Corrigés des Questions-tests

Chapitre 1

① **a)** $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.
b) $x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.
c) $36x^2 - 25 = (6x+5)(6x-5)$.
d) $x^2 - \frac{3}{4} = \left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
e) $(x+1)^2 - 7 = (x+1+\sqrt{7})(x+1-\sqrt{7})$.

② **a)** $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.
b) $(2x-3)(4x+5) = 8x^2 - 2x - 15$.
c) $\left(x-\frac{4}{7}\right)^2 = x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{16}{49}$.

③ **a)** $(x+6)^2 - 10 = x^2 + 12x + 36 - 10$
$= x^2 + 12x + 26$.
b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - 7 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{28}{4}$
$= x^2 + 3x - \frac{19}{4}$.

④ **a)** Si $x > \sqrt{3} > 0$, alors $x^2 > 3$ soit $x^2 + 5 > 8$.
b) Si $x < -\sqrt{5} < 0$, alors $x^2 > 5$ soit $x^2 - 1 > 4$.

⑤ **a)** $S = \left\{\frac{4}{3} ; \frac{5}{2}\right\}$. **b)** $S = \{-2 ; 1\}$.
c) $S = \{-2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}\}$ (car $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$).
d) $S = \varnothing$ (car $-9 < 0$).
e) $2x^2 + 3x = x(2x+3)$, donc $S = \left\{-\frac{3}{2} ; 0\right\}$.
f) $S = \{-3 ; 3\}$.
g) $(x+3)^2 - 4 = (x+3)^2 - 2^2 = (x+1)(x+5)$, donc $S = \{-5 ; -1\}$.

⑥ **a)** $S =]-\infty ; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5} ; +\infty[$.
b) $S =]-\sqrt{3} ; \sqrt{3}[$.
c) $S = [-2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}]$.
d) $S = \varnothing$.
e) $S =]-3 ; 3[$ (car $x^2 - 9 < 0$ équivaut à $x^2 < 9$).
f) $S = \mathbb{R}$.

⑦ **a) Faux.**
Contre-exemple : $(-2)^2 \geqslant 1$ et $-2 < 1$.
b) Faux.
Contre-exemple : $(-1)^2 \leqslant 4$ et $-1 \geqslant -2$.

Chapitre 2

① **a)** $S = [0 ; 1]$.
b) $S =]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.
c) $S =]0 ; 1[$.

② **a)** f est strictement croissante sur I (f est affine et $a > 0$).
b) g est constante.
c) h est strictement décroissante sur I (h est affine et $a < 0$).
d) k est strictement décroissante sur $[-1 ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; 5]$.

③ **a)** La fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, et $3 < x$ donc $\frac{2}{3} > \frac{2}{x}$.
On peut aussi utiliser le fait que, pour des nombres positifs, le passage à l'inverse inverse l'ordre.
b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, et $x > \frac{4}{3}$ donc $\frac{1}{x} < \frac{3}{4}$.
c) Pour la même raison, comme $x + 2 < x + 3$, alors $\frac{1}{x+2} > \frac{1}{x+3}$.

④ **a) Vrai.** f étant strictement croissante, si $4 < x < 5$ alors $f(4) < f(x) < f(5)$ et donc :

$$f(x) \in]f(4) ; 0[.$$

b) Vrai. $2 < 5$ donc $f(2) < f(5)$, c'est-à-dire $f(2) < 0$. De même, $f(3) < 0$. Le produit de deux nombres strictement négatifs est strictement positif :

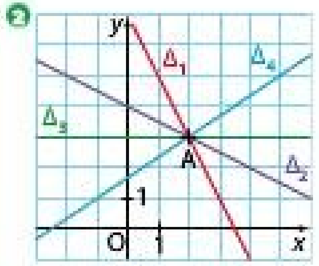
$$f(2) \times f(3) > 0.$$

⑤ **a)** $S = [-5 ; 5]$.
b) $S =]-3 ; -2[\cup]2 ; 3[$.

Chapitre 3

① $d_1 : y = -\frac{1}{2}x + 3$; $d_2 : y = \frac{3}{2}x + 1$ et $d_3 : y = -1$.

②



③ $-2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 4 : A \in d$.
$-2 \times 0{,}6 + 3 = 1{,}8 : B \in d$.
$-2 \times \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} \neq 2{,}34 : C \notin d$.

④ d_1 et d_3 passent par A.

⑤ **a)** $-2 = -4 \times 3 + p$ donc $p = 10$.
b) $-2 = 3m + 6$ donc $m = -\frac{8}{3}$.

⑥ $\begin{cases} -4 = 4a + 7 \\ b = 4 \times 1 + 7 \end{cases}$ soit $a = -\frac{11}{4}$ et $b = 11$.

⑦ $y = -6x + p$ et $-9 = -6 \times 12 + p$ donc $p = 63$ et $y = -6x + 63$.

⑧ **a)** $y = x - 1$.
b) $y = -\frac{7}{8}x - 2$.
c) $y = 5$.

Chapitre 4

① **a)** $f(-5) > f(-4)$.
b) $f(6) < f(7)$.
c) $f(u) > f(v)$.
d) $f(a) < f(b)$.

② **a)** $f'(1) = 1$ et $f(1) = 2$,
donc $y = 1 \times (x-1) + 2$. L'équation réduite de la tangente est $y = x + 1$.

③ **a)** Le minimum de f sur I est -2, il est atteint pour $x = 3$.
Le maximum de f sur I est 6, il est atteint pour $x = 10$.
b) Si $-1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $-2 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

④ **a)** Le minimum de g sur $[0 ; 6]$ est -20, il est atteint pour $x = 4$.
Le maximum est 40, atteint pour $x = 6$.
b) Le minimum de g sur $[0 ; 2]$ est -6, il est atteint pour $x = 1$.
Le maximum est 10, atteint pour $x = 0$.

Chapitre 5

① $b^3 = \frac{b^5}{b^2} = 4{,}913$
$b^7 = b^5 \times b^2 = 41{,}0338673$

② $\frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$

③ $\frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

④ $b = a \times q^3$ et $a \times b = 5^2 \times q^{13}$

⑤ $(1-a)(1+a+a^2) = 1 - a^3$
$(1-a)(1+a+a^2+a^3) = 1 - a^4$
Pour $a \neq 1$, $\frac{1-a^3}{1-a} = 1 + a + a^2$
et $\frac{1-a^4}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3$.

Chapitre 6

① $A - B = n^2 - n + 1 - 3n + 3 = n^2 - 4n + 4$
$= (n-2)^2$.
$A - B \geqslant 0$ donc $A \geqslant B$.

② Pour tout entier $n \geqslant 2$,
$\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} > 0$
donc $\frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n}$.

③ $f(n+1) - f(n) = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - n^2 + 3n - 1 = 2n - 2$
et pour tout entier $n \geqslant 2$, $f(n+1) - f(n) > 0$, soit $f(n+1) > f(n)$.
Ou : f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$, donc pour tout entier $n \geqslant 2$, $f(n+1) > f(n)$.

④ **a)** $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) > 0$. Ainsi pour $x > 1$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur I.
b) $n < n + 1$, alors $f(n) < f(n+1)$.

⑤ **a)** $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$: f est strictement décroissante sur I.
b) $n < n + 1$, alors $f(n) > f(n+1)$.

⑥ **a)** $u : x \mapsto x + 3$ est affine strictement croissante, u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens : f est strictement croissante sur $[-3\,; +\infty[$.
b) $n < n + 1$, alors $f(n) < f(n + 1)$.

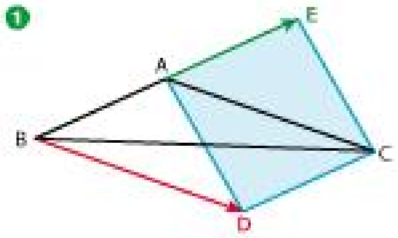
⑦ **a)** Le but est de déterminer le premier terme de la suite géométrique (u_n) de raison 0,2 avec $u_0 = 5$, qui soit inférieur ou égal à $\frac{1}{1\,000}$.
b) $u_6 = 0{,}000\,32$.

⑧

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  u PREND_LA_VALEUR 1
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u/2
    FIN_POUR
  AFFICHER "u"
  AFFICHER i
  AFFICHER " = "
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

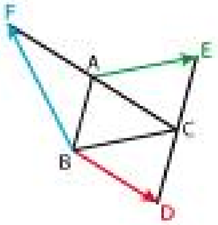
Chapitre 7

①



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, donc ABDC est un parallélogramme. Il en résulte que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$. Or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE}$, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}$ et ADCE est un parallélogramme.

②



a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (règle du parallélogramme).
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles).
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$. On construit $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC}$, donc on obtient $\overrightarrow{BF}$.
b) BAEC et ABDC sont deux parallélogrammes avec $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}$. Il en résulte que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ et que C est le milieu de [DE].

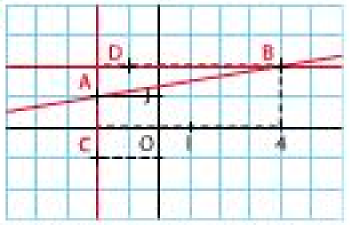
③

- $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; - $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$; - $\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

④ **a)** $\overrightarrow{MA}(-3 - x\,; 3 - y)$; $\overrightarrow{MB}(5 - x\,; -1 - y)$.
b) $3\overrightarrow{MB}$ a pour coordonnées $(15 - 3x\,; -3 - 3y)$.
c) $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$ équivaut à $-3 - x = 15 - 3x$ et $3 - y = -3 - 3y$ soit : $x = 9$ et $y = -3$.

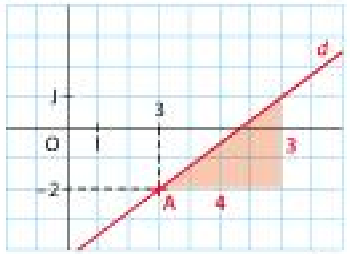
⑤ $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1 + 2\,; -3 -2)$ soit $(3\,; -5)$.
$\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(9 - 6\,; -1 - 4)$ soit $(3\,; -5)$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et ABCD est un parallélogramme.

⑥



- La droite (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{2-1}{4+2}$, soit $m = \frac{1}{6}$, donc $y = \frac{1}{6}x + p$. Or B(4; 2) est un point de (AB) donc $2 = \frac{4}{6} + p$, soit $p = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ et $y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$.
- La droite (AC) est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc pour équation $x = -2$. La droite (DB), qui est parallèle à l'axe des abscisses, a pour équation $y = 2$.

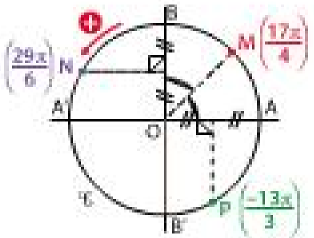
⑦ **a)**



b) d a une équation de la forme $y = \frac{3}{4}x + p$, or A(3 ; −2) est un point de d, donc :
$-2 = \frac{9}{4} + p$ et $p = -\frac{17}{4}$, ainsi d a pour équation $y = \frac{3}{4}x - \frac{17}{4}$.

Chapitre 8

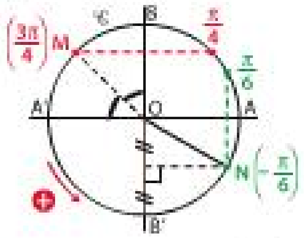
① - $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$
donc M est associé à $\frac{\pi}{4}$.
- $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$
donc N est associé à $\frac{5\pi}{6}$.
- $-\frac{13\pi}{3} = -\frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -4\pi - \frac{\pi}{3}$
donc P est associé à $-\frac{\pi}{3}$.



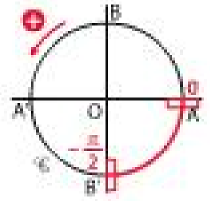
② **a)** $-\frac{11\pi}{8} = -\frac{16\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = -2\pi + \frac{5\pi}{8}$.
b) $\frac{117\pi}{8} = \frac{112\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = 14\pi + \frac{5\pi}{8}$.
Donc $\frac{117\pi}{8}$ est associé au même point M.

③ **1. a)** M et N ont des abscisses et des ordonnées opposées.
b) Donc $\cos(x + \pi) = -\cos x$
et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.
2. - $\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$ donc :
$\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi$ donc :
$\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.
- $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$ donc :
$\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

④ $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.



⑤ **1.** $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.
2. a)



b) $\sin x < 0$.
c) $(\sin x)^2 = \frac{8}{9}$ soit $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Donc $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chapitre 9

① **1.** A a pour coordonnées (0 ; 5), B(3 ; −1), C(−3 ; 2). Donc $\overrightarrow{AB}(3\,; -6)$ et $\overrightarrow{BC}(-6\,; 3)$.
Donc $AB = BC = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Le triangle ABC est isocèle en B.
2. $\overrightarrow{AC}(-3\,; -3)$ donc $AC = 3\sqrt{2}$. Il en résulte que le périmètre est égal à :
$$3\sqrt{2} + 2 \times 3\sqrt{5} = 3(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}).$$

---

② **1.** $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{36\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 6\pi - \frac{\pi}{6}$ donc la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $-\frac{\pi}{6}$.
2. L'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$ soit 30°.

③ **a)** Le nombre θ de $[0\,; \pi]$ tel que :
$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ est } \frac{2\pi}{3}.$$
Donc la mesure cherchée est $\frac{2\pi}{3}$, soit 120°.
b) Le nombre θ de $[0\,; \pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\frac{\pi}{6}$. Donc la mesure cherchée est $\frac{\pi}{6}$ ou 30°.
c) De même, on obtient π ou 180°.

④ L'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est tel que :
$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) < 0$ et $\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}$ donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{5\pi}{6}$. ON = 2 donc N a pour coordonnées $\left(2\cos\frac{5\pi}{6}, 2\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ soit $(-\sqrt{3}\,; 1)$.

Chapitre 10

① $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (5 ; 5) donc
$AB = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$.
Le rayon du cercle est $5\sqrt{2}$.

② - Si M est un point de la médiatrice, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 = 2$.
- Notons H le projeté orthogonal de M sur (AB). $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$. Le produit scalaire est positif donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens. Il en résulte que AH × AB = 2 et AH = 1. Ainsi H est le milieu de [AB] et M un point de la médiatrice de [AB]. D'où l'équivalence.

③ A(−1 ; 2), B(3 ; 4) et M(x ; y) donc :
$\overrightarrow{MA}(-1 - x\,; 2 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(3 - x\,; 4 - y)$.
$$\begin{aligned}\text{Ainsi } MA^2 &= (-1 - x)^2 + (2 - y)^2\\ &= 1 + 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2\\ &= x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}MB^2 &= (3 - x)^2 + (4 - y)^2\\ &= 9 - 6x + x^2 + 16 - 8y + y^2\\ &= x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25.\end{aligned}$$
$MA^2 - MB^2 = 1$ équivaut à $8x + 4y - 21 = 0$ et l'ensemble des points M est une droite d.

