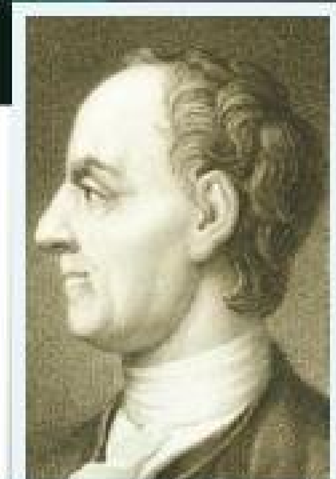
CHAPITRE 2

Variations des fonctions associées

D'un siècle à un autre

Lors de la Coupe du monde de football de 2010 en Afrique du Sud, les vuvuzelas sont venues perturber les retransmissions télévisées. Pour pouvoir se débarrasser de ce bruit, il faut réussir à séparer un signal indésirable d'un signal utile.

Pour cela, les ingénieurs réalisent une opération de « démixage » qui revient à faire une soustraction de signaux, c'est-à-dire une soustraction de fonctions. Cela n'aurait pas été possible sans les travaux de Leonhard Euler, qui a introduit le concept de « fonction ».



En savoir plus sur **Leonhard Euler**

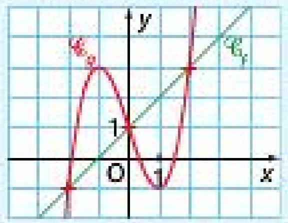
→ Chercheurs d'hier p. 59

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

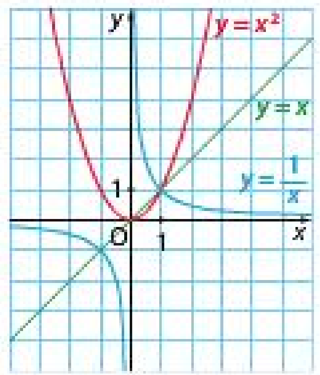
Résoudre graphiquement une inéquation

Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$, c'est chercher les nombres x dont l'image par f est supérieure à l'image par g.
Graphiquement, cela revient à trouver les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.



Sur cet exemple, $f(x)$ est supérieur à $g(x)$ pour $x < -2$ et pour $x \in]0\,;2[$.

1 Résolvez graphiquement les inéquations suivantes.
a) $x^2 \leqslant x$
b) $x > \dfrac{1}{x}$
c) $x^2 - \dfrac{1}{x} < 0$



Sens de variation

f est une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est strictement **croissante** sur I signifie que pour tous nombres a et b de I :
  si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
  On dit que f conserve l'ordre.
- Dire que f est strictement **décroissante** sur I signifie que pour tous nombres a et b de I :
  si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
  On dit que f inverse l'ordre.
- La **fonction affine** définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$.
  Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.
  La **fonction carré** définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
  Elle est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
  La **fonction inverse** définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

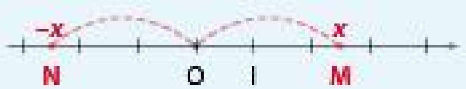
2 Les fonctions suivantes sont définies sur l'intervalle $I = [-1\,;5]$.
Précisez leur sens de variation sur I.
a) $f(x) = 3x + 2$.
b) $g(x) = 5$.
c) $h(x) = -\dfrac{x}{2} + 3$.
d) $k(x) = x^2$.

3 Comparez les nombres A et B.
a) $A = \dfrac{2}{\pi}$ et $B = \dfrac{2}{3}$.
b) $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{1}{x}$, avec $x > \dfrac{4}{3}$.
c) $A = \dfrac{1}{x+2}$ et $B = \dfrac{1}{x+3}$, avec $x > 0$.

4 Vrai ou faux ?
f est une fonction strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(5) = 0$.
a) Si $4 < x < 5$, alors $f(x) \in]f(4)\,;0[$.
b) $f(2) \times f(3) > 0$.

Sur une droite graduée : distance à l'origine

Les points M et N, d'abscisses respectives x et $-x$, sont à la même distance de l'origine O. Cette distance est égale à x si x est positif, et à $-x$ si x est négatif.



5 Sur une droite graduée, de repère (O, I), M est le point d'abscisse x.
Trouvez l'ensemble des nombres x tels que :
a) $OM \leqslant 5$.
b) $2 < OM < 3$.

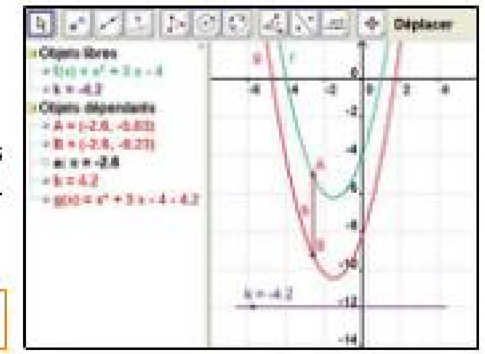
Voir les corrigés p. 363

Activité DES PARABOLES ET DES OPÉRATIONS

TICE

1 a) Avec GeoGebra, tracez la parabole représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$.
Saisie : f(x)=x²+3x-4 — outil 1
b) Créez un curseur k. Réglages : $-10 \leqslant k \leqslant 10$; incrément 0,1 ; largeur 300. — outil 3
c) Tracez la parabole représentative de la fonction g :
$g(x) = f(x) + k$.
d) Faites varier k. Observez les deux paraboles.
Que constatez-vous ?
e) k étant fixé (k différent de 0 et de 1), créez deux points de même abscisse : A sur une des paraboles et B sur l'autre.
Créez le segment [AB].

Aide
Tracez la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par A afin de créer le point B.

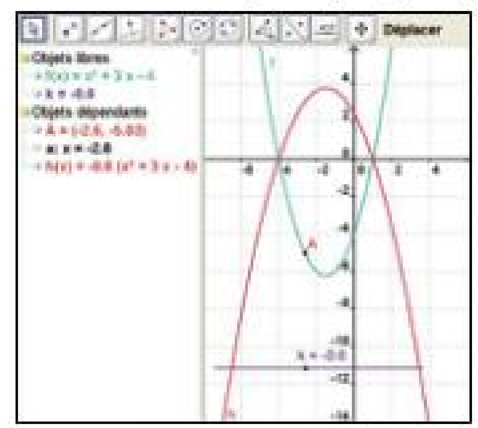


f) Dans la fenêtre Algèbre, repérez la longueur du segment [AB], nommée b. Déplacez A et surveillez l'évolution de b. Que constatez-vous ?
g) Faites varier k. Dans la fenêtre algèbre, observez les variations de k et de b. Que constatez-vous ?

Complétez : $\begin{cases} \text{si } k \text{ est positif, } b = \ldots\ldots \\ \text{si } k \text{ est négatif, } b = \ldots\ldots \end{cases}$

Vocabulaire
b est la valeur absolue de k.

2 a) Effacez la fonction g et créez la fonction h en saisissant h(x) = k*f(x).
La parabole représentative de la fonction h s'affiche.
b) Faites varier k, ($k \neq 0$) et observez les deux paraboles. Que constatez-vous ?
c) Pourquoi les deux paraboles se coupent-elles toujours sur l'axe des abscisses ?
d) Pour quelle valeur de k les courbes sont-elles symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?



Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

Virgile affirme qu'il est en mesure de proposer deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I, toutes les deux strictement croissantes sur I, telles que la fonction h « produit de f et g » définie sur I par $h(x) = f(x) \times g(x)$ est strictement décroissante sur I. Qu'en pensez-vous ?

1 Fonction racine carrée

1.1 Étude de la fonction racine carrée

Tout nombre positif x a une racine carrée notée $\sqrt{x}$: c'est le nombre positif dont le carré est x.
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est donc définie sur $[0 ; +\infty[$.

Théorème 1 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0 ; +\infty[$, est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	↗

• Exercice 63, Logique → p. 64

Démonstration

Pour démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$, il suffit de prouver que si u et v sont deux nombres de I tels que $0 \leqslant u < v$, alors $f(u) < f(v)$.
Autrement dit, si $u - v < 0$, alors $f(u) - f(v) < 0$ ou encore $\sqrt{u} - \sqrt{v} < 0$.
u et v étant positifs :

$$u - v = (\sqrt{u})^2 - (\sqrt{v})^2 = (\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v}).$$

Par hypothèse, $0 \leqslant u < v$, ainsi, $v > 0$ d'où $\sqrt{v} > 0$ et comme $\sqrt{u} \geqslant 0$, alors $\sqrt{u} + \sqrt{v} > 0$.
D'après la règle des signes :

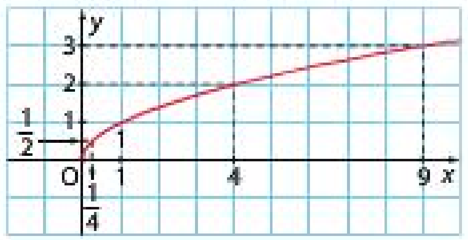
$$u - v = \underbrace{(\sqrt{u} + \sqrt{v})}_{\text{positif}}(\sqrt{u} - \sqrt{v}).$$

$u - v$ et $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ sont de même signe. En conclusion, si $u - v < 0$ alors $\sqrt{u} - \sqrt{v} < 0$.

Représentation graphique

Un tableau de valeurs permet de tracer la courbe.

