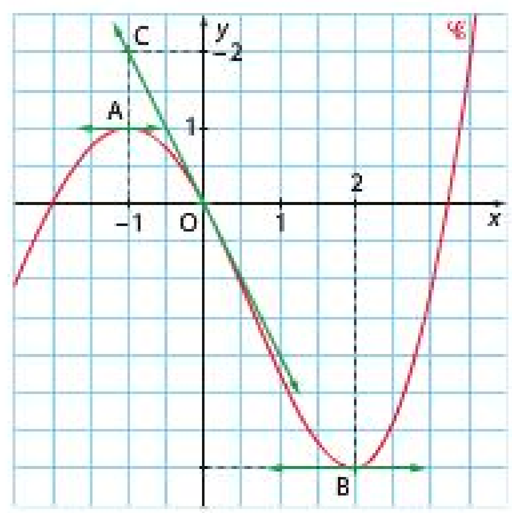


a) Quelles sont les coordonnées des points A et B intersections de ces deux courbes ?

b) Démontrez que ces courbes ont une tangente commune en A.

c) Étudiez suivant les valeurs de x les positions relatives de ces deux courbes.

64 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessus est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les tangentes à la courbe en A et B sont horizontales. La tangente en O, origine du repère, passe par le point C(–1 ; 2).



1. Justifiez les affirmations suivantes :

- $f'(0) = -2$;
- $f'(-1) = 0$;
- $f'(2) = 0$.

2. On suppose que la fonction f', dérivée de f, est définie pour tout nombre x par :

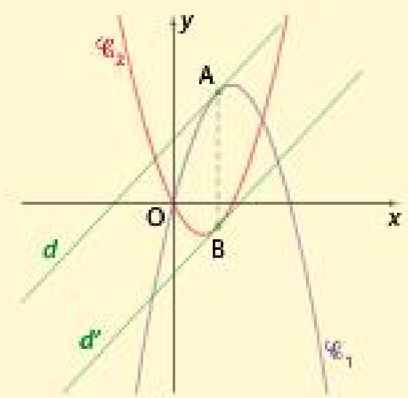
$$f'(x) = ax^2 + bx + c.$$

En utilisant les affirmations de la question **1.**, calculez a, b, c et déterminez $f'(x)$.

Prendre toutes les initiatives

65 On a tracé ci-après les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -x^2 + 8x$;
- $g(x) = x^2 - 4x$.



La droite d est tangente en A à $\mathscr{C}_1$.

La droite d' est tangente en B à $\mathscr{C}_2$.

Les droites d et d' sont parallèles.

Quelle est l'abscisse commune des points A et B ?

66 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 - 6x + 2.$$

Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

67 À tout nombre $m \neq 0$, on associe la parabole $\mathscr{P}_m$ d'équation :

$$y = mx^2 + (1 - 2m)x + m.$$

Démontrez que toutes ces paraboles sont tangentes entre elles.

Note

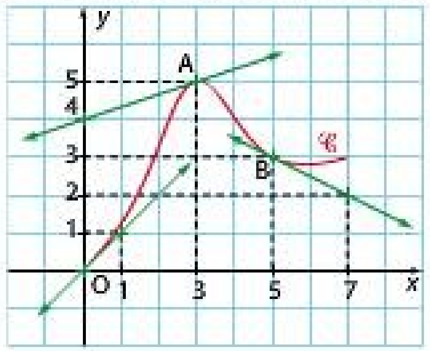
On dit que deux paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont tangentes lorsqu'elles ont un point commun A et une tangente commune en A.

Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les** *coups de pouce* **page 381.**

A Savoir lire un graphique

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;7]$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f. Trouvez une équation des tangentes à la courbe en O, A et B.

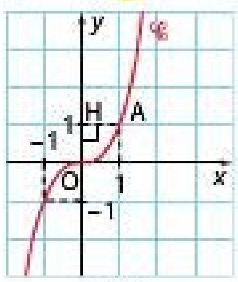


B Construire, conjecturer, démontrer

À la calculatrice, tracez la parabole $\mathscr{P}$ d'équation :
$y = x^2 + 2x - 1$ et la droite d'équation $y = -4x - 10$.
Que dire de d par rapport à $\mathscr{P}$? Prouvez-le.

C Tangente : la méthode de Torricelli

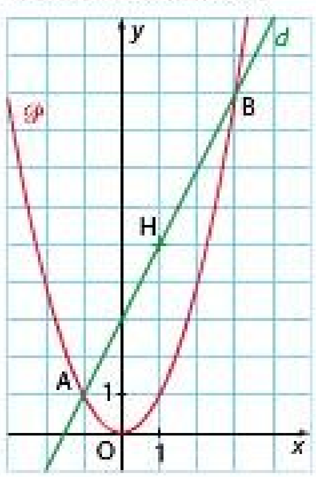
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. Le point H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées.



On note H′ le point tel que :
$$\overrightarrow{OH'} = -2\overrightarrow{OH}.$$
Démontrez que la droite (AH′) est tangente à $\mathscr{C}$.

D Une propriété remarquable de la parabole

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et d la droite d'équation $y = 2x + 3$.
La droite d coupe $\mathscr{P}$ en A et B. On note H le milieu du segment [AB].

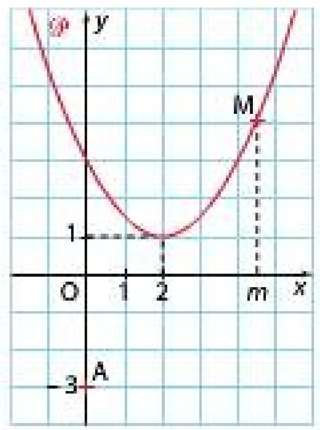


1. a) Calculez les coordonnées des points A et B.
b) Déduisez-en les coordonnées de H.

2. C est le point de $\mathscr{P}$ en lequel la tangente est parallèle à (AB).
a) Quelle est le coefficient directeur de la droite (AB) ?
b) Démontrez que C et H ont la même abscisse.

E Où passe-t-elle ?

Dans un repère orthonormé (O; I, J), on a tracé la parabole $\mathscr{P}$, courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$$
Le point A a pour coordonnées $(0; -3)$ et M est un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse m.



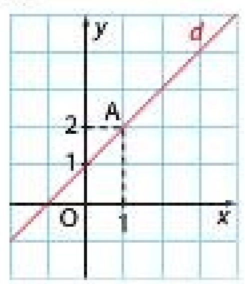
1. a) Calculez $f(m)$ et $f'(m)$.
b) Déduisez-en une équation de la tangente T en M à la parabole $\mathscr{P}$.

2. Pour quelles valeurs de m la tangente T passe-t-elle par A ?

3. Reproduisez la figure. Placez le point A et tracez les tangentes à $\mathscr{P}$ passant par A.

F À la recherche d'une parabole

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Sa courbe représentative $\mathscr{P}$ passe par O, origine du repère.
De plus, la droite d est tangente en A à $\mathscr{P}$.
Le but de l'exercice est de calculer a, b et c.



1. a) Justifiez que $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f'(1) = 1$.
b) Déduisez-en que a, b et c sont solutions du système :
$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 2a + b = 1. \end{cases}$$

2. Quelle est alors l'expression de $f(x)$?