④ $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

⑤ **a)** $(\sin x)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
$\sin x > 0$, donc $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$.
b) $(\cos x)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.
$\cos x < 0$, donc $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Chapitre 11

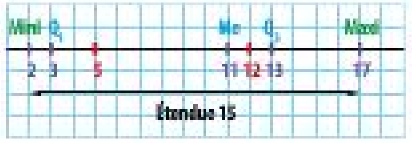
① **a)** Note moyenne :
$\bar{x} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 + \ldots + 1 \times 20}{76}$
d'où $\bar{x} = 10{,}37$.
b) Parmi les candidats, 47 ont obtenu une note de dix ou plus, d'où la proportion $p = \frac{47}{76} = 0{,}62$.
Ainsi le pourcentage cherché est $p = 62\ \%$.

② **a)** Estimation du salaire moyen :
$\bar{s} = 0{,}48 \times 1{,}5 + 0{,}34 \times 2{,}5 + 0{,}16 \times 3{,}5 + 0{,}02 \times 4{,}5$.
$\bar{s} = 2{,}22$ (milliers d'euros).
Ainsi, on peut estimer le salaire brut moyen à 2 220 €.
b) On note x la fréquence de la 1re classe.
Or la somme des fréquences vaut 1, donc la 2e classe a pour fréquence :
$$1 - (x + 0{,}16 + 0{,}02) = 0{,}82 - x.$$
Le salaire moyen est 2,3 (milliers d'euros) d'où la mise en équation :
$1{,}5x + 2{,}5\,(0{,}82 - x) + 3{,}5 \times 0{,}16 + 4{,}5 \times 0{,}02 = 2{,}3$.
Ainsi, $-x + 2{,}7 = 2{,}3$, donc $x = 0{,}4$.
On en déduit la nouvelle répartition des salaires.

Salaires	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[
Fréquences	0,40	0,42	0,16	0,02

③ **a)** L'effectif 76 est pair, donc N = 2k avec k = 38.
Ainsi, $Me = \frac{x_{38} + x_{39}}{2}$.
Les 38e et 39e notes valent 11 donc
$Me = \frac{11 + 11}{2} = 11$.
b) Le quart de l'effectif est 19, donc $Q_1 = x_{19} = 8$.
De même, $Q_3 = x_{57} = 13$.
c) Dans l'intervalle [8 ; 13], il y a 42 notes d'où la proportion $p = \frac{42}{76} = 0{,}55$.
Ainsi le pourcentage cherché est $p = 55\ \%$.

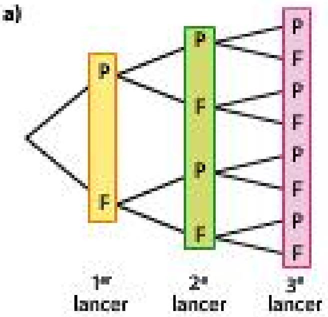
④ La situation peut être visualisée grâce à un axe sur lequel sont indiqués les nombres des nouvelles amies de Chloé, ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant.
- La série contient 7 valeurs différentes avec $x_1 = 2$.
- L'étendue est 15, donc $x_7 - x_1 = 15$.
Ainsi, $x_7 = x_1 + 15$ d'où $x_7 = 17$.
- Par définition :
$Q_1 = x_2 = 3$; $Q_3 = x_6 = 13$; $Me = x_4 = 11$.
- Pour obtenir les deux valeurs qui manquent, x_3 et x_5, on utilise la moyenne 9.
$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_7}{7} = 9$, soit $\frac{x_3 + x_5 + 46}{7} = 9$,
donc $x_3 + x_5 = 17$.
Or $x_4 < x_5 < x_6$, donc $11 < x_5 < 13$. Ainsi, la seule valeur possible pour x_5 est 12 d'où $x_3 = 5$.
Schéma récapitulatif :



Chapitre 12

① **a)** Le sac contient 50 boules et toutes ont la même probabilité d'être tirées.
$P(B) = \frac{\text{nombre de boules bleues}}{\text{nombre de boules}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.
De même, $P(R) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ et $P(V) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$.
b) Ainsi les issues B, R et V ne sont pas équiprobables.

② **a)**



L'univers est constitué de huit triplets.
b) La pièce est équilibrée, donc les huit issues sont équiprobables.

③ **a)** $\bar{A}$: «La carte n'est pas une figure».
$\bar{B}$: «La carte est noire».
$A \cap B$: «La carte est une figure rouge».
$A \cup B$: «La carte est une figure ou la carte est rouge».
$\bar{A} \cap B$: «La carte n'est pas une figure et la carte est rouge».
$A \cup \bar{B}$: «La carte est une figure ou la carte est noire».
b) $C = A \cap \bar{B}$. $D = \bar{B} \cap \bar{A}$.

④ A = {2 ; 4 ; 6} ; B = {3 ; 6} ; $A \cap B$ = {6} ;
$A \cup B$ = {2 ; 3 ; 4 ; 6} ; $\bar{A} \cap \bar{B}$ = {1 ; 5} ;
$\bar{A} \cup \bar{B}$ = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.

⑤ **a)** $P(H \cup T) = P(H) + P(T) - P(H \cap T)$ donc :
$P(H \cup T) = \frac{17}{35} + \frac{14}{35} - \frac{6}{35}$ soit $P(H \cup T) = \frac{5}{7}$.
b) Notons A l'événement : «l'élève ne pratique ni le hand-ball ni le tennis.» Son événement contraire s'énonce : «l'élève pratique le hand-ball ou le tennis.»
Ainsi $\bar{A} = H \cup T$, d'où $P(\bar{A}) = \frac{5}{7}$.
Or $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ donc $P(A) = \frac{2}{7}$.

⑥ **a)** Dire que les deux distributeurs ne sont jamais en panne simultanément signifie qu'il y en a toujours un qui fonctionne. Ainsi, l'événement $A \cup B$ est certain donc $P(A \cup B) = 1$.
b) L'événement : «les deux distributeurs fonctionnent en même temps» se note $A \cap B$.
On sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc :
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$
Ainsi $P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}6 - 1$
soit $P(A \cap B) = 0{,}4$.

Corrigés des « Pour se tester »

Chapitre 1

22 **1.** Le nombre $b^2 - 4ac$ s'appelle **le discriminant**.

2. La courbe représentative de f est une **parabole**.

3. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède une seule solution si Δ est **nul**.

4. Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

5. $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\Delta < 0$, le signe de $f(x)$ est le même que celui de $\boldsymbol{a}$.

23 **1. Faux.** $-5(-3)^2 + 13(-3) - 6 = -90 \neq 0$.

2. Vrai. $\Delta = 1 + 4a^2 > 0$.

3. Faux. $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$: le trinôme a deux racines. Donc, la parabole ne peut pas être entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

4. Faux. $-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{2}=-2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{2}$
$=-2x^2+2x+5$.

24 **1.** Les nombres 2 et 5 ne sont pas solutions des inéquations **a)** et **b)**.
Réponse exacte : c).

2. $-\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sont les racines du trinôme mais ne sont pas solution de l'inéquation.
Réponse exacte : c).

3. $\Delta = 36 + 24a > 0$.
Réponse exacte : a).

4. $\Delta = 0$.
Réponse exacte : b).

25 **1.a)** $-\frac{b}{2a}=\frac{-5}{-20}=\frac{1}{4}$; $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}=-0{,}375$.
Le coefficient de x^2 est négatif donc $-0{,}375$ est un maximum et pour tout x, $f(x) \leqslant -0{,}375$.
b) $\Delta = 25 - 40 = -15 < 0$.
d) $-10(x+0{,}25)^2-65=-10\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-65$.
Le coefficient de x est égal à -5.
Réponses exactes : a), b) et c).

2. a) Si $ac < 0$, alors $b^2 - 4\,ac > 0$. Donc le trinôme a deux racines.
b) Si $b = 0$, le trinôme s'écrit $ax^2 + c$.
L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine et pourtant $b = 0$.
c) $f(1) = a + b + c$ donc **c)** est vrai.
Réponses exactes : a) et c).

3. a) La parabole est « tournée vers le haut » : $a > 0$.
-1 et 3 sont racines donc $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$
$= a(x^2 - 2x - 3)$.
b) $-\frac{b}{2a} = 1$ et $f(1) = -4a$.
c) Si $A(0 ; -1) \in \mathscr{P}$, alors $f(0) = -3a = -1$ d'où $a = \frac{1}{3}$. Et $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{3}$.
Réponses exactes : a), b) et c).

4. $\Delta = -11 < 0$ et $a < 0$, le trinôme est strictement négatif pour tout nombre x et en particulier pour tout nombre de l'intervalle $]-5 ; 4[$.
Réponses exactes : a) et c).

Chapitre 2

17 **1.** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est :
a) définie sur l'intervalle $I = [\mathbf{0} ; +\infty[$;
b) strictement **croissante** sur I.

2. La fonction $g : x \mapsto |x|$ est :
a) strictement **décroissante** sur $]-\infty ; 0]$;
b) strictement **croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

3. Si $0 < x < 1$, alors x, $\sqrt{x}$ et x^2 sont rangés dans l'ordre :
$$x^2 < x < \sqrt{x}.$$

4. a est un réel non nul. La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{ax}$ est croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ si a est strictement **négatif**.

18 **a) Faux.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ soit $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Faux. $-\left(-\frac{1}{2}\right)>\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ car $\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$.

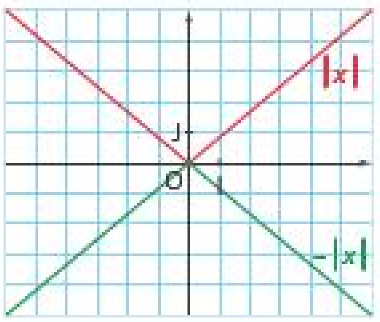
c) Vrai. u et $-2u$ varient en sens contraire (th. 5). La fonction racine carrée est strictement croissante sur I, donc f est bien strictement décroissante sur I.
d) Faux. $-2 < 3$ et $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ (les deux nombres ne sont pas de même signe).
e) Vrai. Sur $I =]-\infty ; 0[$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante, donc $x \mapsto -\frac{3}{x}$ est strictement croissante, ainsi que $x \mapsto 2 - \frac{3}{x}$.
f) Vrai. Car pour tout x, $|x|$ est positif.
g) Faux. $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, donc atteint son maximum en 0.

19 **1.** Pour tout $x > 0$, $|x| = x$ et donc $f(x) = \frac{1}{2}$.
La fonction f est constante.
Réponse exacte : a).

2. Sur I, si $a > 0$, la fonction $x \mapsto ax^2$ est strictement croissante et ne s'annule jamais. La fonction f est donc strictement décroissante (th. 7).
Réponse exacte : b).

3. Pour tout $x \geqslant -1$, la fonction affine $x \mapsto x + 1$ est strictement croissante et ne prend que des valeurs positives. Il en résulte que $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est, elle aussi, strictement croissante (th. 6) et puisqu'on multiplie par un négatif (th. 5), f est strictement décroissante.
Réponse exacte : c).

4.



Réponse exacte : b).

20 **1.** La fonction f est, comme la fonction carré, strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Réponses exactes : a) et c).

2. a) Vrai. La fonction f est affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0 ; +\infty[$.
b) Faux. Comme la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, la fonction est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
c) Vrai. Comme la fonction valeur absolue, la fonction est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
Réponses exactes : a) et c).

3. a) Vrai. Sur $[2 ; 5]$, comme la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, la fonction est strictement décroissante.
b) Faux. Comme la fonction carré $x \mapsto x^2$, la fonction est strictement croissante sur $[2 ; 5]$.
c) Vrai. La fonction carré $x \mapsto x^2 + 1$ étant strictement croissante sur $[2 ; 5]$, la fonction est strictement décroissante sur $[2 ; 5]$.
Réponses exactes : a) et c).

4. a) Faux. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, est strictement décroissante sur $[2 ; 5]$, donc $\frac{1}{5}$ est le minimum atteint par la fonction. Ainsi, pour tout x de $[2 ; 5]$, $\frac{1}{x} \geqslant 0{,}2$.
b) Vrai. Pour tout $x > 1$, $\sqrt{x} < x^2$.
c) Faux. Pour tout $x > 1$, $\sqrt{x} < x$.
Réponse exacte : b).

5. a) Vrai. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$ et pour tout $x > 1$, $\sqrt{x} + 1 < x^2 + 1$ donc :
$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} > \frac{1}{x^2+1}.$$
b) Vrai. Pour tout $x > 1$, $x^2 + 1 > x + 1$ donc :
$$\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x+1}.$$
c) Vrai. Pour tout $x > 1$, $x + 1 > \sqrt{x} + 1$, donc :
$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$
Réponses exactes : a), b) et c).

Chapitre 3

7 **1. a)** Le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle le taux d'accroissement (de f en a).
b) Si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0, alors L s'appelle le nombre dérivé (de f en a).

2. a) $f(a)$ est l'ordonnée de A.
b) $f'(a)$ s'appelle le nombre dérivé (de f en a).
c) L'équation de la tangente en A à $\mathscr{C}$ est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

8 **a) Faux.** $g'(x) = 2$.
b) Vrai. Cette tangente est la droite passant par ce point de la courbe d'abscisse 3 et de coefficient directeur $f'(3)$.
c) Vrai. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x$, donc $f'(2) = 12$.
d) Faux. $f'(x) = \sqrt{3}$.
e) Vrai. f est dérivable en 2 et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
L'équation réduite de la tangente est :
$$y = f'(2)(x - 2) + f(2), \text{ soit } y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

9 **1.** $f'(x) = 2 \times 3x + 2 = 6x + 2$.
Réponse exacte : c).

2. Notons f la fonction carré : $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$ donc $f'(-3) = -6$. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -3 est :
$$y = f'(-3)(x + 3) + f(3) \text{ soit } y = -6x - 9.$$
Réponse exacte : b).

3. $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{-(1+h)^2+(1+h)+1-1}{h}$
$=\frac{-h^2-h}{h}=-h-1.$
Réponse exacte : b).

4. a) Faux. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(16) = \frac{1}{8}$.
b) Faux. Le point de la courbe d'abscisse 16 : A(16 ; 4), n'appartient pas à la droite d'équation $y = \frac{1}{8}x - 2$.
c) Vrai. A appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{8}x + 2$.
Réponse exacte : c).

10 **1. a) Vrai.**
b) Faux. $f(1) = 1$.
c) Faux. $f'(1) = 2$.
d) Vrai.
Réponses exactes : a) et d).

2. a) Faux. $f'(x) = x - 2$ d'où $f'(4) = 2$. L'équation réduite de la tangente T en ce point d'abscisse 4 est : $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$ soit $y = 2x - 5$. Le point A n'appartient pas à T.
b) Vrai. $f'(x) = 1$ équivaut à $x - 2 = 1$ qui admet une unique solution $x = 3$.
c) Vrai. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = xf'(0) + f(0)$ soit $y = -2x + 3$.
Réponses exactes : b) et c).