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3



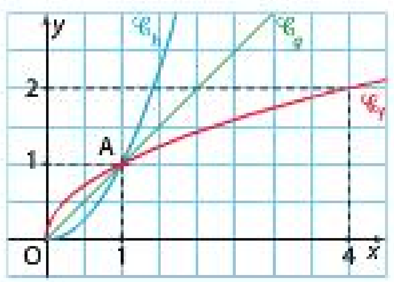
1.2 Comparaison de x, $\sqrt{x}$ et x^2 (pour x positif)

Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, les trois fonctions :
$f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto x^2$
ont le même tableau de variation.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$ $g(x)$ $h(x)$	0	1	↗

Graphiquement, on constate que :
- les trois courbes ont en commun les points $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$;
- pour $x \in]0 ; 1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$, elle-même au-dessus de $\mathscr{C}_h$;
- pour $x > 1$, la courbe $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$, elle-même au-dessus de $\mathscr{C}_f$;
- dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ sont symétriques par rapport à $\mathscr{C}_g$.

Le théorème qui suit permet de justifier ces constatations.



Théorème 2 x est un nombre positif. • Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$. • Pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $\sqrt{x} < x < x^2$.

• Exercice 41 → p. 62

Démonstration

- **$0 \leqslant x \leqslant 1$.** En multipliant chacun des membres par x (positif), on obtient :

$$0 \times x \leqslant x \times x \leqslant 1 \times x, \text{ donc } 0 \leqslant x^2 \leqslant x. \quad (1)$$

La croissance de la fonction racine carrée sur $[0 ; +\infty[$ nous permet alors d'affirmer que :

$$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x}, \text{ donc que } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}. \quad (2)$$

Finalement, on déduit de (1) et (2) que $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
- **$1 < x$.** On multiplie chacun des membres par x :

$$1 \times x < x \times x \quad \text{donc } x < x^2.$$

Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $\sqrt{x} < x$. Ainsi, $\sqrt{x} < x < x^2$.

2 Fonction valeur absolue

2.1 Valeur absolue d'un nombre

Définition 1 Pour tout nombre x, la **valeur absolue** de x est égale à x si x est positif, à $(-x)$ si x est négatif.
Elle se note $|x|$. $\quad |x| = \begin{cases} x \text{ lorsque } x \geqslant 0 \\ -x \text{ lorsque } x \leqslant 0 \end{cases}$

Remarques. Pour tout nombre x :
- $|x| = |-x|$;
- $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.

2.2 Étude de la fonction valeur absolue

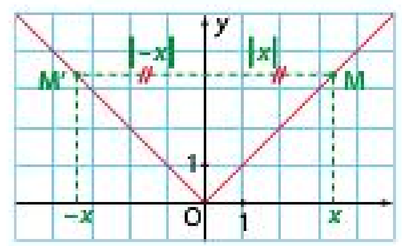
La fonction $f : x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$, est, **par définition** de la valeur absolue d'un nombre, une fonction affine « par morceaux ». En effet :
- sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, f est égale à la fonction affine strictement décroissante $x \mapsto -x$;
- sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, f est égale à la fonction strictement croissante $x \mapsto x$.

Il en résulte le théorème suivant.

Théorème 3 La fonction $f : x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est :
- strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$;
- strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Représentation graphique. Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction valeur absolue est la réunion de deux demi-droites d'origine O. Pour tout nombre x, $|x| = |-x|$, soit $f(x) = f(-x)$. Ainsi, les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe (Oy).
En conséquence, les deux demi-droites sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



3 Sens de variation des fonctions associées

3.1 Variations de $x \mapsto u(x) + k$

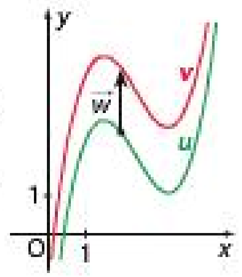
Théorème 4

u est une fonction définie sur un intervalle I et k est un nombre fixé.
v est la fonction définie sur I par $v(x) = u(x) + k$.
Les fonctions u et v varient dans le **même sens** sur l'intervalle I.

Démonstration. Supposons la fonction u strictement **croissante** sur I.

Pour tous nombres a et b de l'intervalle I, si $a < b$, alors $u(a) < u(b)$, d'où $u(a) + k < u(b) + k$, soit encore $v(a) < v(b)$. La fonction v est strictement **croissante** sur l'intervalle I.

On démontre de la même manière que si u est strictement **décroissante** sur I, alors v l'est aussi.



Remarque. Dans un repère, la représentation graphique de v se déduit de celle de u par la translation de vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(0\,;k)$.

Animation

3.2 Variations de λu, $(\lambda \neq 0)$

λ est un nombre non nul. λu est la fonction définie sur l'intervalle I par $\lambda u : x \mapsto \lambda \times u(x)$.
Par exemple, si $u(x) = x^2 + 3$, la fonction $5u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $5u(x) = 5(x^2 + 3)$.

Théorème 5

u est une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre fixé **non nul** :
- si λ est **positif**, u et λu varient dans le **même sens** sur I ;
- si λ est **négatif**, u et λu varient en **sens contraires** sur I.

Démonstration. Prouvons le résultat dans le cas où u est strictement **croissante** sur I et $\lambda < 0$.

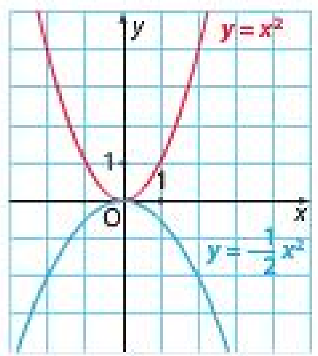
Prenons les nombres a et b dans l'intervalle I tels que $a < b$. Puisque la fonction u est strictement croissante, $u(a) < u(b)$.

En multipliant les deux membres par λ (négatif), on obtient $\lambda u(a) > \lambda u(b)$, ce qui montre que la fonction λu est strictement décroissante.

On démontre les autres cas de manière analogue.

Exemple. La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.
$-\dfrac{1}{2}u$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u(x)$	↘	0	↗
$-\dfrac{1}{2}u(x)$	↗	0	↘



Pour l'étude de contre-exemples : exercices 25 et 26, TP → p. 60 et 61

Attention. Il n'existe pas de théorème général donnant le sens de variation de la somme ou du produit de deux fonctions.

3.3 Variation de $\sqrt{u}$

Théorème 6

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, **$u(x)$ est positif**.
v est la fonction définie par $v(x) = \sqrt{u(x)}$.
Les fonctions u et v varient dans le **même sens** sur l'intervalle I.

Démonstration. Prouvons le résultat dans le cas où la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle I.

Prenons les nombres a et b dans l'intervalle I tels que $a < b$. Puisque la fonction u est strictement croissante, $0 \leqslant u(a) < u(b)$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{u(a)} < \sqrt{u(b)}$, soit encore $v(a) < v(b)$.

On conclut que la fonction v est aussi strictement croissante sur l'intervalle I.

On démontre de manière analogue le cas où la fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle I.

Exemple. La fonction u est définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$ par $u(x) = -2x + 1$. Cette fonction est strictement décroissante sur cet intervalle.

Pour tout nombre x de l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $u(x)$ est positif.

La fonction $v : x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ est donc définie et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

3.4 Variations de $\dfrac{1}{u}$

Théorème 7

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, **$u(x)$ est non nul et de signe constant**.
v est la fonction définie sur l'intervalle I par $v(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.
Les fonctions u et v varient en **sens contraire** sur l'intervalle I.

Démonstration. Prenons les nombres a et b dans l'intervalle I :

$$v(a) - v(b) = \frac{1}{u(a)} - \frac{1}{u(b)} = \frac{u(b) - u(a)}{u(a) \cdot u(b)}.$$

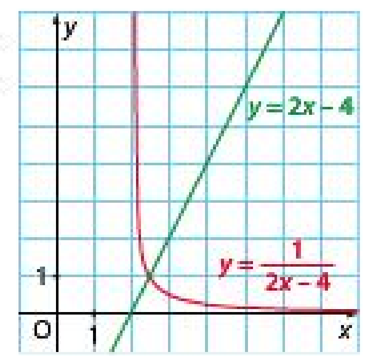
Pour tout nombre x de I, $u(x)$ est non nul et de signe constant, le produit $u(a) \cdot u(b)$ est donc strictement positif. Il en résulte que $v(a) - v(b)$ et $u(b) - u(a)$ sont de même signe sur I et donc que $v(a) - v(b)$ et $u(a) - u(b)$ sont de signes contraires.

En conclusion, les fonctions u et v varient en **sens contraire** sur I.

Exemple. Sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$, la fonction u définie par $u(x) = 2x - 4$ est strictement croissante.

Pour tout nombre x de l'intervalle $]2\,;+\infty[$, $u(x)$ est strictement positif. La fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{2x-4}$ est donc définie et strictement décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

x	2	$+\infty$
$u(x)$	0 ↗ +	
$v(x)$	‖ ↘	



EXERCICES

Application

Compléments numériques

OBJECTIF 1 Étudier une fonction du type $\sqrt{u}$

u est une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de I, **$u(x)$ est positif**.
Les fonctions u et $\sqrt{u}$ **varient dans le même sens** sur I.

EXERCICE RÉSOLU A Étudier une fonction du type $\sqrt{u}$ sur un intervalle

On étudie la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

1. Vérifiez que la fonction f est définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

2. Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

3. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $\mathrm{J} = \left[7\,;\frac{21}{2}\right]$.