3. a) Vrai. Notons $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Alors $f'(x) = 2ax + b$.
La courbe passe par A,
donc $f(-1) = a - b + c = 2$.
Elle passe par B, donc $4a + 2b + c = 2$.
Enfin la tangente en A a pour coefficient directeur 3, donc $f'(-1) = -2a + b = 3$.
Le triplet $(-1 ; 1 ; 4)$ est solution du système :
$$\begin{cases} -2a + b = 3 \\ a - b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases} \quad \text{donc l'affirmation est vraie.}$$
b) Vrai. $f'(x) = -2x + 1$ d'où $f'(2) = -3$. L'équation réduite de la tangente en B est :
$$y = f'(2)(x - 2)\,f(2) \text{ soit } y = -3x + 8.$$
c) Vrai. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Réponses exactes : a), b) et c).

Chapitre 4

15 **1. a)** $(uv)' = \boldsymbol{u'v + uv'}$.
b) $(u + v)' = \boldsymbol{u' + v'}$.
c) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \boldsymbol{\frac{u'v - uv'}{v^2}}$.

2. Multiplier une fonction dérivable par une constante λ multiplie sa dérivée par $\boldsymbol{\lambda}$.

3. a) Si, pour tout nombre x de I, $f'(x) > 0$, alors, sur I, f est **strictement croissante**.
b) Si, pour tout nombre x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors, sur I, f est **décroissante**.

4. $f(0)$ est un **maximum local de f sur $]-2 ; 1[$**.

16 **a) Vrai.** $f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x + 1)(x - 1)$.
$f'(x)$ est positif entre les racines -1 et 1 donc la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$.
b) Vrai. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
c) Vrai. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre x, $f'(x) = 1$, donc f est strictement croissante et n'admet pas de maximum.
d) Faux. $f'(x)$ peut s'annuler pour quelques valeurs. Exemple : la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée f' définie par $f'(x) = 3x^2$ est nulle pour $x = 0$.
e) Faux. Un contre-exemple : f et g définie par $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = g'(x) = 1$.
f) Vrai. La dérivée de $f + k$ (où f est une fonction dérivable et k une fonction constante) est la fonction f' car la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

17 **1.** $g'(x) = -\frac{2}{3}(3x^2) + 2 = -2x^2 + 2$.
Réponse exacte : b).

2. a) Faux. $h'(x) = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2} \neq 2x - 2$.
b) Faux. $h(2) = 0$ et $h(3) = \frac{3}{4}$.
c) Vrai. $h'(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 2x - 2 = 0$, équation qui admet deux solution distinctes car $\Delta = 12$.
d) Faux. $h'(1) = \frac{1}{4}$.
Réponse exacte : c).

18 **1. a) Vrai.**
b) Faux. La fonction est décroissante par exemple sur $[1{,}5 ; 1{,}6]$.
c) Vrai. Le minimum est égal à $-1{,}5$ et le maximum strictement inférieur à 3,5.
Réponses exactes : a) et c).

2. a) Vrai. $(f + g)' = f' + g'$
donc $(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 3 - 1 = 2$.
b) Faux. $(f \times g)' = f'g + fg'$
donc $(f \times g)'(2) = f'(2) \times g(2) + f(2) \times g'(2)$
$= 3 \times (-4) + 0 \times (-1) = -12$.
c) Faux. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
donc $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{[g(2)]^2}$
$= 3 \times \frac{(-4)}{(-4)^2} = -\frac{3}{4}$.
d) Vrai. $(f^2)' = 2ff'$
donc $(f^2)'(2) = 2f(2) \times f'(2) = 0$.
Réponses exactes : a) et d).

3. a) Vrai. $f'(x) = a(3x^2) + b(2x) - a$
$= 3ax^2 + 2bx - a$.
b) Vrai.
Le discriminant du trinôme $3ax^2 + 2bc - a$ est strictement positif ($\Delta = 4b^2 + 12a^2 > 0$).
Le trinôme admet donc deux racines distinctes x_1 et x_2. $f'(x)$ est du signe de a à l'extérieur de $]x_1 ; x_2[$ et du signe contraire à l'intérieur.
c) Faux. Le tableau de variation fait apparaître deux extremums associés aux points d'abscisses x_1 et x_2.
d) Faux. f' change de signe (voir **b**).
Réponses exactes : a) et b).

Chapitre 5

25 **1.** La suite (u_n) est telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
a) La suite (u_n) est **arithmétique**.
b) Le réel r est **la raison** de la suite.
c) Pour tous entiers naturels m et p,
$u_m - u_p = (m - p)r$.

2. La suite (v_n) est telle que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$ avec $q \neq 0$.
a) La suite (v_n) est **géométrique**.
b) Le réel q est **la raison** de la suite.
c) Pour tous entiers naturels m et p,
$u_m = u_p \times q^{m-p}$.

26 **a) Vrai.** $u_{16} = 3 \times 16 - 1 = 47$.
b) Vrai. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 2$.
c) Faux. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ qui varie avec n : la suite n'est pas arithmétique.
d) Faux. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{3} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{4}$: la suite n'est pas géométrique.

e) Vrai. Notons q la raison.

$$\begin{aligned} u_n \times u_{n+2} &= u_n \times u_n \times q^2 \\ &= (u_n \times q)^2 \\ &= u_{n+1}^2. \end{aligned}$$

f) Vrai. $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ et donc $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+1$ et $\sqrt{2}+2$ sont trois termes consécutifs d'une suite aritmétique de raison 1.

27 **1.** $u_2 - u_1 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2} \neq u_3 - u_2 = \frac{7}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{6}$.

La suite n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{6} \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{14}{15}$.

La suite n'est pas géométrique.

Réponse exacte : c).

2. Pour tout naturel n, non nul, $u_{n+1} = \frac{5}{3} u_n$.

La suite est géométrique de raison $\frac{5}{3}$.

$u_1 - u_0 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ et $u_2 - u_1 = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$.

La suite n'est pas arithmétique.

Réponse exacte : b).

3. Pour tout n par $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 3 + 3$
$= 2(u_n + 3)$
$= 2v_n$

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $4(u_0 + 3 = 4)$ et de raison 2. D'où pour tout n, $v_n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ et $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Le calcul des premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 13$ prouve que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Réponse exacte : c)

4. $x^3 \times x^5 \times x^7 \times \ldots \times x^{17} \times x^{19} = x^{3+5+7+\ldots+17+19}$

$19 - 3 = 16 = 8 \times 2$ (8 intervalles de 2).

$3 + 5 + 7 + \ldots + 17 + 19$ est donc la somme de 9 termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$S = 9 \times \frac{3+19}{2} = 99$.

Réponse exacte : b).

28 **1.** f est strictement croissante sur I (la fonction affine définie par $u(x) = 2x - 1$ est strictement croissante sur I et positive donc la fonction $\sqrt{u}$ l'est aussi – cf chapitre 2).

Donc $f(17) > f(16)$.

$u_{13} = f(13) = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$.

$f(x) = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}$. L'équation $f(x) = 4$ n'a pas de solution entière donc 4 n'est pas un terme de la suite (u_n).

Réponses exactes : a) et b).

2. $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2}$.

Réponses exactes : b) et c).

3. Par définition, la suite (u_n) est arithmétique de raison 3. $u_9 = u_0 + 9r = 1 + 9 \times 3 = 28$.

Pour tout naturel n,

par $v_{n+1} - v_n = [3(n+1) - 1] - (3n - 1) = 3$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison 3. $v_{10} = 3 \times 10 - 1 = 29$, donc $u_9 \neq v_{10}$.

Réponses exactes : a) et b).

Chapitre 6

20 **a)** Dire qu'une suite (u_n) est croissante, signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est **positif**.

b) Une suite (u_n) est telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$, est une suite **constante**.

c) La suite (v_n) est telle que pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$, avec f décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La suite (v_n) est **décroissante**.

d) Tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

Si, pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est strictement **croissante**.

21 **a) Vrai.** $f : x \mapsto 3x - 1$ est affine croissante donc (u_n) est croissante.

b) Faux. Deux termes consécutifs sont (toujours) de signes contraires.

c) Faux. Un contre-exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n = 3 - \frac{1}{n}$$

est strictement croissante et pour tout n, $u_n < 3$.

d) Vrai car pour tout entier naturel n, $f(n) \leqslant f(n+1)$, soit, $u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante.

e) Faux car $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{13}{3} < 5$.

22 **1.** Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$. f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Ainsi $f'(x) > 0$ donc f est donc strictement croissante ainsi que la suite (u_n).

Réponse exacte : a).

2. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = -1$, $u_3 = 7$, $u_4 = -9$: la suite (u_n) n'est pas monotone.

Réponse exacte : d).

3. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - 3 - u_n + 3 = u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ car la suite (u_n) est croissante : la suite (v_n) est croissante.

Réponse exacte : a).

4. $v_{n+1} - v_n = 2(u_{n+1} - u_n)$ avec $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ car la suite (u_n) est décroissante. Ainsi $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et (v_n) est décroissante.

Réponse exacte : b).

5. a) Faux. Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = n + 1 > 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Faux. Pour tout entier naturel n,

$u_n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}$.

c) Vrai. La suite (u_n) est strictement croissante (voir **a)**) et $u_{63} = \frac{63 \times 64}{2} = 2016$ donc si $n \geqslant 63$, alors $u_n > 2011$.

Réponse exacte : c).

23 **1.** $u_0 = 8$, $u_1 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $u_4 = 4$: la suite (u_n) n'est pas monotone, donc **a) faux**, **b) faux** et **d) vrai**.

c) Vrai. $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 5x + 8$ qui est strictement croissante pour $x \geqslant \frac{5}{2}$: la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 3.

Réponses exactes : c) et d).

2. a) Vrai. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} < 1$ (car $0 < n^2 + 1 < n^2 + 2n + 2$).

Vrai. La suite (u_n) est (strictement) décroissante.

b) Vrai. Pour tout entier naturel n, $n > 10$, la suite étant strictement décroissante $u_n < u_{10}$.

Or $u_{10} = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$.

Vrai. De plus, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. Il en résulte que pour tout entier naturel $n > 10$, $u_n \in]0 ; 0{,}01[$.

c) Faux (voir **b)**).

Réponses exactes : a) et b).

3. a) Vrai. $u_0 = 1$ et la suite (u_n) est strictement croissante : pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b) Vrai. La somme de n termes supérieurs à 1 est supérieure à n.

v_n, somme de u_0 et de n termes supérieurs à 1, est strictement supérieur à n.

c) Vrai. Pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} \geqslant 1$, donc $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite (v_n) est strictement croissante.

d) Vrai. Pour tout entier naturel n, $v_n > n$. Donc quel que soit le nombre A choisi aussi «grand» que l'on veut, si l'on note M le premier nombre entier supérieur à A, tous les termes d'indice supérieurs ou égaux à M «dépassent» A : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Réponses exactes : a), b), c) et d).

Chapitre 7

27 **a)** La droite d'équation $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$.

b) L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $x = c$.

c) Dire que les vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont colinéaires équivaut à dire que $xy' - x'y = 0$.

d) La droite d'équation $y = mx + p$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; m)$.

e) Dire que les droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles équivaut à dire que $m = m'$.

28 **a)** $\overrightarrow{AB}(8 ; 13)$; $\overrightarrow{OC}(3 ; 5)$.

$8 \times 5 - 13 \times 3 = 1 \neq 0$.

Réponse : faux.

b) $8x + 2y + 6 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2 ; 8)$ et $3x + \frac{3}{4}y - 5 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u'}\left(-\frac{3}{4} ; 3\right)$.

$-2 \times 3 - \left(-\frac{3}{4} \times 8\right) = 0$.

Réponse : vrai.

c) $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{u}$.

Réponse : vrai.

d) $\vec{u}(-b ; a)$.

Réponse : vrai.

e) Les droites d'équation $x = c$ n'ont pas de coefficient directeur.

Réponse : faux.

f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$ s'écrit $3x + 2y - 6 = 0$ donc c'est la même droite.

Réponse : vrai.

29 **1.** $\frac{2}{5}x - y + 3 = 0$.

Donc $\vec{u}\left(1 ; \frac{2}{5}\right)$ ou $\vec{v}(5 ; 2)$ est vecteur directeur.

Réponse exacte : c).

2. $-2\vec{u}$ a pour coordonnées $(-1 ; 6)$.

Réponse exacte : a).

3. $3x + 2y - 5 = 0$ s'écrit $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ donc $m = -\frac{3}{2}$.

Réponse exacte : b).

4. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$
$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Réponse exacte : a).

5. O, E, B alignés donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$ soit $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

Réponse exacte : c).

30 **1. a) Faux**, car $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$, $B\left(0 ; \frac{1}{3}\right)$

et $5\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG}\right) = 3\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)$

$5\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$
$= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OJ}$.

b) Vrai. Voir le calcul précédent.

c) Vrai, car $5\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OK}$.

Réponses exactes : b) et c).

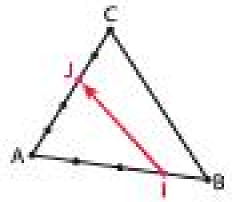
2. a) Vrai, car les coordonnées de A et B vérifient l'équation.

b) Vrai, car $C(6 ; 0)$ appartient à d.

c) Faux, car l'équation de d s'écrit $y = -\frac{2}{3}x + 4$ et $-\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{2}$.

Réponses exactes : a) et b).

3. a)



Vrai, car $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) Vrai, car $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{3}{4} ; \frac{3}{5}\right)$, $\vec{u}(-5 ; 4)$

soit $-\frac{3}{4} \times 4 - (-5) \times \frac{3}{5} = 0$.

c) Vrai, car les coordonnées de $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 1)$ vérifient l'équation.

Réponses exactes : a), b) et c).

Chapitre 8

16 **a)** α et d sont les mesures en radians et en degrés d'un angle. α et d sont liés par la relation $180° \times \alpha = \pi \times d$.

b) Si β est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$, alors β appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

c) Si β est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ et θ la mesure de l'angle géométrique associé (β et θ en radians), alors β et θ sont liés par la relation $\theta = |\beta|$.

d) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, -\vec{v})$ sont liés par la relation :

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi.$$

17 **a)** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) - \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$
$= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) + \pi$
$= 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) + \pi$.

Réponse : fausse.

b) $(\vec{u}, \vec{t}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{t})$ soit :

$(\vec{u}, \vec{t}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = \pi$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires.

Réponse : vrai.

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \sin(3\pi - x) = \cos x - \sin x - \cos x + \sin x = 0$.

Réponse : vrai.

d) $\frac{83\pi}{8} = 10\pi + \frac{3\pi}{8}$ et $\frac{81}{8}\pi = 10\pi + \frac{\pi}{8}$.

Or $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ donc :

$\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}$.

$\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$.

Réponse : vrai.

18 **1.** $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi = \frac{\pi}{5} + \pi = \frac{6\pi}{5}$.

$\frac{6\pi}{5} - 2\pi = -\frac{4\pi}{5}$.

Réponse exacte : b).

2. $\sin(3\pi + x) + \cos(x - \pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$= -\sin x - \cos x - \cos x = -\sin x - 2\cos x$.

Réponse exacte : a).

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Or $(\sin x)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ et $\sin x < 0$ car $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Réponse exacte : b).

4. $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OB}\right)$ car $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Réponse exacte : b).

19 **1. a)** $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CO}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}\right) + \pi$
$= -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

b) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\right) = \frac{\pi}{4}$.

c) $\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}\right) = \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Réponses exactes : a) et c).

2. a) $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \pi = -\alpha + \pi$.

b) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \pi = \pi + \alpha$.

c) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \alpha$.

Réponses exactes : a) et b).

3. $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right)$
$= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \pi$
$= \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8} + \pi$
$= \frac{8\pi + 9\pi + 24\pi}{24}$
$= \frac{41\pi}{24}$
$= 2\pi - \frac{7\pi}{24}$.

Réponses exactes : b) et c).

4. a) $\left(\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'B'}\right) = \left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BC}\right)$ car $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$\left(\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'B'}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Donc $\cos\left(\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'B'}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CC'}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC'}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Donc $\sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CC'}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\left(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{BB'}\right) = \left(\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OB'}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.

Donc $\sin\left(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{BB'}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Réponses exactes : a), b) et c).

Chapitre 9

21 **a)** Dans un repère orthonormé, l'orthogonalité des vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ se traduit par $xx' + yy' = 0$.

b) Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \mathbf{OA \times OB}$.

c) Si dans un repère orthonormé, la droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{n}(a ; b)$ est **normal à d**.

d) L'expression du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de la norme des vecteurs et de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

22 **a)** Les points sont alignés dans l'ordre B, A, C. **Réponse : vrai.**

b) Notons θ l'angle géométrique associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 20 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$
$= 5 \times 3 \times \cos\theta$.

Soit $\cos\theta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} > 1$. C'est impossible.

Réponse : faux.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ soit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$. Les points sont alignés dans l'ordre B, A, C.

Réponse : vrai.

d) Un vecteur normal à d est $\vec{n} = (1\,;-2)$.
Réponse : faux.

23 **1.** d a une équation de la forme : $-2x + 3y + c = 0$. $A(1,\ 1) \in d$ donc $c = -1$.
Réponse exacte : c).

2. Si $\vec{u}^{\,2} = \vec{v}^{\,2}$, alors $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ donc $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.
Réponse exacte : c).

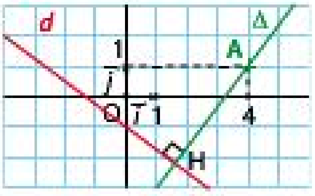
3. $(2\vec{u} - \vec{v})^2 = 4\,\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v}$. Or $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc $(2\vec{u} - \vec{v})^2 = 37$. **Réponse exacte : b).**

4. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = k$. On suppose que O, A et H sont alignés dans cet ordre et distincts. Alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = OA \times OH = OH$. Donc $k = OH$. Comme H est le projeté orthogonal de B sur (OA), dans ce cas, $1 < OH \leqslant 2$. Donc $k \in]1\,;2]$.
Réponse exacte : b).

24 **1. a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH = 12$.
b) Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AHC : $CH^2 = 12$.
Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle CHB : $BC^2 = 28$, soit $BC = 2\sqrt{7}$.
c) $(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA})\cdot(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB})$
$= \overrightarrow{CH}^2 + \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{CH}^2 + \cancel{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}} + \cancel{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HA}} + \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$ (car $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HA} = 0$, vecteurs orthogonaux).
$= CH^2 - HA \times HB = 12 - 8 = 4$.
Réponses exactes : a), b) et c).

2. a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'} = -1$.
b) $(\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'O})\cdot(\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'A})$
$= BA'^2 + \overrightarrow{A'O}\cdot\overrightarrow{A'A} + \cancel{\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{A'A}} + \cancel{\overrightarrow{A'O}\cdot\overrightarrow{BA'}}$ (vecteurs orthogonaux)
$= BA'^2 + A'O \times A'A = 3 + 2 = 5$.
c) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$
$= 2\cos(\widehat{AOB})$.
Or $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB} = -1$ donc $\cos(\widehat{AOB}) = -\frac{1}{2}$.
Réponses exactes : a) et c).

3.



a) Les coordonnées de H sont solution du système :

$$\begin{cases} 3x + 4y + 4 = 0 \\ -4x + 3y + 13 = 0. \end{cases}$$

$\left(\frac{8}{5}\,;-\frac{11}{5}\right)$ est bien la solution de ce système.
b) La distance de A à d est égale à $\|\overrightarrow{AH}\|$.

$$\overrightarrow{AH}\left(-\frac{12}{5}\,;-\frac{16}{5}\right) \text{ donc } AH = \sqrt{\frac{144 + 256}{25}} = \sqrt{\frac{400}{25}} = \sqrt{16} = 4.$$

c) Le cercle est bien tangent à d car $(AH) \perp d$.
Réponses exactes : a), b) et c).

Chapitre 10

31 **a)** Un cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_0\,;y_0)$ et de rayon r a pour équation :

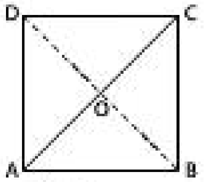
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

b) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est **le cercle de diamètre [AB].**
c) a et b sont deux nombres. Alors :
- $\cos(a + b) = $ **$\cos a \cos b - \sin a \sin b$.**
- $\cos 2a = $ **$2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.**

d) a et b sont deux nombres. Alors :
- $\sin(a - b) = $ **$\sin a \cos b - \sin b \cos a$.**
- $\sin 2a = $ **$2 \sin a \cos a$.**

32 **a) Vrai** car $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -1$. Ce n'est pas l'équation d'un cercle.
b) Vrai car $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$ donc on obtient M(–1 ; 3).
c) Vrai car $(x + a)^2 + (y + 2)^2 = a^2 + b^2 - c$.
Or $c < 0$ donc $a^2 + b^2 - c > 0$ et $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
d) Vrai car $\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} - \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}$, soit
$2\cos x \sin\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \sqrt{2}\cos x$.

33 **1.**



c) Vrai, car $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$ est le cercle de diamètre [AC].
Réponse exacte : c).

2. b) Vrai, car

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right), \text{ soit } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Réponse exacte : b).

3. b) Vrai car $(\sin\theta)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ et $\sin\theta < 0$ donc $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, soit
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$= 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$.
Réponse exacte : b).

4. c) Vrai, car l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre [AB], et l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$ est le cercle de diamètre [AC]. Ces cercles ont en commun A et M, pied de la hauteur issue de A. **Réponse exacte : c).**

5. La réponse **b)** est exacte car
$\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\cos x\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$
donc $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.
$\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$, donc
$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.
Réponse exacte : b).

34 **1.** $\cos 2a = 2\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right)^2 - 1$
$= \frac{2(2 + \sqrt{3})}{4} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
et $2a \in [\pi\,;2\pi]$.
Réponses exactes : a) et b).

2. a) Vrai, car le milieu I de [AB] a pour coordonnées (3 ; 5), c'est un point de la droite. De plus le vecteur $\vec{n}(3\,;1)$ normal à la droite est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
b) Vrai, car le centre est un point de la médiatrice de [OA] donc l'ordonnée du centre est 2 et ce point est un point de la droite d'équation $3x + y - 14 = 0$. C'est donc le centre du cercle.
c) Faux, car O(0 ; 0) ne vérifie pas l'équation.
Réponses exactes : a) et b).

3. a) Vrai, car si $x = 0$, alors l'équation $y^2 - 8y + 9 = 0$ a pour solutions $4 - \sqrt{7}$ et $4 + \sqrt{7}$.
b) Vrai, car $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ donc $A \in \mathscr{C}_1$.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{18}{5} - \frac{32}{5} + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$,
donc $A \in \mathscr{C}_2$.
c) Vrai, car $\mathscr{C}_2$ a pour centre I(3 ; 4) et pour rayon 4.
$\mathscr{C}_1$ a pour centre O et pour rayon 1.
$OI = \sqrt{9 + 16} = 5$.
Donc la distance des centres est égale à la somme des rayons et les calculs sont tangents extérieurement.
Réponses exactes : a), b) et c).

Chapitre 11

13 **a)** Le premier quartile est la taille de rang **9**.
b) Le troisième quartile est la taille de rang **27**.
c) Dans le diagramme en boîte associé à la série, la longueur de la boîte correspond à **l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$**.
d) Dans le diagramme en boîte associé à la série, la longueur totale des pattes correspond à **étendue – écart interquartile.**
e) La variance est **le carré** de l'écart-type.
f) La variance s'exprime en **cm²**.

14 Dans la série (x_i), les N données sont écrites une à une donc une même donnée peut être répétée.
a) On utilise la formule de la variance.

$$V = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \text{ d'où } \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} = \bar{x}^2 + s^2.$$

Ainsi la moyenne des carrés des valeurs x_i est égale à $\bar{x}^2 + s^2$.
Réponse : vrai.

b) On utilise le résultat précédent :

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} = \bar{x}^2 + s^2.$$

Si $s = 0$, alors $\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} = \bar{x}^2$. Ainsi la moyenne des carrés des valeurs x_i est égale au carré de leur moyenne $\bar{x}$.
Réponse : vrai.
c) D'après la définition de la moyenne :
$\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}$.
Ainsi $\sum_{i=1}^{N} x_i = 32 \times 12 = 384$.
Réponse : vrai.
d) On utilise la formule de la variance.

$$V = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \text{ donc } s^2 = \frac{310}{10} - 5^2 = 6.$$

Réponse : faux.

15 **1.** Les principaux paramètres sont :
$\bar{x} = 0{,}303$; Me $= 0{,}30$; $Q_1 = 0{,}29$; $Q_3 = 0{,}31$ et $s = 0{,}0195$.
D'où l'écart interquartile : $e = Q_3 - Q_1 = 0{,}02$.
Réponse exacte : d).
2. On élimine les valeurs non situées dans l'intervalle d'extrémités Me $- 1{,}5e = 0{,}27$ et Me $+ 1{,}5e = 0{,}33$.
Ainsi la série X' contient toutes les valeurs de la série X sauf deux valeurs anormales, 0,35 et 0,36.
Pour cette série X', les limites de confiance sont 0,271 et 0,328, donc deux valeurs x_i' ne sont pas dans les limites 0,27 et 0,33.
Le seuil d'alerte est atteint.
Réponse exacte : c).

16 **1.** On lit le diagramme en boîte associé à « S = 10 ».
a) $Q_1 = 304$ donc **a)** est vraie. Ainsi dans 25 % des cas il y a 304 réalisations au plus donc **d)** est fausse.
b) $Q_3 = 324$ donc **b)** est vraie.
c) Me = 313 ; ainsi dans 50 % des cas il y a 313 réalisations ou moins donc **c)** est vraie.
Réponses exactes : a), b) et c).
2. On lit le diagramme en boîte associé à « S = 9 ».
a) Me = 288 donc **a)** est vraie.
b) $Q_1 = 279$ et $Q_3 = 300$. L'écart interquartile est $e = Q_3 - Q_1 = 21$ donc **b)** est vraie.
c) $Q_1 = 279$; ainsi dans 25 % des cas il y a 279 réalisations ou moins donc **c)** est fausse.
d) $Q_3 = 300$; ainsi dans 75 % des cas il y a au plus 300 réalisations donc **d)** est vraie.
Réponses exactes : a), b) et d).
3. a) L'issue « S = 9 » est réalisée au minimum 257 fois et au maximum 326 fois lors des cent expériences.
D'où l'encadrement de la fréquence
$\frac{257}{2\,500} \leqslant f_9 \leqslant \frac{326}{2\,500}$, soit $0{,}1028 \leqslant f_9 \leqslant 0{,}1304$.
On en déduit l'encadrement plus large $0{,}102 < f_9 < 0{,}131$. Ainsi **a)** est vraie.
b) De même, $\frac{282}{2\,500} \leqslant f_{18} \leqslant \frac{347}{2\,500}$, soit $0{,}1128 \leqslant f_{18} \leqslant 0{,}1388$, d'où l'encadrement plus large $0{,}112 < f_{18} < 0{,}139$.
Ainsi **c)** est vraie.
Réponses exactes : a) et b).

Chapitre 12

9 **a)** Si à chaque issue on associe un nombre, on dit qu'on définit **une variable aléatoire.**
b) Si X est une variable aléatoire sur E qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$, alors « $X = x_i$ » est **un événement.**
c) $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = 1$. **d)** $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)\,x_i = E(X)$.
e) La variance de X est **le carré** de l'écart-type de X.

10 **a)** La situation est illustrée par le tableau suivant où les cases contiennent les produits des numéros sortis.
On vérifie que T prend 18 valeurs.

Dé 1 Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Réponse : vrai.
b) Contre-exemple :

$$P(T = 1) = \frac{1}{36} \quad \text{et} \quad P(T = 2) = \frac{2}{36}.$$

Les événements « $T = t_i$ » ne sont pas équiprobables.
Réponse : faux.
c) $P(T \leqslant 10) = \frac{19}{36}$ donc $P(T \leqslant 10) > 0{,}5$.
Réponse : faux.
d) $P(6 \leqslant T \leqslant 18) = \frac{18}{36} = 0{,}5$.
Réponse : vrai.
e) À la calculatrice : $E(T) = 12{,}25 = \frac{49}{4}$.
Réponse : vrai.
f) $E(4T - 48) = 4E(T) - 48 = 4 \times \frac{49}{4} - 48 = 1$.
Réponse : vrai.

11 **1.** Le jeu de domino comprend :
- 7 doubles (du double 0 au double 6) ;
- 21 simples.

En effet, il y a 7 choix pour la première case du domino et 6 choix pour la deuxième case, soit 42 possibilités. Mais en procédant ainsi, on dénombre deux fois le même domino.
Donc le nombre de « simples » est $\frac{42}{2} = 21$.
Finalement, il existe 28 dominos.
Réponse exacte : c).

2. Il y a équiprobabilité donc
P(« double ») $= \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$.
Réponse exacte : b).

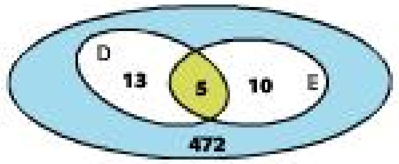
3. On détermine la loi de X.
« X = 6 » signifie « double 6 »
donc $P(X = 6) = \frac{1}{28}$.
De même pour les valeurs 5, 4, 3, 2, 1, 0.
« X = –1 » est réalisé si on obtient un simple
donc $P(X = -1) = \frac{21}{28}$.
D'où la loi de probabilité de X.

x_i	–1	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

On en déduit : $21 \times P(X = 0) = P(X = -1)$.
Réponse exacte : c).