Méthode

1. La racine carrée d'un nombre n'a de sens que si ce nombre est positif ou nul.

2. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens. On étudie d'abord les variations de la fonction (affine) définie sur l'intervalle I par $u(x) = 2x - 5$.

- On conclut et on vérifie à l'aide de la calculatrice graphique.

3. On utilise le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle J.

- Une fonction croissante conserve l'ordre.

Solution

1. La fonction f est définie pour toute valeur de x telle que $2x - 5 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant \frac{5}{2}$.
La fonction f est définie sur l'intervalle I.

2. La fonction $u : x \mapsto 2x - 5$ est affine.
Le terme en x a pour coefficient 2 (positif), donc u est croissante sur l'intervalle I.
Sur I, les fonctions u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens, donc la fonction f est croissante sur I.
D'où le tableau de variation :

x	$\frac{5}{2}$	7	$\frac{21}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	3 ↗	4 ↗	

3. $7 > \frac{5}{2}$, donc l'intervalle J est contenu dans l'intervalle I.

- La fonction f est donc croissante sur J.
Puisque $7 \leqslant x \leqslant \frac{21}{2}$ alors, $f(7) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{21}{2}\right)$
et donc $3 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

Mise en pratique

Dans chacun des exercices 1 à 5

a) Vérifiez que la fonction f est définie sur l'intervalle I.

b) Étudiez les variations de f sur I.

c) Utilisez votre calculatrice pour représenter f et vérifier vos résultats.

1 $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}+1}$, $\mathrm{I} = [-3\,;+\infty[$.

2 $f(x) = \sqrt{-x+3}$, $\mathrm{I} =]-\infty\,;3]$.

3 $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$, $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$.

4 $f(x) = \sqrt{|x|}$, $\mathrm{I} =]-\infty\,;0]$.

5 $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$, $\mathrm{I} =]-\infty\,;-1]$.

6 La fonction f est définie pour tout nombre $x \geqslant -3$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$. Utilisez le tableau de variation de cette fonction pour donner un encadrement de $\sqrt{\frac{x+3}{2}}$ lorsque $x \in [-1\,;5]$.

OBJECTIF 2 Étudier une fonction du type $\frac{1}{u}$

u est une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout nombre x de I, **$u(x)$ est non nul et de signe constant**. Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ varient en **sens contraire** sur I.

EXERCICE RÉSOLU B Étudier une fonction du type $\frac{1}{u}$ sur un intervalle

On étudie la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-4}$.

1. Justifiez que la fonction f est définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]4\,;+\infty[$.

2. Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

3. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à $\mathrm{J} = [5\,;7]$.

Méthode

1. Tout nombre non nul a un inverse. Seul zéro n'a pas d'inverse.

2. Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ varient en sens contraire (théorème 7). On étudie d'abord les variations de la fonction (affine) définie sur I par $u(x) = x - 4$.

- On conclut et on vérifie à l'aide de la calculatrice graphique.

3. On utilise le sens de variation de la fonction f sur J.

- Une fonction décroissante inverse l'ordre.

Solution

1. f est définie pour toute valeur de x telle que $x - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 4$.
f est donc bien définie sur $\mathrm{I} =]4\,;+\infty[$.

2. La fonction $u : x \mapsto x - 4$ est affine.
Le terme en x a pour coefficient 1 (positif) donc u est croissante sur l'intervalle I.
Sur l'intervalle I, u et $\frac{1}{u}$ varient en sens contraire, donc f est décroissante sur I.
D'où le tableau de variation :

x	4	5	7	$+\infty$
$f(x)$	‖ ↘	1 ↘	$\frac{1}{3}$ ↘	

3. $4 < 5$, donc l'intervalle J est contenu dans l'intervalle I.
La fonction f est donc décroissante sur J.
Puisque $5 \leqslant x \leqslant 7$, alors $f(7) \leqslant f(x) \leqslant f(5)$
et donc $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

Mise en pratique

Pour les exercices 7 à 11

a) Vérifiez que la fonction f est définie sur l'intervalle I.

b) Étudiez les variations de f sur I.

c) Utilisez votre calculatrice pour représenter f et vérifier vos résultats.

7 $f(x) = \frac{1}{3-x}$, $\mathrm{I} =]3\,;+\infty[$.

8 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\mathrm{I} =]-\infty\,;0[$.

9 $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $\mathrm{I} =]-\infty\,;0[$.

10 $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$.

11 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$, $\mathrm{I} = \left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

12 La fonction f est définie pour tout nombre $x > 3$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}.$$

Utilisez le tableau de variation de cette fonction pour donner un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$ lorsque $x \in [4\,;19]$.

EXERCICES

OBJECTIF 3 Étudier les variations d'une fonction sur une réunion d'intervalles

- u est une fonction, k un nombre. v est la fonction définie par $v(x) = u(x) + k$.
Les fonctions u et v ont le même sens de variation.
- λ est un nombre non nul,
  - Si $\lambda > 0$, les fonctions u et λu varient dans le même sens.
  - Si $\lambda < 0$, les fonctions u et λu varient en sens contraire : ces résultats s'appliquent sur tout intervalle I sur lequel les fonctions utilisées sont définies.

EXERCICE RÉSOLU C Étudier une fonction de la forme $\lambda u + k$

On étudie la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{2}{x} + 3$.

1. Justifiez que la fonction f est définie sur $I \cup J$ avec $I =]-\infty\,;0[$ et $J =]0\,;+\infty[$.

2. Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle I, puis sur l'intervalle J.

Méthode

1. On repère les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'est pas calculable. Seule la division par x peut poser problème.

2. On analyse la suite d'opérations à effectuer pour le calcul de $f(x)$. On peut ainsi remarquer que f est de la forme $\lambda u + k$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$, $\lambda = -2$ et $k = 3$.

- On étudie les variations de la fonction f, séparément, sur chacun des intervalles I et J.

- On conclut par un tableau de variation et on vérifie à l'aide de la calculatrice graphique.

Solution

1. La division par zéro est impossible : f est définie pour toute valeur de x non nulle.
f est définie sur $I \cup J$.

2. Sur l'intervalle I, comme sur l'intervalle J, f se décompose de la manière suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto -2 \times \frac{1}{x} \mapsto -\frac{2}{x} + 3.$$

- La fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur I.
Les fonctions u et $-2u$ varient en sens contraire, donc sur l'intervalle I,
la fonction $-2u : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est croissante.
Enfin, comme $f(x) = -2u(x) + 3$, f et $-2u$ varient dans le même sens :
la fonction f est croissante sur I.
Sur l'intervalle J, la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est encore décroissante.
On arrive donc à la même conclusion :
la fonction f est croissante sur J.

- D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

Mise en pratique

Dans chacun des exercices 13 à 16

a) Justifiez que la fonction f est définie sur D.

b) Étudiez les variations de f sur chacun des intervalles qui composent D.

c) Donnez le tableau de variation de f.

13 $f(x) = \dfrac{1}{3x} - 5$; $D =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

14 $f(x) = \dfrac{2}{|x|}$; $D =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

15 $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 4$; $D =]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

16 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$; $D = [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

Pour se tester

Exercices interactifs

17 Questions sur le cours

Complétez les expressions suivantes.

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est :
a) définie sur l'intervalle I = …… ;
b) strictement …… sur I.

2. La fonction $g : x \mapsto |x|$ est :
a) strictement …… sur $]-\infty\,;0]$;
b) strictement …… sur $[0\,;+\infty[$.

3. Si $0 < x < 1$, alors x, $\sqrt{x}$ et x^2 sont rangés dans l'ordre : …… < …… < ……

4. a est un nombre non nul. La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{ax}$ est croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ si a est ……

18 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

a) $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$.

b) Pour tout nombre x, $-x \leq x^2$.

c) La fonction définie sur l'intervalle $I = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = -2\sqrt{x}$ est strictement décroissante sur I.

d) Les nombres x et y sont non nuls.
Si $x < y$ alors $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

e) La fonction $x \mapsto 2 - \dfrac{3}{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

f) La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est définie pour tout nombre x.

g) La fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ atteint son minimum en 0.

19 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. La fonction définie, pour tout nombre $x > 0$, par $f(x) = \dfrac{|x|}{2x}$ est :
a) constante b) croissante c) décroissante

2. a est un nombre non nul. La fonction définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$, par $f(x) = \dfrac{1}{ax^2}$ est :
a) croissante sur I si $a > 0$;
b) décroissante sur I si $a > 0$;
c) ni croissante ni décroissante.

3. La fonction définie, pour tout nombre $x \geq -1$, par $f(x) = -2\sqrt{x+1}$ est :
a) constante b) croissante c) décroissante

4. Dans un même repère, les représentations des fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = -|x|$:
a) n'ont aucun point commun ;
b) forment deux droites sécantes ;
c) sont confondues.