4. $E(X) = 0$. Ainsi le jeu est équitable.
Réponse exacte : a).

12 Réalisons un schéma de la situation.
472 lentilles n'ont aucun défaut donc 28 lentilles (500 – 472) ont au moins un défaut.
Ainsi $D \cup E$ contient 28 lentilles.
Soit x le nombre de lentilles de $D \cap E$.
$28 = 18 + 15 - x$ donc $x = 5$.
D'où les nombres indiqués sur le schéma.



1. a) Parmi les 500 lentilles, 472 n'ont aucun défaut donc $P(\overline{D} \cap \overline{E}) = \frac{472}{500} = 0{,}944$.
Ainsi **a)** est vraie.
b) $D \cup E$ est l'événement contraire de A : « la lentille n'a ni défaut de diamètre ni défaut d'épaisseur »
donc $P(D \cup E) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}944$
soit $P(D \cup E) = 0{,}056$. Ainsi **b)** est vraie.
c) $D \cap \overline{E}$ s'énonce : « la lentille a un défaut de diamètre et n'a pas de défaut d'épaisseur ».
D'après le diagramme : $P(D \cap \overline{E}) = \frac{13}{500} = 0{,}026$.
Ainsi **c)** est fausse.
Réponses exactes : a) et b).

2. a) Une lentille peut avoir 0, 1 ou 2 défauts donc X prend trois valeurs. Ainsi **a)** est fausse.
b) « X = 2 » signifie : « la lentille a deux défauts ».
Donc $P(X = 2) = \frac{5}{500} = 0{,}01$. Ainsi **b)** est vraie.
c) « X = 1 » signifie : « la lentille a un seul défaut ». D'après le diagramme :
$P(X = 1) = \frac{13 + 10}{500} = 0{,}046$.
Ainsi **c)** est vraie.
Réponses exactes : b) et c).

3. a) La loi de X est définie par :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,944	0,046	0,01

D'où $E(X) = 0{,}066$.

$E(500X - 33) = 500E(X) - 33$
$= 500 \times 0{,}066 - 33 = 0.$

Ainsi **a)** est vraie.

b) À la calculatrice, $\sigma(X) = 0{,}286$ (à 0,001 près) donc $\sigma(X) > 0{,}1$. Ainsi **b)** est fausse.

c) $V(500X) = 500^2\,V(X) = 250\,000\,V(X)$.
Ainsi **c)** est fausse.

Réponse exacte : a).

Chapitre 13

14 **a)** Une épreuve de Bernoulli a **deux** issues.

b) La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes définit un **schéma de Bernoulli.**

c) Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud vaut **1**.

d) On construit le triangle de Pascal en utilisant la relation $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

e) La probabilité d'obtenir k succès en n répétitions indépendantes d'une épreuve est $\boldsymbol{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$.

f) Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :
- $E(X) = \boldsymbol{np}$;
- $V(X) = \boldsymbol{np(1-p)}$.

15 **1. a)** Lors d'un lancer, la probabilité de succès «obtenir un multiple de 3» est $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. **Vrai.**

b) L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 3. Lors d'une épreuve, la probabilité de succès est $p = \frac{1}{3}$.
Si X est la variable aléatoire indiquant le nombre de succès lors des trois lancers, d'après la loi du nombre de succès :

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^k.$$

D'où $P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3}$
$= 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$. **Faux.**

c) De même, $P(X = 3) = \binom{3}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0$
$= \frac{1}{27}$. **Vrai.**

2. a) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1$
$= 8 = 2^3$. **Vrai.**

> **Note**
> La somme représente le nombre total de chemins possibles dans un arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli d'ordre 3. Il y en a 2^3.

b) Il suffit d'appliquer la règle $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ avec $n = 2011$ et $k = 2$. **Vrai.**

3. a) L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 5. L'épreuve associée est le lancer d'une pièce équilibrée et la probabilité de succès «obtenir Pile» est 0,5.
Si X est la variable aléatoire indiquant le nombre de Pile obtenus au terme des cinq lancers, d'après la loi du nombre de succès,
$P(X = k) = \binom{5}{k} 0{,}5^k (1 - 0{,}5)^{5-k}$.
Soit, $P(X = k) = \binom{5}{k} \times 0{,}5^5$.
Ainsi, $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}5^5 = 10 \times 0{,}5^5$
$= 0{,}3125$. **Vrai.**

b) De même,
$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}5^5 = 10 \times 0{,}5^5$
$= 0{,}3125$. **Faux.**

c) On note A l'événement «obtenir au moins un Pile». $\overline{A}$ signifie «n'obtenir aucun Pile» soit «X = 0».
Ainsi $P(\overline{A}) = P(X = 0) = \binom{5}{0} \times 0{,}5^5 = 0{,}03125$.
D'où $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}96875$. **Faux.**

16 **1.** L'univers associé à cette expérience contient $6^3 = 216$ issues équiprobables.

a) Faux. L'événement U est réalisé par le tirage :
- soit de 3 boules bleues (3^3 issues favorables) ;
- soit de 3 boules rouges (2^3 issues favorables) ;
- soit de 3 boules vertes (1^3 issues favorables).

D'où $P(U) = \frac{3^3 + 2^3 + 1^3}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$.

b) Faux. L'événement T est réalisé par le tirage d'une boule bleue (B), d'une rouge (R) et d'une verte (V). Ainsi, il y a six types de tirages favorables à T : BRV, BVR, RBV, RVB, VBR, VRB.
Pour chacun d'eux, il y a trois choix pour la boule bleue, deux pour la rouge et un seul pour la verte. Exemple :

BRV contient $3 \times 2 \times 1 = 6$ issues. Finalement, il existe $6 \times 6 = 36$ issues favorables à T.
D'où $P(T) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$.

c) Vrai. L'événement B est réalisé pour toutes les issues qui n'ont pas été encore dénombrées. Ainsi, il existe $216 - (36 + 36) = 144$ issues favorables à B.
D'où $P(B) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$.

Réponse exacte : c).

2. L'expérience est un schéma de Bernoulli d'ordre 3.
L'épreuve associée est le tirage d'une boule bleue et la probabilité de succès est $p = \frac{1}{2}$.
Si X est la variable aléatoire indiquant le nombre de boules bleues obtenues lors des trois tirages, d'après la loi du nombre de succès :
$P(X = k) = \binom{3}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-k}$,
soit $P(X = k) = \binom{3}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \times \binom{3}{k}$.
D'où $P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = \frac{3}{8}$, $P(X = 2) = \frac{3}{8}$, $P(X = 3) = \frac{1}{8}$.
De plus $E(X) = np$ avec $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$ donc $E(X) = \frac{3}{2}$.

Réponse exacte : c).

17 **1.** La situation peut être représentée par un tableau à double entrée qu'on complète.

Catégorie / Type	A	B	
R	**17 %**	19,6 %	36,6 %
S	**27 %**	**36,4 %**	**63,4 %**
	44 %	**56 %**	100 %

L'univers est l'ensemble des motards et toutes les issues sont équiprobables.
Par lecture du tableau :

a) Vrai. $P(A \cap R) = 0{,}366 - 0{,}196 = 0{,}17$.

b) Vrai. $P(A \cup R) = P(A) + P(R) - P(A \cap R)$.
$P(A \cup R) = 0{,}44 + 0{,}366 - 0{,}17 = 0{,}636$.

c) Vrai. $P(S) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}366 = 0{,}634$.

d) Vrai. $P(B \cup S) = P(B) + P(S) - P(B \cap S)$.
$P(B \cup S) = 0{,}56 + 0{,}634 - 0{,}364 = 0{,}83$.

Réponses exactes : a), b), c) et d).

2. L'interrogation des quatre motards définit un schéma de Bernoulli d'ordre 4. L'épreuve associée consiste à poser une question à un motard sur :
- la catégorie de sa moto [questions **a)** et **d)**] ;
- le type de sa moto [questions **b)** et **c)**].

a) Vrai. Lors d'une épreuve, la probabilité de succès («Moto de catégorie A») est ici $p_1 = 0{,}44$.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de motos de catégorie A. D'après la loi du nombre de succès :
$P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0{,}44^1 \times 0{,}56^3 = 0{,}309$.

b) Faux. Pour une épreuve, la probabilité de succès («Moto de type R») est $p_2 = 0{,}366$.
On peut raisonner directement au lieu d'utiliser la loi du nombre de succès. L'événement noté T correspond au seul chemin :

$$\xrightarrow{p_2} R \xrightarrow{p_2} R \xrightarrow{p_2} R \xrightarrow{p_2} R$$

d'où sa probabilité : $P(T) = p_2^{\,4} = 0{,}018$.

c) Vrai. Pour une épreuve, la probabilité de succès («Moto de type S») a pour probabilité $p_3 = 0{,}634$. Z est la variable aléatoire donnant le nombre de motos de type S.
D'où $P(Z = 2) = \binom{4}{2} \times 0{,}634^2 \times 0{,}366^2 = 0{,}323$.

d) Vrai. Pour une épreuve, la probabilité de succès («Moto de catégorie B») a pour probabilité $p_4 = 0{,}56$. On note M l'événement «au moins un a une moto de catégorie B».
$\overline{M}$ signifie «Nul n'a de moto de catégorie B».
Cet événement correspond au seul chemin :

$$\xrightarrow{1-p_4} \overline{B} \xrightarrow{1-p_4} \overline{B} \xrightarrow{1-p_4} \overline{B} \xrightarrow{1-p_4} \overline{B}$$

d'où sa probabilité : $P(\overline{M}) = (1 - p_4)^4$.
Donc $P(M) = 1 - P(\overline{M}) = 1 - (1 - p_4)^4$,
soit $P(M) = 1 - 0{,}44^4 = 0{,}963$.

Réponses exactes : a), c) et d).

Corrigés des exercices

Chapitre 1

44 **1. a)** $f(x) = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 5$.
$= -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] + 5$.
$= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}$.

b) Pour tout nombre x, $-2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant \frac{49}{8}$.

2. $f(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$.
$= -2\left(x - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4} - \frac{7}{4}\right)$.
$= -2(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$.

49 **a)** $2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9) = 2(x + 3)^2$ d'où $S = \{-3\}$.

b) $-4x + 2x^2 + 4 = 2(x^2 - 2x + 2)$
$= 2(x - 1)^2 + 1 > 0$ pour tout nombre x.
D'où $S = \emptyset$.

61 x_A et x_B vérifient l'équation $x^2 = 1{,}9x + 8{,}4$, soit $x^2 - 1{,}9x - 8{,}4 = 0$.
$\Delta = 1{,}92 + 4 \times 8{,}4 = 37{,}21 = 6{,}12$.
- x_A est la plus petite des deux racines donc :
$x_A = \frac{1{,}9 - 6{,}1}{2} = -2{,}1$ d'où $y_A = (-2{,}1)^2 = 4{,}41$ et $A(-2{,}1 ; 4{,}41)$.
- $x_B = \frac{1{,}9 + 6{,}1}{2} = 4$ d'où $y_B = 16$ et $B(4 ; 16)$.

75 **a)** $\Delta = 9$, les racines sont -2 et 1. a est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $\Delta = 12$, les racines sont $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ et $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$.
a est négatif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $\Delta = -8 < 0$ et a est positif donc, pour tout x, $f(x) > 0$.

d) $\Delta = 81$, les racines sont -5 et $-3{,}2$. a est positif, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		$-3{,}2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

79 Pour donner l'ensemble des solutions, vérifiez toujours si l'inégalité est large ou stricte : cela permet de décider s'il faut inclure les racines dans S.

a) Les racines sont $-\frac{3}{4}$ et 2. a est négatif ($a = -4$), donc $S = \left[-\frac{3}{4} ; 2\right]$ (le trinôme est du signe de $(-a)$ entre les racines).

b) Les racines sont $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$. a est positif, donc $S = \left]-\infty ; -\sqrt{6}\right[\cup \left]\sqrt{6} ; +\infty\right[$ (du signe de a à l'extérieur des racines).

c) $(3 + 2x)^2 - 16 = (3 + 2x + 4)(3 + 2x - 4)$
$= (2x + 7)(2x - 1)$.
Les racines sont $-\frac{7}{2}$ et $\frac{1}{2}$. a est positif, donc $S = \left]-\infty ; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ à l'extérieur des racines.

d) Les racines sont $-\frac{3}{2}$ et 0. a est positif ($a = 14$), donc $S = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup [0 ; +\infty[$ à l'extérieur des racines.

90 Notons x_1 et x_2 les deux nombres cherchés. $x_1 + x_2 = 12$ et $x_1 \times x_2 = -85$. S'ils existent x_1 et x_2 sont solutions de l'équation :

$$x^2 - 12x - 85 = 0.$$

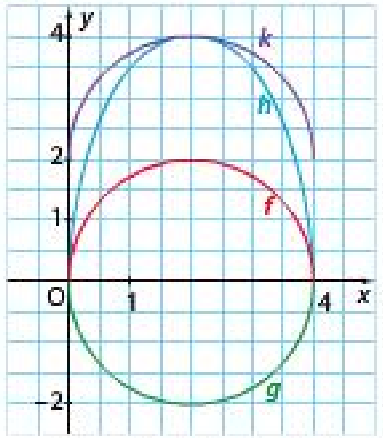
$\Delta = 484 = 22^2$. Les solutions du trinôme sont 17 et -5 : les nombres cherchés sont -5 et 17.

Chapitre 2

36 f a le même sens de variation que la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$: elle est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et si $5 \leqslant x \leqslant 41$, alors $f(5) \leqslant f(x) \leqslant f(41)$, soit $3 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

39 Sur un intervalle (par exemple $[0 ; +\infty[$), f et $\sqrt{f}$ ont même sens de variation et $\frac{1}{f}$ varie en sens contraire. La représentation de $\frac{1}{f}$ est donc la courbe «violette». $f(1) = 2$, donc la représentation de f est en rouge et celle de $\sqrt{f}$ en bleu.

43

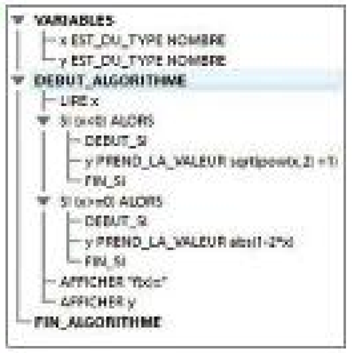


Pour vérifier avec la calculatrice, $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$.

51 $x \mapsto x^2 \mapsto x^2 + 3 \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$.

La fonction carré est strictement décroissante sur I. Il en est de même pour $x \mapsto x^2 + 3$ et pour f.
La fonction carré est strictement croissante sur J. Il en est de même pour $x \mapsto x^2 + 3$ et pour f.