20 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. La fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 1$ est strictement croissante sur l'intervalle :
a) $[0\,;+\infty[$ b) $]-1\,;+\infty[$ c) $[1\,;3]$

2. La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, avec :
a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$
c) $f(x) = |x| - 1$

3. La fonction f est strictement décroissante sur $[2\,;5]$, avec :
a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ b) $f(x) = 2x^2 - 10$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

4. Pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[2\,;5]$:
a) $\dfrac{1}{x} < 0{,}2$ b) $\sqrt{x} < x^2$ c) $x < \sqrt{x}$

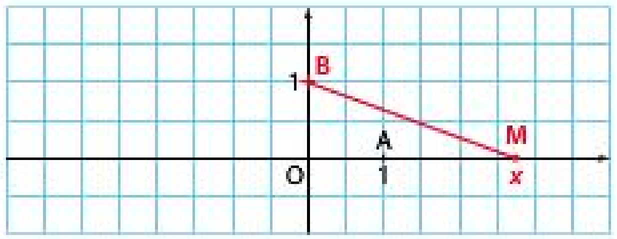
5. Pour tout nombre $x > 1$:
a) $\dfrac{1}{x^2+1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$
b) $\dfrac{1}{x^2+1} < \dfrac{1}{x+1}$
c) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

21 Modéliser une situation

Dans un repère orthonormé (O; A, B), M est un point (variable) d'abscisse x sur l'axe des abscisses.



Objectif Étudier les variations de la longueur BM lorsque M décrit l'axe (O; A).

1. Intuitivement, on remarque, par exemple, que lorsque M s'éloigne de O, la distance BM augmente. Cette distance BM dépend du nombre x.

Dans un tableau, indiquez les variations de la fonction $x \mapsto$ BM (croissance, décroissance, maximum, minimum).

2. Pour démontrer cette conjecture, on exprime BM « en fonction » de l'abscisse x du point M.

Justifiez que $BM = \sqrt{x^2+1}$.

3. L'objectif est donc maintenant d'étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

Expliquez pourquoi $f(x)$ existe quel que soit le nombre x.

La fonction f est du type $\sqrt{u}$. Les variations de f dépendent de celles de la fonction u.

a) Établissez le tableau de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u : x \mapsto x^2 + 1.$$

b) Déduisez-en les variations de f.

c) Vos conjectures sont-elles ainsi prouvées ?

Commentaire

Le repère étant orthonormé, le minimum de la fonction f est la distance du point B à l'axe des abscisses.

Les outils du chapitre 9 vous permettront de calculer, dans un repère orthonormé, la distance d'un point B à une droite quelconque d en déterminant les coordonnées du projeté orthogonal du point B sur la droite d (voir l'exercice 95, page 236).

22 Utiliser une transformation d'écriture

Objectif Étudier les variations sur l'intervalle $I = [0\,;5]$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$, puis préciser la position de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = 3$.

1. Sous cette forme, l'expression de f ne nous permet pas, en utilisant les fonctions de référence, de préciser les variations de f.
Transformons l'écriture de $f(x)$ pour essayer de résoudre le problème. Une méthode consiste à faire apparaître l'expression $(x + 1)$ au numérateur.

a) Trouvez les nombres a et b tels que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;5]$,

$$3x - 2 = a(x + 1) + b.$$

b) Déduisez-en l'expression de $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. Pour calculer l'image de x par f, sous cette forme, on commence nécessairement par calculer $x + 1$.

Complétez le programme de calcul donnant une décomposition de la fonction f.

$$x \mapsto x+1 \mapsto \frac{1}{x+1} \mapsto \ldots$$

3. La fonction $x \mapsto x + 1$ est strictement croissante sur I. On peut, avec le programme de calcul précédent, terminer, de proche en proche, l'étude du sens de variation de la fonction f.

Faites un tableau puis concluez.

Commentaire

Les chapitres 3 et 4 vous apporteront de nouveaux outils pour étudier les variations d'une fonction homographique.

Retenez cependant que la transformation d'une expression peut permettre de résoudre des problèmes.

4. Pour savoir si la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus ou au-dessous de la droite Δ, il faut comparer $f(x)$ et 3 suivant les valeurs de x.
Notons d la fonction « différence » définie sur I par :

$$d(x) = f(x) - 3.$$

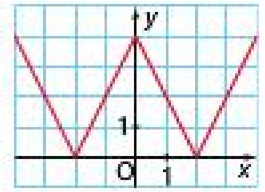
a) Choisissez la forme la plus adaptée de $f(x)$ et calculez $d(x)$.

b) Étudiez le signe de $d(x)$ et concluez.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

23 Vous pouvez définir la fonction f représentée ci-dessous en décomposant $\mathbb{R}$ en quatre intervalles et en exprimant $f(x)$ sur chacun de ces intervalles, mais essayez de trouver une expression unique valable pour tout nombre x.



24 Les points A, B et C sont alignés et sont tels que :

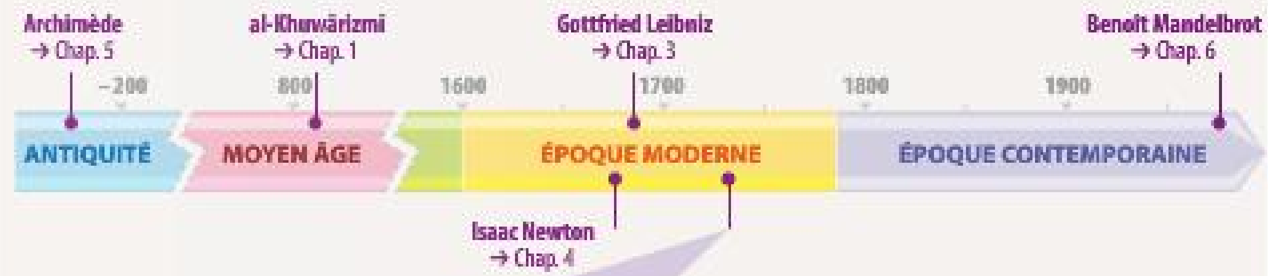
$$AB = 2\text{ cm} \quad \text{et} \quad BC = 1\text{ cm}.$$

Où placer le point M sur la droite (AB) pour que $MA + MB - MC = 4$ cm ?

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

Chercheurs d'hier

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



Leonhard Euler
(1707-1783)

Parallèlement à des études de philosophie et de droit, il s'intéresse aux mathématiques, domaine dans lequel ses talents lui valent d'être remarqué par Jean Bernoulli. Sa notoriété et l'aide de la famille Bernoulli lui permettent d'obtenir un poste de professeur de mathématiques à l'université de Saint-Pétersbourg, où il terminera sa carrière après un passage en Prusse à l'invitation de Frédéric le Grand. Son œuvre concerne tous les domaines des mathématiques. Ses contemporains le considéraient comme le plus grand mathématicien de tous les temps.

▲ « Une méthode pour trouver les lignes courbes jouissant de propriétés de maximum ou de minimum ».

Sur le Web http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=euler

Utiliser sa calculatrice

→ Pour analyser les variations de fonctions

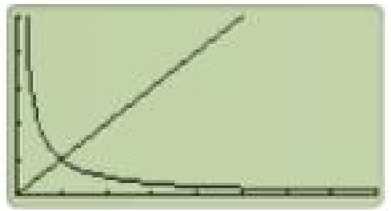
TP 25 Étude des variations de la somme de deux fonctions monotones

Dire que f est monotone sur l'intervalle I signifie que f varie toujours dans le même sens sur I : elle est toujours croissante (ou toujours décroissante, ou toujours constante).

1. Tracer les courbes

Faites afficher les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

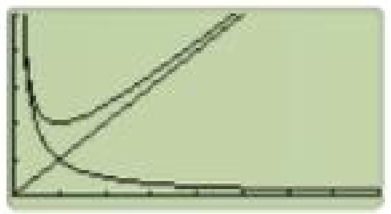


Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'aux valeurs positives de x.

2. Conjecturer

a) Les fonctions f et g sont-elles monotones sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$?

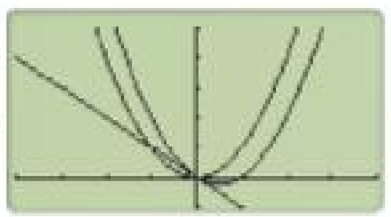
b) Faites afficher maintenant la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x + \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $h(x) = f(x) + g(x)$.



La fonction h est appelée **somme de f et de g**.
Elle peut être notée $f + g$.
La fonction h semble-t-elle monotone sur $]0\,;+\infty[$?

c) Observez les variations de ces mêmes fonctions sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$, et rassemblez vos résultats dans un tableau.

d) Après avoir effacé les courbes précédentes, faites afficher les représentations graphiques des fonctions f, g et $f+g$, définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2$, $g(x) = -x$ et $(f+g)(x) = x^2 - x$.



- Étudiez les variations de ces trois fonctions sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et rassemblez vos résultats dans un tableau.
- Faites de même sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

e) Quelles conjectures pensez-vous pouvoir émettre après ces études ?

3. Démontrer

a) f et g sont deux fonctions définies et croissantes sur un intervalle I.
a et b sont deux nombres de I tels que $a < b$.
Traduisez la croissance de f et de g. Que pouvez-vous en déduire pour la fonction $f + g$? Énoncez la propriété établie.

b) Que se passe-t-il si l'on remplace l'hypothèse « f et g croissantes » par « f et g décroissantes » ?
- Énoncez la propriété établie.

c) Expliquez pourquoi vous pouvez affirmer que l'énoncé suivant est faux :
« La somme de deux fonctions monotones sur un intervalle I est une fonction monotone sur I ».

4. Application

a) Étudiez les variations :
- de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x}$;
- de la fonction g définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-1} - x$.

b) Vérifiez vos résultats en représentant à la calculatrice les fonctions f et g.