65



```
▼ VARIABLES
│  ├─ x EST_DU_TYPE NOMBRE
│  └─ y EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
│  ├─ LIRE x
│  ▼ SI (x<0) ALORS
│  │  ├─ DEBUT_SI
│  │  ├─ y PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(x,2)+1)
│  │  └─ FIN_SI
│  ▼ SI (x>=0) ALORS
│  │  ├─ DEBUT_SI
│  │  ├─ y PREND_LA_VALEUR abs(1-2*x)
│  │  └─ FIN_SI
│  ├─ AFFICHER "f(x)="
│  └─ AFFICHER y
└─ FIN_ALGORITHME
```

67 **2.** On peut conjecturer que pour tout x positif, $x \leqslant \sqrt{x^2 + 1} \leqslant x + 1$.

3. Pour tout nombre x positif,
$x^2 \leqslant x^2 + 1 \leqslant x^2 + 2x + 1$ et la fonction racine carrée étant croissante sur $[0 ; +\infty[$,
$\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + 1} \leqslant \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ soit encore
$x \leqslant \sqrt{x^2 + 1} \leqslant x + 1$.

Chapitre 3

29 **a)** $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{(h - 3)^3 + 27}{h}$
$= \frac{h^3 - 9h^2 + 27h}{h}$
$= h^2 - 9h + 27$.

b) $\lim\limits_{h \to 0} (h^2 - 9h + 27) = 27$, donc $f'(0) = 27$.

32
- $f'(-2) = -4$, donc la tangente en A admet pour équation $y = -4(x + 2) + 5$, soit $y = -4x - 3$.
- $f'(3) = 0$, donc la tangente en B a pour équation $y = -2$.
- $f'(5) = 4$ et la tangente en C a pour équation $y = 4(x - 5) + 2$, soit $y = 4x - 18$.

40 Les abscisses des points communs sont solutions de :

1. $2x^2 - 5x - 3 = x + p$ soit
$2x^2 - 6x - 3 - p = 0$
$\Delta = 36 + 8(3 + p) = 60 + 8p$.
Il existe un seul point commun si $\Delta = 0$ soit :

$$p = -\frac{60}{8} = -\frac{15}{2} \text{ et } x = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

2. Le point commun a pour coordonnées :

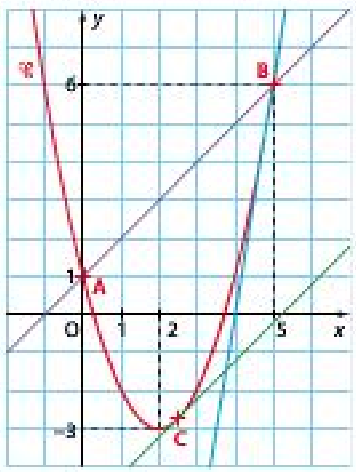
$$\left(\frac{3}{2} ; -6\right).$$

La tangente à $\mathcal{P}$ en ce point a pour équation :

$$y = 1\left(x - \frac{3}{2}\right) - 6 \text{ soit } y = x - \frac{15}{2}.$$

Donc la tangente est la droite d.

45



1. $f'(x_B) = 6$.
Soit $2x_B - 4 = 6$
$2x_B = 10$ et $x_B = 5$ donc $B(5 ; 6)$.

2. La droite (AB) a pour coefficient directeur 1, donc $f'(x) = 1$ soit $2x - 4 = 1$ et $x = \frac{5}{2}$. Ainsi C a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2} ; -\frac{11}{4}\right)$.

49 **1.** $B \in \mathscr{C}$ équivaut à $f(1) = 3$.
La droite d a pour coefficient directeur 1, qui équivaut à $f'(1) = 1$.

2. $f(1) = 3$ équivaut à $a + b = 3$.
$f'(1) = 1$ équivaut à $2a + b = 1$.
Donc $a = -2$, $b = 5$ et $f(x) = -2x^2 + 5x$.

Chapitre 4

36 La fonction f est définie et dérivable sur $x \in]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[$.
f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 3$ et $v(x) = 4 - x$.
Donc $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = -1$.
Ainsi, $f'(x) = \frac{(2x-2)(4-x) + (x^2 - 2x + 3)}{(4-x)^2}$.
Il en résulte que :

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 8x - 5}{(4-x)^2}.$$

43 **1.** $g'(x) = x^2 + 5x$.

2. $x^2 + 5x = x(x+5) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = -5$.
Ainsi, la courbe représentative admet deux tangentes horizontales aux points $A(0 ; -8)$ et $B\left(-5 ; \frac{77}{6}\right)$.

47 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$.
$f'(x) = 0$ équivaut à $3x^2 + 4x + 3 = 0$.
$\Delta = 16 - 36 < 0$ dont $f'(x)$ ne s'annule pas et $\mathscr{C}$ n'admet pas de tangente horizontale.

2. Dire que $\mathscr{C}$ admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 5$ équivaut à dire que $f'(x) = 3$, soit $3x^2 + 4x + 3 = 3$ ou $x(3x + 4) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$.
Les tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 5$ en $A(0 ; 1)$ et $B\left(-\frac{4}{3} ; -\frac{49}{27}\right)$.

51 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 4$ donc T a pour équation $y = 4(x - 1) + 1$, soit $y = 4x - 3$.

2. a) $g(x) = x^3 + x^2 - x - 4x + 3 = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
$g'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(3x + 5)$.
b)

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-$ ↗	0 ↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗	

c) Il en résulte que $g(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-3 ; +\infty[$ et que $g(x) \leqslant 0$ pour $x \in]-\infty ; -3[$.
Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T pour $x \in]-3 ; +\infty[$.

61 Le tableau de variation de f se présente ainsi :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	1	↘	0

Donc la fonction dérivée est représentée par la courbe (1).

64 **1.** $f'(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

x	-3		-1		0		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0		$-$		0		$+$	
$f(x)$	-4	↗	$\frac{8}{3}$	↘			$\frac{4}{3}$	↗		

2. Si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$.
Si $x \in \left[\frac{4}{3} ; 8\right]$, alors $f(x) \in \left[8 ; \frac{4}{3}\right]$.
Si $x \in [-3 ; 0]$, alors $f(x) \in \left[-4 ; \frac{8}{3}\right]$.
Si $x \in [-3 ; 3]$, alors $f(x) \in [-4 ; 8]$.

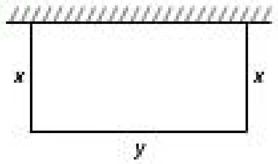
69 **1.** $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$.
$f'(x) = 4x(x - 2)(x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		0	1		2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		0	$+$	
$f(x)$	↘		-14	↗	2	-5	↘	-14	11	↗

2. f admet un minimum -14 pour $x = -2$ et pour $x = 2$, un minimum local 2 en 0.

3. a) Si $x \in [-2 ; 1]$, alors $f(x) \in [-14 ; 2]$.
b) Si $x \in [0 ; 3]$, alors $f(x) \in [-14 ; 11]$.
c) Si $x \in [-2 ; 2]$, alors $f(x) \in [-14 ; 2]$.

73



On a $2x + y = 40$.
L'aire est égale à xy, soit $x(40 - 2x)$, donc $\mathscr{A}(x) = 40x - 2x^2$.
$\mathscr{A}'(x) = 40 - 4x = 4(10 - x)$.

D'où le tableau suivant.

x	0		10		40
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$		↗	200	↘	

Donc l'aire est maximale lorsque $x = 10$ et $y = 40 - 20 = 20$.
La longueur est donc égale au double de la largeur.

80 **1. a)** $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$.
b)

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	

2. a) M a pour coordonnées $(x ; 1 - x^2)$, donc $OM^2 = x^2 + (1 - x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1 = f(x)$.
b) Les points les plus près de O sont :

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{1}{2}\right).$$

Chapitre 5

50 **a)** $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ définie sur $]-1 ; +\infty[$.

$$u_1 = \frac{10}{5+1} = \frac{5}{3} ; \qquad u_2 = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}+1} = \frac{5}{4} ;$$

$$u_3 = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{5}{4}+1} = \frac{10}{9} ; \qquad u_4 = \frac{\frac{20}{9}}{\frac{10}{9}+1} = \frac{20}{19} ;$$

$$u_5 = \frac{\frac{40}{19}}{\frac{20}{19}+1} = \frac{40}{39}.$$

b) $f(x) = (x + 1)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
$u_1 = (-1 + 1)^2 = 0$; $u_2 = (0 + 1)^2 = 1$;
$u_3 = (1 + 1)^2 = 4$; $u_4 = (4 + 1)^2 = 25$;
$u_5 = (25 + 1)^2 = 676$.

54 $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{8}$; $u_4 = \frac{1}{16}$; $u_5 = \frac{1}{32}$.
On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{2^n}$.
$u_0 = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$ et pour tout n,
$u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times u_n$.

63 **a)** Pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{5} - \frac{2n+1}{5} = \frac{2}{5}$.
La suite (u_n) est arithmétique de raison $\frac{2}{5}$.
b) $u_1 = 0$; $u_2 = 1$; $u_3 = \sqrt{2}$.
$u_2 - u_1 = 1 \neq u_3 - u_2 = \sqrt{2} - 1$.
La suite (u_n) n'est pas arithmétique.

70 $u_2 = u_3 - r$ et $u_4 = u_3 + r$,
donc $u_2 + u_3 + u_4 = 3u_3 = 36$, et $u_3 = 12$.
$u_9 - u_3 = (9 - 3)r$, soit $48 - 12 = 6r$ et donc $r = 6$.
$u_3 = u_0 + 3r$, soit $12 = u_0 + 18$ et $u_0 = -6$.

86 $u_3 = u_0 \times q^3 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}$.
$u_{10} = u_0 \times q^{10} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = 2 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$.

98 **a)** $54 - 15 + 1 = 40$.
b) Les nombres pairs de l'intervalle I sont 8×2, 9×2, …, 27×2 et sont au nombre de : $27 - 8 + 1 = 20$ (ou $54 - 16 = 38$ donc 19 intervalles de longueur 2 soit 20 nombres pairs).

106 $u_{17} = u_1 + (17 - 1)r$ soit $105 = u_1 + 16 \times (-2)$ et $u_1 = 137$.

$$S_{17} = 17 \times \frac{u_1 + u_{17}}{2} = 17 \times \frac{137 + 105}{2} = 17 \times 121 = 2057.$$

Chapitre 6

40 **1.** $u_0 = -20$, $u_1 = -28$, $u_2 = -34$, $u_3 = -38$, $u_4 = -40$: on peut penser à la lecture des premiers termes que la suite est strictement décroissante.

2. a) $n > 4$.
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 9(n+1) - 20 - n^2 + 9n + 20 = 2n - 8 = 2(n - 4)$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ dès que $n > 4$ soit $n \geqslant 5$. La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 5.
b) La fonction trinôme f admet un minimum pour $x = \frac{9}{2}$ $\left(\text{car } -\frac{b}{2a} = \frac{9}{2}\right)$ et est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{9}{2} ; +\infty\right[$ donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 5.

57 $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$. f est dérivable et $f'(x) = \frac{2}{x^3} > 0$.
f est donc strictement croissante sur I et la suite (u_n) est strictement croissante.
Pour tout entier naturel n, $5 - \frac{1}{n^2} < 5$ soit $u_n < 5$, et la suite (u_n) étant croissante :

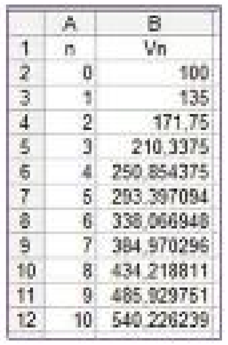
$$u_n \geqslant u_1, \text{ soit } u_n \geqslant 4.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \in [4 ; 5[$.

62 Une augmentation de 10% se traduit par une multiplication par 1,10.
$1{,}1^7 = 1{,}94$ et $1{,}1^8 = 2{,}14$, elle double en 8 ans.
$1{,}1^{24} = 9{,}85$ et $1{,}1^{25} = 10{,}83$: en 25 ans la population peut être multipliée par 10.

64 **1. a)** $u_5 = u_0 \times 1{,}05^5 = 510{,}51$ € soit $u_0 = 400$ €.
b) $u_n \geqslant 2u_0$ équivaut à $1{,}05^n \geqslant 2$.
$1{,}05^{14} = 1{,}98$ et $1{,}05^{15} = 2{,}08$, le capital est doublé en 15 ans.

2. a) La multiplication par 1,05 correspond au capital augmenté des intérêts.
b) $v_5 = 293{,}39$, donc en janvier 2015 son capital sera de 293,39 €.
c) Son capital dépassera 500 € en 2020.



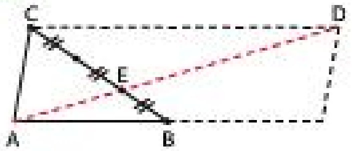
	A	B
1	n	Vn
2	0	100
3	1	135
4	2	171.75
5	3	210.3375
6	4	250.854375
7	5	293.397094
8	6	338.066948
9	7	384.970296
10	8	434.218811
11	9	485.929751
12	10	540.226239

Chapitre 7

48 **1.** $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{w}$ équivaut à $\frac{1}{2} \times 3 - y(-1) = 0$, soit $y = -\frac{3}{2}$.
$\vec{v}$ colinéaire à $\vec{w}$ équivaut à $x \times 3 - \frac{3}{4} \times (-1) = 0$, soit $x = -\frac{1}{4}$.
2. $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{3}{4}\right)$, donc $\vec{u} = -2\vec{v}$ soit $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

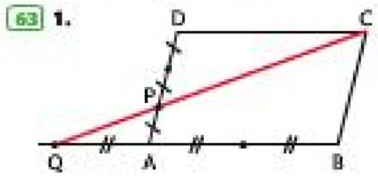
53 **1.** I a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{7}{2}\right)$ et $J\left(\frac{19}{2} ; 1\right)$.
$\overrightarrow{DM}$ a pour coordonnées $(x - 7 ; y - 6)$ et $\overrightarrow{DB}(-5 ; 0)$.
$5\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}$ équivaut à $5x - 35 = -5$ et $5y - 30 = 0$, d'où $M(6 ; 6)$.
De même, $\overrightarrow{CN}(x - 12 ; y + 4)$ et $\overrightarrow{CA}(-15 ; 5)$ donc : $5x - 60 = -15$ et $5y + 20 = 5$, d'où $N(9 ; -3)$.
2. K, milieu de [MN], a pour coordonnées $\left(\frac{15}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.
$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(10 ; -\frac{5}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IK}(8 ; -2)$.
$10 \times (-2) - \left(-\frac{5}{2}\right) \times 8 = 0$ donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et par suite les points I, J, K sont alignés.

60 **1.**



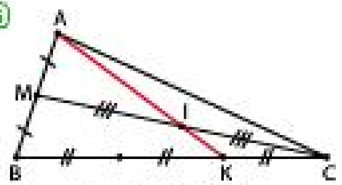
2. a) $3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$,
soit $3\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b) $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et les points A, D, E sont alignés.