Utiliser sa calculatrice

→ Pour analyser les variations de fonctions

TP 26 Étude des variations du produit de deux fonctions monotones

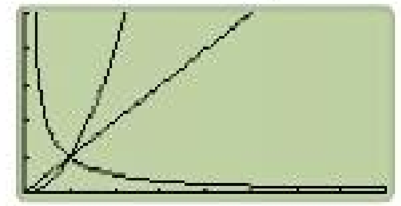
Si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I, la fonction $x \mapsto f(x) \times g(x)$ définie sur I est appelée **produit de f et de g**.
On la note $f \times g$.

1. Tracer les courbes

Faites afficher les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :

- $f(x) = x^2$; • $g(x) = \frac{1}{x}$; • $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x$.

Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'aux valeurs positives de x.



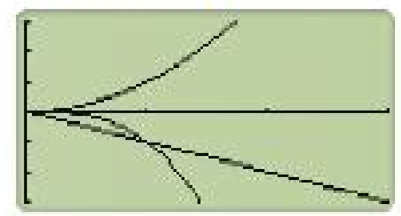
2. Conjecturer

a) Les fonctions f, g et $f \times g$ sont-elles monotones sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$?

b) Étudiez les variations de ces mêmes fonctions sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$, et rassemblez vos résultats dans un tableau.

c) Après avoir effacé les courbes précédentes, faites afficher les représentations graphiques des fonctions f, g et $f \times g$, définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

- $f(x) = x^2$; • $g(x)\,; = -x$ • $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = -x^3$.



- Observez les variations de ces trois fonctions sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
- Rassemblez vos résultats dans un tableau.
- Faites de même sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

d) Les études précédentes vous permettent-elles de conjecturer :
- le sens de variation du produit d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?
- le sens de variation du produit de deux fonctions décroissantes ?

3. Démontrer

f et g sont deux fonctions définies et croissantes sur un intervalle I.
a et b sont deux nombres de I tels que $a < b$.

a) Traduisez la croissance de f et de g sur I.

b) Prouvez que la propriété suivante est fausse :
« m, n, p et q sont des nombres. Si $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$, alors $m \times p \leqslant n \times q$. »

c) Pouvez-vous énoncer une règle générale donnant le sens de variation du produit de deux fonctions croissantes sur un intervalle ?

d) Avez-vous maintenant une idée de réponse au problème ouvert de la page 49 ?

EXERCICES
ACTIVITÉS DE RECHERCHE

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

Pour les exercices 27 à 30
Donnez le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

27 $f : x \mapsto x^2 + 1$; $I = [0 ; +\infty[$.

28 $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$; $I = [-1 ; +\infty[$.

29 $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$.

30 $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$; $I =]-\infty ; 1[$.

Pour les exercices 31 à 33
Comparez A et B.

31 $A = \sqrt{2x+3}$ et $B = \sqrt{2y+3}$, avec $0 < x < y$.

32 $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ et $B = \dfrac{1}{\sqrt{y}+1}$, avec $0 < x < y$.

33 $A = \dfrac{1}{2x-5}$ et $B = \dfrac{1}{2y-5}$, avec $3 < x < y$.

34 Encadrer $|x|$ pour $x \in [-2 ; 0]$.

35 Encadrer $|x|$ pour $x \in [-2 ; 3]$.

36 f est la fonction définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

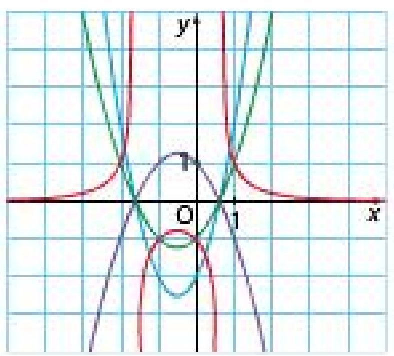
$$f(x) = \sqrt{2x-1}.$$

Donnez un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [5 ; 41]$.

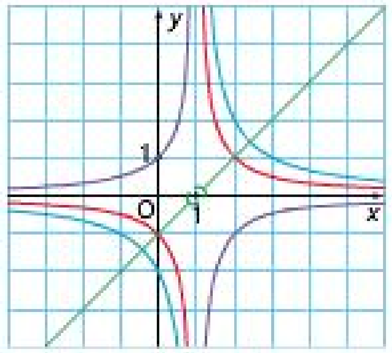
D'UNE COURBE À L'AUTRE : RECONNAÎTRE

Dans les exercices 37 à 40
Associez à chaque fonction sa représentation.

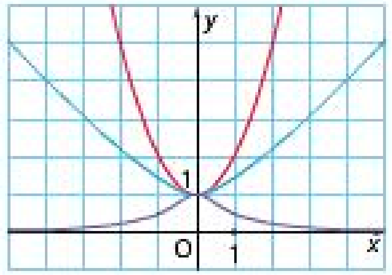
37 $f : x \mapsto x^2 + x - 1$, $-f$, $2f$ et $\dfrac{1}{f}$.



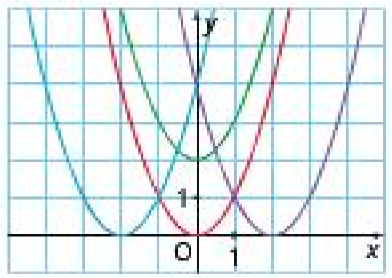
38 $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, $-f$, $2f$ et $\dfrac{1}{f}$.



39 $f : x \mapsto x^2 + 1$, $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{f}$.



40 **Cherchez l'intrus**
f, g et h sont trois fonctions.
- $f : x \mapsto x^2$
- $g : x \mapsto x^2 + 2$
- $h : x \mapsto (x+2)^2$

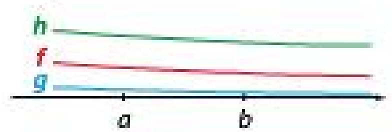


Quelle courbe ne correspond à aucune de ces trois fonctions ?

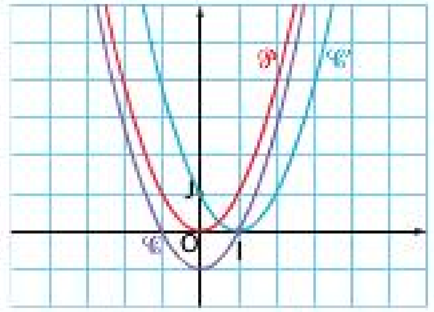
41 La figure ci-dessous est un extrait de la représentation graphique des fonctions suivantes :

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ - $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ - $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

a et b sont deux nombres tels que $1 < a < b$.
Associez à chaque courbe sa fonction.



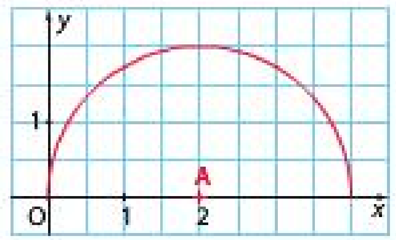
42 La parabole $\mathscr{P}$ est la représentation de la fonction carré dans un repère orthonormé (O ; I, J).



Précisez, parmi les fonctions suivantes, celle qui est représentée par la courbe $\mathscr{C}$, image de $\mathscr{P}$ par la translation de vecteur $-\overrightarrow{OJ}$, et celle qui est représentée par la courbe $\mathscr{C}'$, image de $\mathscr{P}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$:
- $f(x) = (x+1)^2$;
- $g(x) = x^2 + 1$;
- $h(x) = (x-1)^2$;
- $k(x) = x^2 - 1$.

D'UNE COURBE À L'AUTRE : CONSTRUIRE

43 On appelle f la fonction représentée ci-dessous, dans un repère orthonormé, par le demi-cercle de centre A(2 ; 0).



Construisez les courbes représentatives des fonctions :
- $g(x) = -f(x)$
- $h(x) = 2f(x)$
- $k(x) = f(x) + 2$.

44 Tracez, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{P}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déduisez-en les représentations graphiques des fonctions suivantes :
- $g : x \mapsto x^2 - 2$;
- $h : x \mapsto -2x^2$;
- $k : x \mapsto |x^2 - 2|$.

45 Tracez, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{H}$ de la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Déduisez-en les représentations graphiques des fonctions suivantes :
- $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2$;
- $h : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$;
- $k : x \mapsto \left|\dfrac{1}{x} + 2\right|$.

46 Tracez, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Déduisez-en les représentations graphiques des fonctions suivantes :
- $g : x \mapsto \sqrt{x} - 1$;
- $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

47 Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 4]$.

x	-4		0		2		4
$f(x)$	3	↘	0	↗	2	↘	1

1. Dressez le tableau de variation des fonctions définies sur l'intervalle I par :
- $g(x) = f(x) + 2$;
- $h(x) = -f(x)$;
- $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

2. a) Tracez une courbe susceptible de représenter f sur l'intervalle I.
b) Dans le même repère, tracez des courbes susceptibles de représenter g, h et k.

48 Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-5 ; 3]$.