63 **1.**



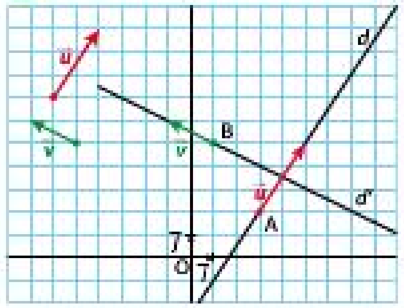
2. a) $Q(1 ; 0)$, $P(0 ; 1)$, $B(-2 ; 0)$, $D(0 ; 3)$ et $C(-2 ; 3)$.
b) $\overrightarrow{CP}(2 ; -2)$ et $\overrightarrow{CQ}(3 ; -3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ sont colinéaires donc C, P, Q sont trois points alignés.

66



Choisissons le repère $(C, \overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CI})$.
$K(1 ; 0)$, $I(0 ; 1)$, $M(0 ; 2)$ et $B(3 ; 0)$.
De plus $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$ et $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$,
donc $x_A = -3$ et $y_A = 4$.
$\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $(4 ; -4)$ et $\overrightarrow{AI}(3 ; -3)$.
Donc $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et les points A, I, K sont alignés.

72 **1. a)**



b) d passe par $A(3 ; 2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2 ; 3)$. d' passe par $B(1 ; 5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; 1)$.
d a une équation de la forme $3x - 2y + c = 0$.
$A(3 ; 2) \in d$ donc $9 - 4 + c = 0$ soit $c = -5$, donc d a pour équation $3x - 2y - 5 = 0$.
De même, d' a une équation de la forme $x + 2y + c = 0$.
$B(1 ; 5) \in d'$ donc $1 + 10 + c = 0$ et $c = -11$.
d' a donc pour équation $x + 2y - 11 = 0$.

2. Les coordonnées $(x ; y)$ du point M commun à d et d' vérifient :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 4x - 16 = 0 \\ y = \frac{3x - 5}{2} \end{cases}$$

Donc $x = 4$ et $y = \frac{7}{2}$. **Conclusion :** M a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{7}{2}\right)$.

77 Les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles. Les coordonnées $(x ; y)$ de leur point d'intersection M vérifient le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 11x = 22 \\ y = \frac{3x - 8}{2} \end{cases}$$

soit $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Les droites d_1, d_2 et Δ sont concourantes si et seulement si M est un point de Δ, soit :
$4m - (m + 1)(-1) - 8 = 0$ soit $5m = 7$, donc $m = \frac{7}{5}$.

85 $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3\,;-7)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc un vecteur directeur de Δ. Ainsi Δ a une équation de la forme $-7x-3y+c=0$.
Or $C(3\,;2)\in\Delta$ donc $-21-6+c=0$ et $c=27$.
Ainsi Δ a pour équation $7x+3y-27=0$.

Chapitre 8

34 Notons β la mesure principale.

1. a) $\alpha=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}$ donc $\beta=-\frac{\pi}{2}$.

b) $\alpha=-\frac{6\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=-2\pi+\frac{\pi}{3}$ donc $\beta=\frac{\pi}{3}$.

c) $\alpha=\frac{36\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=6\pi+\frac{\pi}{6}$ donc $\beta=\frac{\pi}{6}$.

2. a) $\alpha=\frac{24\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=6\pi+\frac{\pi}{4}$ donc $\beta=\frac{\pi}{4}$.

b) $\alpha=\frac{204\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=68\pi+\frac{\pi}{3}$ donc $\beta=\frac{\pi}{3}$.

c) $\alpha=-\frac{112\pi}{7}-\frac{5\pi}{7}=-16\pi-\frac{5\pi}{7}$ donc $\beta=-\frac{5\pi}{7}$.

39 • Le triangle DOA est isocèle en O et $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)=\frac{\pi}{3}$.
Donc DOA est équilatéral.
On en déduit que :

$$\widehat{AOB}=\frac{2\pi}{3}\text{ et }\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

• $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DA}\right)+\pi$
$=-\frac{\pi}{3}+\pi$
soit $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

44 **1. a)** O, A et M sont alignés ; $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de même sens ; OA = 1 et OM = r.
Donc $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{OA}$ (1).
b) A est un point de $\mathscr{C}$ donc A a pour coordonnées $(\cos\theta\,;\sin\theta)$.

2. D'après (1), M a pour coordonnées :
$(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$.

48 **1.** $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)$;
or $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\pi$, d'où le résultat.
2. $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{12\pi-4\pi+3\pi}{12}$
soit $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{11\pi}{12}\in]-\pi\,;\pi]$.
Donc la mesure principale est $\frac{11\pi}{12}$.

51 $S=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$
$S=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right)$
$S=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right)=0$.

54 $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DE}\right)$.
$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\pi$;
$\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\pi$;
$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DE}\right)=-\frac{\pi}{2}$.
Donc $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)-\frac{\pi}{2}$
$=-\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{-9\pi-8\pi-6\pi}{12}$
$=-\frac{23\pi}{12}=-2\pi+\frac{\pi}{12}$.
Donc $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{12}$.

62 $A=\sin x+\sin x+\cos x-\cos x=2\sin x$.
$B=\sin x-\cos x-\sin x+\cos x=0$.
$C=-\sin x-\sin x-\cos x+\cos x=-2\sin x$.

66 **1.** $\cos\frac{\pi}{12}$ est le nombre A tel que :

$$A^2+\sin^2\frac{\pi}{12}=1\text{ et }A>0.$$

$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$ et $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{8-4\sqrt{3}}{16}$.
Ainsi : $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$.
D'où le résultat.

2. a) $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$
donc $\cos\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
et $\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
b) $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{7\pi}{12}=-\cos\frac{5\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
et $\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
c) $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$ donc $\cos\frac{11\pi}{12}=-\cos\frac{\pi}{12}$
$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

69 **a)** $\sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc :

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{7\pi}{6}+2K\pi.\end{cases}$$

b) $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$ donc :

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi.\end{cases}$$

c) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}$ donc :

$$\begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi.\end{cases}$$

d) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ donc :

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi.\end{cases}$$

Chapitre 9

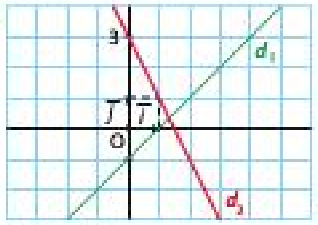
43 **1.** $B\left(3\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right);3\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
soit $B\left(-\frac{3}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. a) $\overrightarrow{OA}(0\,;2)$ donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3\sqrt{3}$.
b) $K(-3\,;0)$; $\overrightarrow{BK}\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\overrightarrow{BA}\left(\frac{3}{2};2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
Donc $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}=-\frac{9}{4}+3\sqrt{3}+\frac{27}{4}=\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$.
c) $I(2\,;0)$; $\overrightarrow{IA}(-2\,;2)$. Donc $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{OB}=3-3\sqrt{3}$.

47 **1.** $A(4\,;1)$; $B(0\,;5)$; $C(-2\,;-1)$.
Donc $\overrightarrow{CA}(6\,;2)$ et $\overrightarrow{CB}(2\,;6)$.
$CA=CB=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.
Le triangle ABC est isocèle en C.
2. a) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=12+12=24$.
b) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos(\widehat{ACB})=40\cos(\widehat{ACB})$.
c) $\cos(\widehat{ACB})=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$.
3. À un degré près, $\widehat{ACB}$ a pour mesure 53°.

52 **1. a)** $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
$=4+9-8=5$.
b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{5}$.
2. $\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)^2=4\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}=16+9+16=41$
donc $\|2\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{41}$.

60 **1. a)** $CI^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$ (Pythagore dans ICD triangle rectangle) ; $CI=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
$CA^2=2a^2$; $CA=a\sqrt{2}$.
b) $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA}=CI\times CA\times\cos\theta=\frac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos\theta$.
2. a) $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
b) $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$
$=a\times a\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times a\times a\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$
$=a^2+\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2$.
3. $\cos\theta=(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA})\times\frac{2}{a^2\sqrt{10}}=\frac{3a^2}{2}\times\frac{2}{a^2\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$.
Donc cos θ est indépendant de a.

62

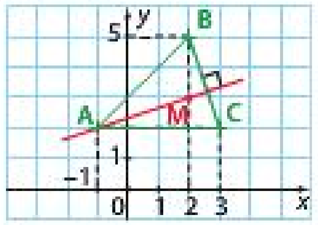


1. $\vec{u_1}(1\,;1)$ et $\vec{u_2}(-1\,;2)$
$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=-1+2=1$.
$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)$.
2. Donc $\cos\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}$.
Il en résulte que α = 71°6.

66 **1. a)** $A(5\,;4)$; $B(6\,;-3)$; $C(-3\,;0)$.
$\overrightarrow{AB}(1\,;-7)$; $\overrightarrow{AC}(-8\,;-4)$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-8+28=20$.
b) $AC=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=4\sqrt{5}$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=AC\times AH=20$.
Donc $AH=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AC}=\frac{20}{4\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.
2. a) $BH^2=AB^2-AH^2=50-5=45$; $BH=3\sqrt{5}$.
b) $\text{Aire}(ABC)=\frac{1}{2}AC\times BH=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=30$.

---

74 **1. a) et b)**

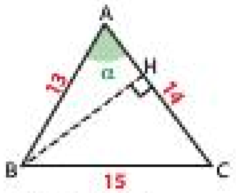


2. a) $\overrightarrow{BC}(1\,;-3)$ donc (AM) a une équation de la forme $x-3y+c=0$. $A(-1\,;2)\in(AM)$ donc $c=7$. (AM) a pour équation $x-3y+7=0$.
b) M a pour abscisse 2 donc son ordonnée est 3. M a pour coordonnées $(2\,;3)$.

77 Δ est perpendiculaire à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Δ. $\overrightarrow{AB}(-5\,;3)$ donc Δ a une équation de la forme $-5x+3y+c=0$.
$B(-3\,;6)$ appartient à Δ donc $15+18+c=0$ soit $c=-33$.
Δ a pour équation : $-5x+3y-33=0$.

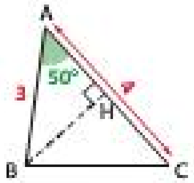
Chapitre 10

52



1. $\cos\alpha=\frac{169+196-225}{2\times13\times14}$,
soit $\cos\alpha=\frac{140}{2\times13\times14}=\frac{5}{13}$.
$(\sin\alpha)^2=1-(\cos\alpha)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$.
Or $\sin\alpha>0$, donc $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.
2. $BH=AB\sin\alpha=13\times\frac{12}{13}=12$.
$AH=AB\cos\alpha=13\times\frac{5}{13}=5$,
donc $HC=14-5=9$.

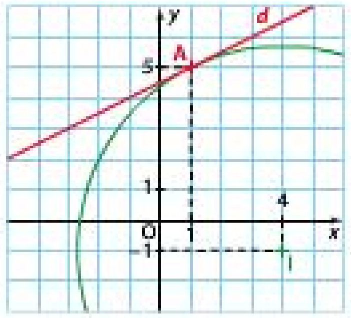
57



$BC^2=9+16-24\cos50°$
$=25-24\cos50°$.
$BC\approx3{,}1$.
Donc si p est le périmètre, $p\approx10{,}1$.
$\text{Aire}(ABC)=\frac{1}{2}AC\times BH=\frac{1}{2}AC\times AB\sin50°$,
soit $\text{aire}(ABC)=2\times3\sin\alpha=6\sin50°$.
$\text{Aire}(ABC)\approx4{,}6$.

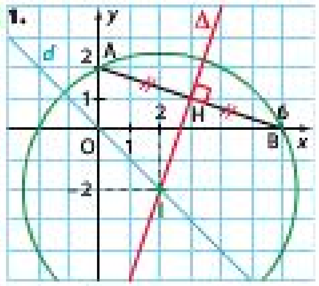
61 **1. a)** $\widehat{ADB}=180°-(40°+85°)=55°$.
b) $\frac{AD}{\sin40°}=\frac{DB}{\sin85°}=\frac{400}{\sin55°}$.
Il en résulte que $AD\approx313{,}9$ m et $DB\approx486{,}5$ m.
2. a) $\widehat{ACB}=180°-(45°+85°)=50°$.
$\frac{CB}{\sin45°}=\frac{400}{\sin50°}$, soit $CB\approx369{,}2$ m.
b) $DC^2=CB^2+BD^2-2CB\times BD\cos45°$,
soit $DC\approx345$ m.
c) Donc $\ell=AD+DC+CB$. Soit $\ell\approx1\,028$ m.

66



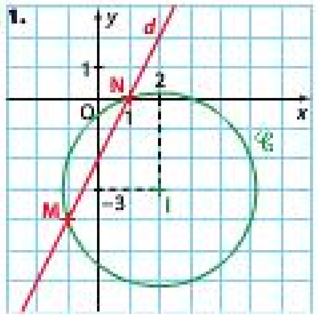
Si $x=1$, $y=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$, donc $A\in d$. $\overrightarrow{AI}(3\,;-6)$.
$\vec{u}\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$ est un vecteur directeur de d. De plus, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AI}=0$, donc d est perpendiculaire à (AI).
Il en résulte que d est tangente en A à $\mathscr{C}$.

67 **1.**



d a pour équation $y=-x$.
$\overrightarrow{AB}(6\,;-2)$ et $\vec{u}(3\,;-1)$, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, est un vecteur normal de Δ, médiatrice de [AB]. De plus, le point H, milieu de [AB], de coordonnées $(3\,;1)$ est un point de Δ.
Δ a une équation de la forme $3x-y+c=0$.
$H\in\Delta$, donc $9-1+c=0$, $c=-8$, donc Δ a pour équation $3x-y-8=0$.
Le centre I est un point de d et de Δ.
$y=-x$ et $3x-y-8=0$, soit $x=2$ et $y=-2$.
2. $\mathscr{C}$ a pour rayon AI. $\overrightarrow{AI}(2\,;-4)$.
$AI^2=4+16=20$, donc $\mathscr{C}$ a pour équation $(x-2)^2+(y+2)^2=20$.

77 **1.**

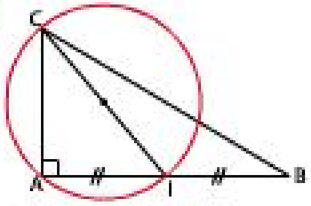


2. $\begin{cases}y=2x-2\\x^2+y^2-4x+6y+3=0\end{cases}$ équivaut à :

$$\begin{cases}y=2x-2\\x^2+4x^2-8x+4-4x+12x-12+3=0\end{cases}$$

soit $\begin{cases}y=2x-2\\5x^2-5=0.\end{cases}$
c) $x=1$ ou $x=-1$, soit $M(-1\,;-4)$ et $N(1\,;0)$.

81



1. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$.
Or $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, donc $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
$M\in(L)\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MC}=0$.
b) L est donc le cercle de diamètre [IC] passant par A.