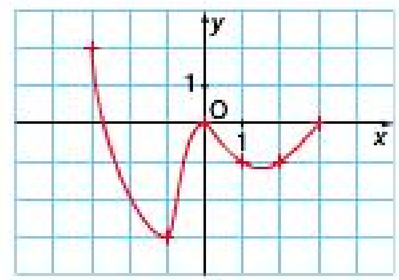
x	-5		-3		-1		0		1		2		3
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	3	↘	1

1. Dressez le tableau de variation des fonctions définies sur I par :
- $g(x) = f(x) - 1$;
- $h(x) = -2\,f(x)$.

2. a) Tracez une courbe susceptible de représenter f sur l'intervalle I.
b) Dans le même repère, tracez des courbes susceptibles de représenter g et h.

3. a) Précisez sur quel ensemble E le calcul de $\sqrt{f(x)}$ est possible.
b) Dressez alors le tableau de variation de la fonction définie sur E par $k(x) = \sqrt{f(x)}$.
c) Dans le même repère, tracez une courbe susceptible de représenter la fonction k.

49 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ représentée ci-dessous.



1. Dressez le tableau de variation de f.
2. On note g la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $g(x) = |f(x)|$.
a) Représentez la fonction g.
b) Déterminez graphiquement le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 1$.
3. m est un nombre quelconque. Discutez, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$.

DÉCOMPOSITION ET SENS DE VARIATION

Pour les exercices 50 à 57

Décomposez la fonction f à l'aide de fonctions usuelles et déduisez-en le sens de variation de f sur chacun des intervalles donnés.

Utilisez votre calculatrice pour représenter f et vérifier vos résultats.

50 $f(x) = x^2 + 3$; $I =]-\infty ; 0]$; $J = [0 ; +\infty[$.

51 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$; $I =]-\infty ; 0]$; $J = [0 ; +\infty[$.

52 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$; $I =]-\infty ; 0]$; $J = [0 ; +\infty[$.

53 $f(x) = \sqrt{x - 4}$; $I = [4 ; +\infty[$.

54 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 4}}$; $I =]4 ; +\infty[$.

55 $f(x) = 2|x| - 1$; $I = \mathbb{R}$.

56 $f(x) = \sqrt{5 - x}$; $I =]-\infty ; 5]$.

57 $f(x) = \dfrac{-2}{x^2}$; $I =]-\infty ; 0[$; $J =]0 ; +\infty[$.

58 $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Trouvez les nombres a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x}$.

2. Étudiez le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Aide

Voir l'exercice résolu B p. 55 et l'exercice 22 p. 58.

59 Avec la calculatrice

1. Utilisez votre calculatrice graphique pour représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2}$.

2. Quelle courbe pensez-vous reconnaître ? Quelle égalité pouvez-vous conjecturer ?

3. Démontrez que cette égalité est vraie pour tout nombre x.

60 Des chemins différents ? ALGORITHMIQUE

Comparez les programmes de calcul suivants.

- $P_1 : x \xrightarrow[\text{par 2}]{\text{multiplier}} \ldots \xrightarrow[\text{soustraire 1}]{} \ldots \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} \ldots \xrightarrow[\text{racine carrée}]{\text{prendre la}} \ldots$
- $P_2 : x \xrightarrow[\text{par } -2]{\text{multiplier}} \ldots \xrightarrow[\text{ajouter 1}]{} \ldots \xrightarrow[\text{absolue}]{\text{prendre la valeur}} \ldots$
- $P_3 : x \xrightarrow[\text{soustraire } \frac{1}{2}]{} \ldots \xrightarrow[\text{absolue}]{\text{prendre la valeur}} \ldots \xrightarrow[\text{par 2}]{\text{multiplier}} \ldots$
- $P_4 : x \xrightarrow[\text{soustraire } \frac{1}{2}]{} \ldots \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} \ldots \xrightarrow[\text{racine carrée}]{\text{prendre la}} \ldots \xrightarrow[\text{par 2}]{\text{multiplier}} \ldots$

61 Avec la calculatrice

1. Étudiez le signe du trinôme.
$x^2 - 2x - 3$ suivant les valeurs de x.

2. Déduisez-en l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ est définie.

3. Étudiez les variations de f sur chacun des intervalles qui composent l'ensemble D.

4. Établissez le tableau de variation de f et vérifiez à l'aide de votre calculatrice graphique.

62 **1.** Vérifiez que la fonction f :
$x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ est définie pour tout nombre x.

2. Étudiez les variations de la fonction f.

3. Déduisez de ce qui précède un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0 ; 5]$.

63 Démonstration par l'absurde LOGIQUE

Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ revient à démontrer que : **si a et b sont deux nombres tels que $0 \leqslant a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.**

Raisonner **par l'absurde** consiste à ajouter une nouvelle hypothèse, la négation de la conclusion, et à en déduire qu'on arrive alors à une absurdité.

a) Exprimez la négation de la conclusion ($\sqrt{a} < \sqrt{b}$).

b) Utilisez alors une propriété de la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$ pour montrer qu'on arrive, avec cette nouvelle hypothèse, à une absurdité et concluez.

64 Une question de signe ALGORITHMIQUE

L'algorithme suivant, écrit avec AlgoBox, traduit un programme de calcul définissant une fonction f.

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  SI ((x<1/2)) ALORS
    DEBUT_SI
    y PREND_LA_VALEUR -2*x+1
    FIN_SI
  SI ((x>=1/2)) ALORS
    DEBUT_SI
    y PREND_LA_VALEUR 2*x-1
    AFFICHER "f(x)="
    AFFICHER y
    FIN_SI
FIN_ALGORITHME
```

Reconnaissez-vous la fonction f ainsi définie ? Utilisez une fonction déjà programmée dans le logiciel pour simplifier l'écriture de cet algorithme.

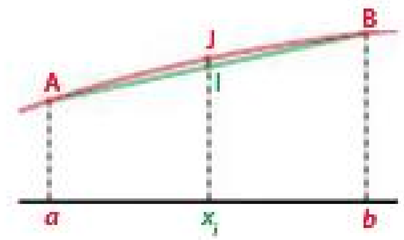
65 Par morceaux ALGORITHMIQUE

Écrivez un programme définissant la fonction qui au nombre x associe $\sqrt{x^2 + 1}$ si x est négatif et $|1 - 2x|$ si x est positif.

Note

En général, la fonction racine carrée se note *sqrt* (de *square root*, en anglais) et la fonction valeur absolue, *abs*.

66 A et B sont deux points distincts appartenant à la courbe représentant la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



1. Montrer que le milieu I du segment [AB] est situé « en dessous » du point J de la courbe ayant la même abscisse, c'est-à-dire que $y_I < y_J$

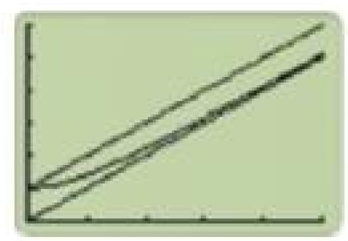
Aide Si $a \neq b$, alors $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$.

2. Exprimez (en terme de moyennes) la propriété ainsi démontrée.

67 Avec la calculatrice

On affiche sur l'écran de la calculatrice la partie obtenue pour $0 \leqslant x \leqslant 5$ de chacune des courbes des fonctions :

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto x + 1, \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}.$$



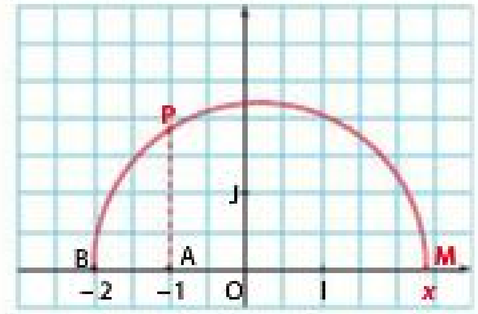
1. Repérez chacune des fonctions.

2. Une des courbes semble « bloquée » entre les deux autres. Par quel encadrement pouvez-vous traduire ce phénomène ?

3. Cet encadrement est-il vérifié pour tout nombre x positif ?

68 Dans un repère orthonormé (O ; I, J), les points A, B et M sont les points de l'axe (O ; I) d'abscisses respectives -1, -2 et x ($x \geqslant 0$).

Le demi-cercle de diamètre [BM] (dans le demi-plan d'équation $y > 0$) coupe la droite d'équation $x = -1$ au point P.



L'objectif est de déterminer un encadrement de la longueur du segment [AP] lorsque $x \in [0 ; 3]$.

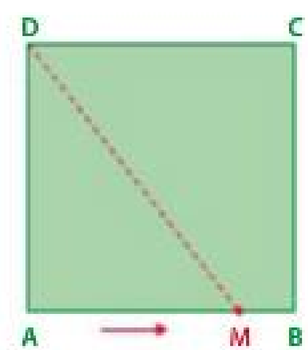
1. Utilisez les triangles PAB, PAM et PBM pour démontrer que :

$$AP = \sqrt{x + 1}.$$

2. Utilisez les variations de la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = \sqrt{x + 1}$ pour résoudre le problème posé.

69 Une personne est chargée de la surveillance d'un domaine ayant la forme d'un carré d'un kilomètre de côté.

Le croquis ci-dessous représente le domaine ABCD, et le point M indique la position du gardien lorsqu'il en fait le tour.



Le gardien part du point A et tourne dans le sens indiqué par la flèche.

Pour chaque position de M, on note x la distance parcourue depuis le départ de A.

À chaque instant, on note d la distance (en km) qui sépare M, à vol d'oiseau, du sommet D.

EXERCICES

1. Conjecturez les variations de d en fonction de x et notez-les dans le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	A
x	0	1	2	3	4
d	1 ↗	…	…	0 ↗	1

2. Pour chaque côté du carré, donnez l'expression de d en fonction de x.
Exemple : pour $3 \leqslant x \leqslant 4$, $d(x) = 3 - x$.

3. Vérifiez l'exactitude de vos conjectures en étudiant les variations de d.

AVEC LES TICE

70 **Conjecturer puis démontrer**

Aide Voir l'exercice 22 p. 58.

f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}.$$

1. Expérimenter avec GeoGebra ou la calculatrice

a) Construisez la courbe de la fonction f.

b) Conjecturez la valeur d'un nombre A tel que pour tout nombre x de l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, $f(x) < A$.

c) Conjecturez les variations de la fonction f.

2. Démontrer

a) Vérifiez que pour tout nombre de l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+2}$.

b) Déduisez-en que pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, $f(x) < 2$.

c) Exploitez les résultats des questions précédentes pour déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

ROC Restitution organisée de connaissances

71 **Prérequis**

Une fonction u est définie sur un intervalle I et pour tout nombre x de I, $u(x) > 0$.

Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraire.

1. Démonstration

k est un nombre strictement positif, f est une fonction strictement croissante sur un intervalle I, et pour tout nombre x de I, $f(x) \geqslant 0$.

Prouvez que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)+k}$ est strictement décroissante sur l'intervalle I.

2. Application

Une fonction f définie sur l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$ est strictement croissante sur I et $f(1) = 0$.

Démontrez que, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle I, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)+1}$ est définie sur I et que pour tout nombre x de I, $g(x) \leqslant 1$.

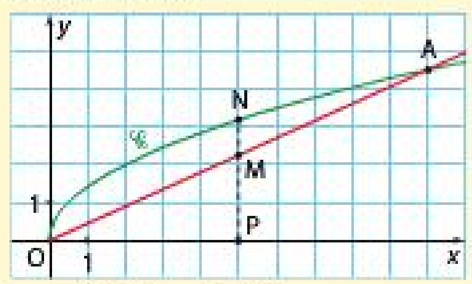
Prendre toutes les initiatives

72 Précisez le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}.$$

73 Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction racine carrée.



A est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le milieu M du segment [OA] coupe $\mathscr{C}$ en un point N et l'axe des abscisses en un point P.

Prouvez que le rapport $\dfrac{PM}{PN}$ est constant quelle que soit la position du point A sur la courbe $\mathscr{C}$.

74 **Produit de fonctions monotones et positives**

1. Démontrer

f et g sont deux fonctions positives sur un intervalle I, ce qui signifie que pour tout nombre x appartenant à I, $f(x)$ et $g(x)$ sont positifs.

On suppose de plus que les fonctions f et g sont croissantes sur l'intervalle I.

On note p la fonction « produit de f et g » définie sur I par :

$$p(x) = f(x) \times g(x).$$

Prouvez que la fonction p est croissante sur l'intervalle I.

2. Conjecturer

Que pouvez-vous conjecturer sur le produit de deux fonctions positives et décroissantes sur un intervalle I ? Démontrez-le.

→ *Exercice 26, page 61.*

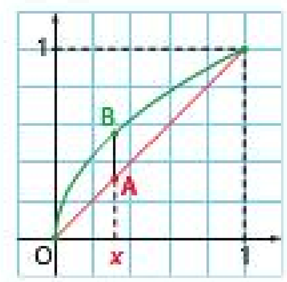
3. Applications

Trouvez le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné.

a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$; $I = [1\,;+\infty[$.

b) $g(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$; $I =]0\,;+\infty[$.

75 Sur le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions définies sur l'intervalle $I = [0\,;1]$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$.



A et B sont des points des deux courbes ayant la même abscisse x.

L'objectif est de déterminer la longueur maximale du segment [AB] lorsque x parcourt l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Après avoir associé à chaque courbe sa fonction, exprimez la longueur AB en fonction de x.

2. On note g la fonction définie sur I par :

$$g : x \mapsto AB.$$

Par des considérations graphiques, établissez le tableau de variation de la fonction g.

3. Vérifiez que pour tout x de l'intervalle I :

$$g(x) \leqslant \frac{1}{4} \text{ et que } g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Aide
Développez $\left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{x}\right)^2$.

4. Concluez.

76 **1.** Vérifiez que la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

2. On s'intéresse, dans un repère orthonormé, à la représentation $\mathscr{C}$ de f pour les valeurs de x strictement positives.

Justifiez que $\mathscr{C}$ est toujours située en dessous de la droite d d'équation $y = x$.

3. On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et B celui de d ayant la même abscisse x.

Justifiez que la longueur AB est égale à $\dfrac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Que pouvez-vous en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

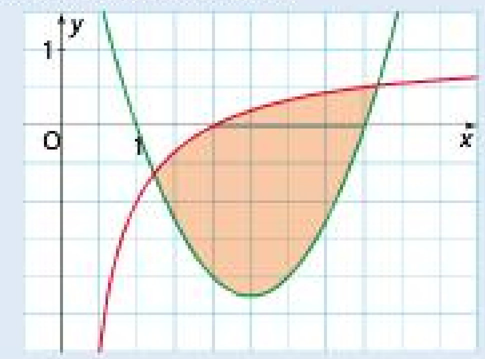
4. Tracez la droite d puis la courbe $\mathscr{C}$, pour $x > 0$.

77 **À l'intérieur ?** ALGORITHMIQUE

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-2}{x}.$$

Elles déterminent une région du plan colorée en orange sur la figure ci-dessous.



1. Attribuez à chaque fonction sa courbe.

2. Écrivez un algorithme qui permet de préciser si un point défini par ses coordonnées appartient à la partie colorée (frontière comprise).

3. Réalisez le programme et testez-le en choisissant des points pour lesquels une simple lecture du graphique ne suffit pas (exemple : A(1,2 ; –0,5)).

78 **Distance d'un point à une droite**

Dans un repère $\mathscr{C}$ orthonormé, on considère les points $A(0\,;1)$ et $M(x\,;y)$. M est un point de la droite d d'équation $y = x - 4$.

L'objectif est d'étudier les variations de la distance AM lorsque M parcourt la droite d, et en particulier de déterminer la distance AM minimale.

1. a) Exprimez la distance AM en fonction des coordonnées x et y de M.

b) Justifiez ensuite que $AM = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.

2. À chaque nombre réel x correspond un unique point M de la droite d et réciproquement, chaque point de d est associé un unique réel x.
L'objectif est donc maintenant d'étudier les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 10x + 25}.$$

a) Justifiez que $f(x)$ existe quel que soit le nombre x.

b) Établissez le tableau de variation de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u : x \mapsto 2x^2 - 10x + 25.$$

c) Énoncez le théorème qui vous permet de déduire des variations de u celles de f.

d) Déduisez-en la valeur minimale de la distance AM.

Remarque
Cette valeur est, par définition, la distance du point A à la droite d (voir exercice 95, page 236 du chapitre 9).

79 Représentation de $|f|$

1. Dans un repère orthonormé, représentez la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 4.$$

2. On note g la fonction définie sur I par $g(x) = |f(x)|$.

a) Justifiez que $g(x) = \begin{cases} 2x - 4 \text{ si } x \geqslant 2 \\ -2x + 4 \text{ si } x \leqslant 2. \end{cases}$

b) Indiquez un moyen de placer le point de coordonnées (x, g(x)), lorsque :

• $x \in]-\infty ; 2]$; • $x \in [2 ; +\infty[$.

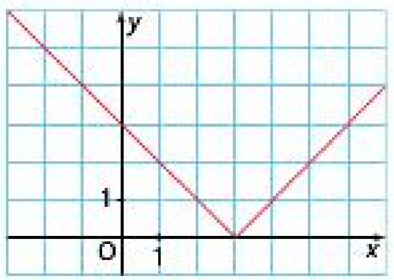
c) Construisez la représentation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |2x - 4|$.

80 **1.** Dans un repère orthonormé, représentez la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$.

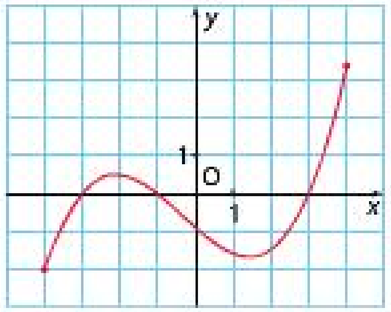
2. En vous inspirant de l'exercice précédent, construisez la représentation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = |x^2 - 3|.$$

81 Donnez une expression « simple » de la fonction h représentée ci-dessous :



82 La courbe ci-après représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4 ; 4]$.



Reproduisez le dessin. En vous inspirant de l'exercice **79**, construisez la représentation de la fonction g définie sur I par $g(x) = |f(x)|$.

83 **1.** Étudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.

2. Étudiez le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Représentez la fonction f et déduisez-en la représentation de la fonction g définie pour tout nombre x par $g(x) = |2x^2 + 2x - 4|$.

84 Démontrer une équivalence — LOGIQUE

Deux propositions (P) et (Q) sont équivalentes lorsque (P) implique (Q) et (Q) implique (P).
a et b sont deux nombres réels.

1. a) Pourquoi l'égalité $\sqrt{a} = b$ implique-t-elle $b \geqslant 0$ et $a = b^2$?

b) Pourquoi, réciproquement, les conditions $b \geqslant 0$ et $a = b^2$ impliquent-elles $\sqrt{a} = b$?

c) Énoncez l'équivalence ainsi démontrée.

2. Démontrez l'équivalence :

$$(\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}) \Leftrightarrow (0 \leqslant a \text{ et } a \leqslant b).$$

3. Donnez une proposition équivalente à :

$$\sqrt{a} \leqslant b.$$

Pour les exercices 85 à 91
Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation ou l'inéquation proposée (en utilisant les résultats de l'exercice 84) et vérifiez à l'aide de la calculatrice graphique.

85 $\sqrt{x - 1} = 3 - x$.

86 $\sqrt{x + 7} = x + 1$.

87 $t + \sqrt{1 - 2t} = 2$.

88 $\sqrt{1 - u} = u - 1$.

89 $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{2x - 1}$.

90 $\sqrt{2x + 1} \leqslant 1 + \dfrac{x}{3}$.

91 $4 + \sqrt{6 - x} \leqslant x$.

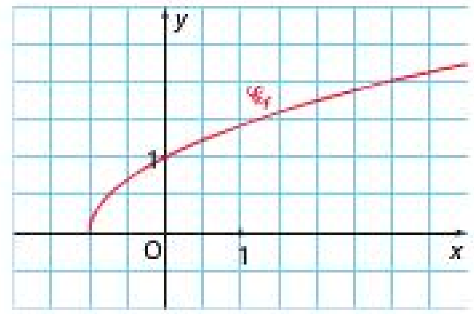
92 **1.** Représentez les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{2x - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

2. Graphiquement quelles sont les solutions de l'équation $\sqrt{2x - 1} = x$?

3. L'écran de la calculatrice ou du grapheur n'étant qu'une fenêtre, vérifiez par le calcul l'exactitude de votre conjecture.

93 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$. On a construit ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.



1. a) Sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$, comparez les nombres $\sqrt{1 + x}$ et $1 + \dfrac{x}{2}$.

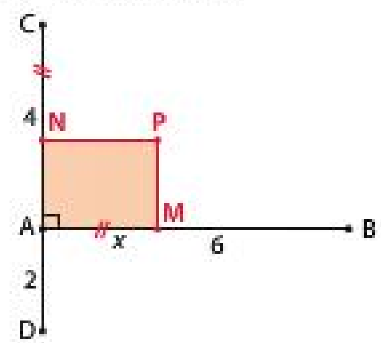
b) Pour quelle valeur de x obtient-on :

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} \,?$$

2. a) Représentez sur le même graphique $\mathscr{C}_f$ et la droite d d'équation $y = 1 + \dfrac{x}{2}$.

b) Déduisez de la question **1.** la position de la droite d par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$.

94 Les segments [AB] et [CD], de longueur 6, sont perpendiculaires en A, avec AD = 2.
M et N sont variables respectivement sur [AB] et [CD] tels que $AM = CN = x$, $0 \leqslant x \leqslant 6$.



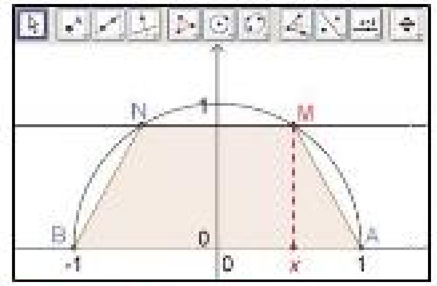
a) Exprimez en fonction de x l'aire $f(x)$ du rectangle AMPN (vous distinguerez deux cas suivant la place de N par rapport à A).

b) Représentez graphiquement la fonction f.

c) Utilisez le graphique pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du rectangle est supérieure à 3.

95 Résoudre une équation irrationnelle — TICE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Par un point M (d'abscisse positive) du demi-cercle de centre O, de rayon 1 et de diamètre [AB], on trace la parallèle (MN) à l'axe des abscisses. On note x l'abscisse du point M($0 \leqslant x \leqslant 1$) et on s'intéresse aux variations du périmètre p du trapèze isocèle AMNB en fonction de l'abscisse x du point M.



1. Construire avec GeoGebra
Créez le demi-cercle de diamètre [AB], et le point M. Créez la parallèle à l'axe des abscisses passant par M puis le point N. Créez le périmètre p, somme des mesures des côtés affichées dans la fenêtre Algèbre.

2. Conjecturer
Déplacez le point M sur le demi-cercle (l'abscisse x de M restant positive). Pour quelle(s) valeur(s) de x le périmètre semble-t-il maximum. Quelle est alors sa valeur ?

3. Démontrer
Dans cette partie, on envisage de résoudre algébriquement le problème suivant :
Pour quelles valeurs de x le périmètre est-il égal à 5 ?

a) Démontrez que le point M a pour ordonnée $\sqrt{1 - x^2}$.

• Déduisez-en que :
$AM = \sqrt{2(1 - x)}$ et que $P(x) = 2 + 2x + 2\sqrt{2(1 - x)}$.

• Vérifiez que répondre à la question posée revient à résoudre dans [0 ; 1] l'équation : $\sqrt{2(1 - x)} = \dfrac{3}{2} - x$. (E)

b) Cette équation est dite **irrationnelle** parce qu'il y figure un radical que l'on ne peut pas simplifier.

• L'équation (E), de la forme $\sqrt{a} = b$, n'a de sens que si a et b sont positifs. Vérifiez que pour $x \in [0 ; 1]$, les conditions sont respectées.

→ *Exercice 84, Logique, page 68.*

• Expliquez pourquoi, ces conditions étant remplies, résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation (E') :

$$2(1 - x) = \left(\frac{3}{2} - x\right)^2.$$

c) Résolvez l'équation (E') puis répondez à la question posée au début de cette partie 3.

Prendre toutes les initiatives

96 (O ; I, J) est un repère orthonormé. Déterminez les points $M(x ; y)$ du plan tels que $|x| + |y| = 1$.

97 (O ; I, J) est un repère orthonormé. A a pour coordonnées (0 ; 2) et B(1 ; 0).
Déterminez tous les points C de l'axe des abscisses tels que le triangle ABC soit isocèle.

98 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le cercle de centre A(2 ; 0) et de rayon $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ coupe-t-il la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$?

Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.**

A Variations de f et $\sqrt{f}$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

1. Dressez le tableau de variation de f.

2. a) Pourquoi la fonction $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est-elle définie pour tout nombre de $\mathbb{R}$? 1

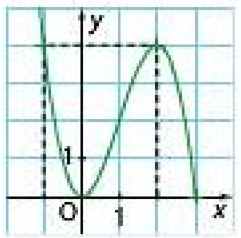
b) Dressez le tableau de variation de g. 2

c) Si x appartient à l'intervalle $[0\,;\,2]$, à quel intervalle appartient $g(x)$?

B Des fonctions associées 3

La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty\,;\,3]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2.$$



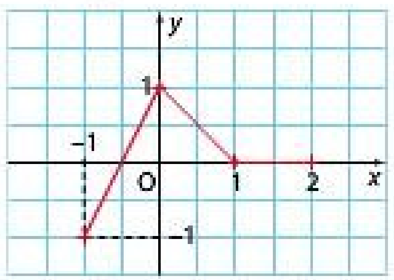
1. Dressez le tableau de variation de f.

2. Déduisez-en le tableau de variation de chacune des fonctions g, h et k définies par :

- $g(x) = f(x) + 4$;
- $h(x) = -f(x)$;
- $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

C Autour d'une fonction affine par morceaux 4

La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-1\,;\,2]$.



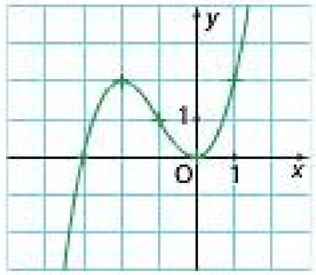
Dans des repères orthonormés différents, tracez les représentations graphiques des fonctions g, h et k définies sur l'intervalle I par :

- $g(x) = -f(x)$;
- $h(x) = |f(x)|$;
- $k(x) = f(x) + 1$.

D Des courbes symétriques 5

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$



1. a) Construisez la courbe $\mathscr{C}_1$, symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées, et la courbe $\mathscr{C}_2$, symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

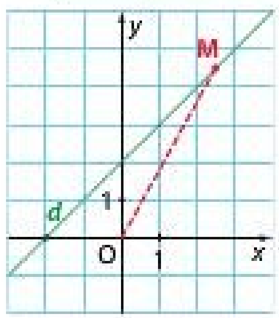
b) $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative d'une fonction f_1 et $\mathscr{C}_2$ celle d'une fonction f_2.
Exprimez $f_1(x)$ et $f_2(x)$, et dressez le tableau de variation des fonctions f_1 et f_2.

2. a) Construisez la courbe $\mathscr{C}_3$ représentative de la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$.

b) Donnez le tableau de variation de g.

E Un problème de distance 6

Dans un repère orthonormé d'origine O, un point M décrit la droite d d'équation $y = x + 2$.



1. Démontrez que $OM = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}$.

2. a) Pourquoi la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ est-elle définie pour tout nombre de $\mathbb{R}$? 7

b) Dressez le tableau de variation de f.

3. a) Déduisez-en que $OM \geqslant \sqrt{2}$. 8

b) Retrouvez géométriquement ce résultat. 9