89 **a)** $\sin(a+x)\cos(a-x)+\sin(a-x)\cos(a+x)=\sin(a+x+a-x)=\sin2a$.
b) $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.
Donc :
$\sin(a+b)\sin(a-b)$
$=(\sin a\cos b)^2-(\sin b\cos a)^2$
$=\sin^2a\cos^2b-\sin^2b\cos^2a$
$=\sin^2a\,(1-\sin^2b)-\sin^2b\,(1-\sin^2a)$
$=\sin^2a-\sin^2b$.

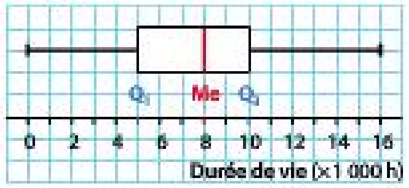
91 **1.** $\sin\frac{\widehat{C}}{2}=\frac{AH}{AC}=\frac{3}{4}$.
2. $\cos C=1-2\left(\sin\frac{\widehat{C}}{2}\right)^2=1-2\times\frac{9}{16}=-\frac{1}{8}$.
$\widehat{C}\approx97°$.

94 $(\sin a)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$
$\sin a>0$ donc $\sin a=\frac{3}{5}$.
$(\sin b)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$
$\sin b>0$ donc $\sin b=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
2. $\cos2a=2(\cos a)^2-1=\frac{32}{25}-1=\frac{7}{25}$
$\sin2a=2\cos a\sin a=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$
donc
$\cos(2a+b)=\cos2a\cos b-\sin2a\sin b$
$=\frac{7}{25}\times\frac{1}{3}-\frac{24}{25}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{7-48\sqrt{2}}{75}$
$\sin(2a+b)=\sin2a\cos b+\cos2a\sin b$
$=\frac{24}{25}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{25}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{24+14\sqrt{2}}{75}$.

Chapitre 11

4 **1.** Par lecture graphique, on constate que :
- 75 % des ampoules ont une durée de vie qui dépasse 5 milliers d'heures, donc $Q_1\approx5$;
- 50 % des ampoules ont une durée de vie qui dépasse 8,1 milliers d'heures, donc $Me\approx8{,}1$;
- 25 % des ampoules ont une durée de vie qui dépasse 9,9 milliers d'heures, donc $Q_3\approx9{,}9$.

2. Diagramme en boîte :



3. Voici deux présentations possibles, l'une à partir de Q_1, l'autre à partir de Me :

- trois quarts de nos ampoules ont une durée de vie qui dépasse 5 000 heures ;
- plus de la moitié de nos ampoules ont une durée de vie qui dépasse 8 000 heures.

10 **1.** À la calculatrice, on obtient les résultats suivants :

- classe A : $\overline{x_A} = 12{,}9$; $s_A = 4{,}03$;
- classe B : $\overline{x_B} = 13{,}5$; $s_B = 3{,}67$.

2. Pour la classe A :

$[\overline{x_A} - s_A ; \overline{x_A} + s_A] = [8{,}87 ; 16{,}93]$.

Proportion de notes dans cet intervalle :

$p_A = \dfrac{17}{33} = 0{,}515$, soit $p_A = 51{,}5\ \%$.

Pour la classe B :

$[\overline{x_B} - s_B ; \overline{x_B} + s_B] = [9{,}83 ; 17{,}17]$.

Proportion de notes dans cet intervalle :

$p_B = \dfrac{20}{29} = 0{,}690$, soit $p_B = 69\ \%$.

3. Au vu des résultats, la classe B est meilleure : la moyenne est plus élevée et la dispersion autour de la moyenne est bien moindre que dans la classe A.

29 **1.** Les dix premiers nombres impairs, 1, 3, …, 19, sont du type $2k + 1$ avec k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 9$.

D'où la moyenne : $\overline{x} = \dfrac{\sum_{k=0}^{9} (2k+1)}{10}$.

Or $\sum_{k=0}^{9} (2k+1) = 100$, donc $\overline{x} = 10$.

Note

Le calcul de la somme peut se faire en remarquant qu'il s'agit de la somme de 10 termes successifs d'une suite arithmétique de raison r = 2 (voir le chapitre 5).

2. La variance s'écrit : $V = \dfrac{\sum_{k=0}^{9} (2k+1-10)^2}{10}$.

Or $\sum_{k=0}^{9} (2k-9)^2 = 330$, donc $V = 33$.

3. X' est la suite des nombres pairs : 2, 4, …, 20.

Ces valeurs sont du type $x'_i = 2i$ avec i entier tel que $1 \leqslant i \leqslant 10$.

D'où la moyenne : $\overline{x'} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} (2i)}{10}$.

Or $\sum_{i=1}^{10} (2i) = 110$, donc $\overline{x'} = 11$.

La variance s'écrit : $V' = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} (2i-11)^2}{10}$.

Or $\sum_{i=1}^{10} (2i-11)^2 = 330$, donc $V' = 33$.

Note

On passe de la 1re série à la 2^{e} en augmentant les valeurs de 1 donc la moyenne a aussi augmenté de 1. En revanche, pour chaque série, les écarts à la moyenne sont inchangés donc les variances sont les mêmes.

33 **1.** On note S_A le salaire moyen dans l'entreprise A.

$S_A = \dfrac{\text{masse des salaires}}{\text{effectif total}}$,

d'où $S_A = \dfrac{5 \times 2760 + 20 \times 1680}{25} = 1\,896$ €.

2. a) On note S_B le salaire moyen dans l'entreprise B. $S_B = S_A - 36 = 1\,860$ €.

On note x le nombre de techniciens.

La répartition des salaires est illustrée par le tableau :

	Techniciens	Ouvriers
Personnel	x	$42 - x$
Salaire moyen en €	2 760	1 680

S_B s'exprime en fonction de x, d'où la mise en équation :

$$\frac{2760x + 1\,680(42 - x)}{42} = 1\,860 \text{ €}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } 2760x + 70\,560 - 1\,680x &= 78\,120 \\ 1\,080x &= 7\,560 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

L'entreprise B emploie 7 techniciens et 35 ouvriers.

b) La fréquence de la catégorie « technicien » est :

- chez A, de $\dfrac{5}{25} = 0{,}20$ soit 20 % ;
- chez B, de $\dfrac{7}{42} = 0{,}167$ soit environ 16,7 %.

La fréquence dans l'entreprise B est plus faible que dans l'entreprise A. Ce résultat était prévisible : le salaire moyen, plus bas chez B, permet de conjecturer que la proportion de techniciens est plus faible chez B que chez A. C'est un « effet de structure ».

36 **1.** Par lecture graphique :

$\text{Me} = 13$, $Q_1 = 3$, $Q_3 = 24$.

2. a) Tableau des fréquences :

Âge (en année)	[0 ; 5[	[5 ; 15[	[15 ; 20[
Fréquence (en %)	39	14	15

Âge (en année)	[20 ; 25[	[25 ; 50[	[50 ; 100[
Fréquence (en %)	8	11	13

b) On affecte la fréquence au centre de chaque classe. D'où des estimations de la moyenne et de l'écart-type à l'aide de la calculatrice : $\overline{x} = 20{,}7$ et $s = 23{,}7$.

3. L'âge moyen et l'écart-type ne sont pas des indicateurs pertinents :

- 68 % des cas sont déclarés avant 20 ans alors que l'âge moyen est 20,7 ans ;
- L'écart-type, traduit une dispersion très importante par rapport à la moyenne, mais n'indique pas d'où elle provient.

Les quartiles et la médiane donnent une meilleure image de la répartition :

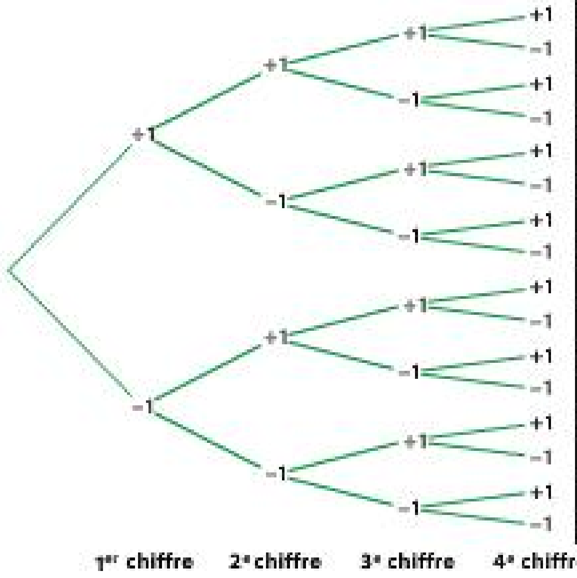
- 25 % des cas sont déclarés sur des enfants de moins de 3 ans ;
- la moitié des cas sont déclarés avant 13 ans ;
- les trois quarts des cas ont lieu avant 24 ans.

Note

Une étude plus fine semble cependant nécessaire pour la population des jeunes.

Chapitre 12

29 **1.** Réalisons un arbre. Toutes les issues représentées sont équiprobables.



Somme	Produit
4	1
2	−1
2	−1
0	1
2	−1
0	1
0	1
−2	−1
2	−1
0	1
0	1
−2	−1
0	1
−2	−1
−2	−1
−4	1

2. a) A : « la somme est nulle ».

$P(A) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.

b) B : « le produit vaut 1 ».

$P(B) = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

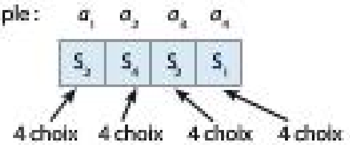
c) C : « la suite est alternée ».

$P(C) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

35 **1.** On désigne les quatre amis par a_1, a_2, a_3 et a_4 et les salles de cinéma par S_1, S_2, S_3 et S_4.

Une répartition peut être symbolisée par un quadruplet formé à partir de S_1, S_2, S_3, S_4.

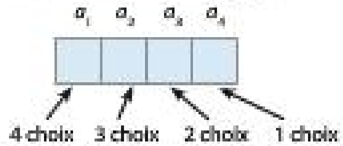
Exemple :



Il y a quatre choix possibles pour chacun des quatre amis d'où le nombre de répartitions $N = 4^4$.

2. Toutes les issues sont équiprobables.

- Une issue favorable à A est du type :



A contient $4 \times 3 \times 2 \times 1$ issues favorables.

Donc $P(A) = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4^4} = \dfrac{3}{32}$.

- B contient 4 issues favorables.

Donc $P(B) = \dfrac{4}{4^4} = \dfrac{1}{64}$.

- C est l'événement contraire de A : $C = \overline{A}$.

Donc $P(C) = 1 - P(A)$ soit $P(C) = \dfrac{29}{32}$.

43 **1.** Une issue est symbolisée par un couple de deux boules distinctes.

Le nombre d'issues possibles est :

$N = 5 \times 4 = 20$.

Toutes ces issues sont équiprobables.

a) « X = 0 » signifie : « tirage de deux boules rouges ». D'où $P(X = 0) = \dfrac{3 \times 2}{20} = 0{,}3$.

b) Un tirage ne peut comporter que 0, 1 ou 2 boules vertes donc X prend les valeurs 0, 1, 2.

- « X = 1 » signifie : « tirage d'une boule verte et d'une boule rouge ». Un tirage favorable est alors :

soit RV (3 × 2 possibilités), soit VR (2 × 3 possibilités).

Donc $P(X = 1) = \dfrac{3 \times 2 + 2 \times 3}{20} = 0{,}6$.

- « X = 2 » signifie : « tirage de deux boules vertes ».

Donc $P(X = 2) = \dfrac{2 \times 1}{20} = 0{,}1$.

D'où la loi de X :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

2. $E(X) = 0{,}3 \times 0 + 0{,}6 \times 1 + 0{,}1 \times 2 = 0{,}8$.

Sur un grand nombre de tirages, le nombre moyen de boules vertes est 0,8.

Il y a moins de boules vertes que de boules rouges donc il était prévisible que ce résultat soit inférieur à 1.

46 **1.** X prend les valeurs : 7, 11, 13, 20, 32.

2. a) Un tableau permet de dénombrer les participants des différentes catégories. On le remplit avec les données (en noir) puis on complète.

	A	J	E	Total
Repas	29	7	9	45
Pique-nique	29	10	3	42
Participant	58	17	12	87

Toutes les issues sont équiprobables.

- « X = 7 » signifie : « le participant est un enfant qui a apporté son pique-nique ».

Ainsi $P(X = 7) = \dfrac{3}{87}$.

- de même pour les autres événements du type « $X = x_i$ ».

D'où la loi de X :

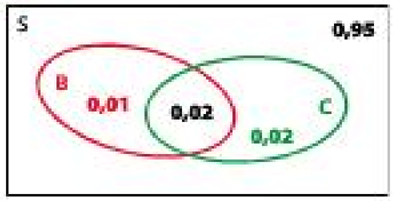
x_i	7	11	13	20	32
$P(X = x_i)$	$\dfrac{3}{87}$	$\dfrac{9}{87}$	$\dfrac{10}{87}$	$\dfrac{36}{87}$	$\dfrac{29}{87}$

Remarque. La somme des probabilités est bien égale à 1.

b) Le tarif moyen correspond à l'espérance E(X).

À la calculatrice : E(X) = 21,82 €.

52 **1. a)**



b) 95 % des chemisiers sont sans défaut donc 5 % ont au moins un défaut.

Ainsi $P(B \cup C) = 0{,}05$.

Or $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ donc :

$$P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C).$$

$P(B \cap C) = 0{,}03 + 0{,}04 - 0{,}05 = 0{,}02$.

2. a) Prix de vente pour un chemisier avec :

- un seul défaut : 0,8 × 40 = 32 € ;
- deux défauts : 0,5 × 40 = 20 €.

V prend les valeurs : 20, 32, 40.

D'où la loi de V :

v_i	20	32	40
$P(V = v_i)$	0,02	0,03	0,95

b) Espérance de V : E(V) = 39,36 €.

3. On note Y la variable aléatoire qui indique le chiffre d'affaires : Y = 250V − 540.

E(Y) = 250 E(V) − 540 donc E(Y) = 9 300 €.

Ainsi la commerçante peut espérer un chiffre d'affaires de 9 300 € sur la vente des 250 chemisiers.

Chapitre 13

12 **1. a)** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}05$.

b) Tableau.

Valeur de a — Valeur de b

k	3	4	15	16	17
$P(X \leqslant k)$	0,0090	0,0264	0,9556	0,9762	0,9879

c) Les bornes de l'intervalle de fluctuation I sont :

$\dfrac{a}{n} = 0{,}02$ et $\dfrac{b}{n} = 0{,}08$.

2. a) La fréquence observée est

$f_{obs} = \dfrac{17}{200} = 0{,}085$.

Ainsi $f_{obs} \notin I$. On rejette au seuil de 5 % l'hypothèse $p = 0{,}05$. On peut donc penser que la chaîne ne fonctionne pas correctement.

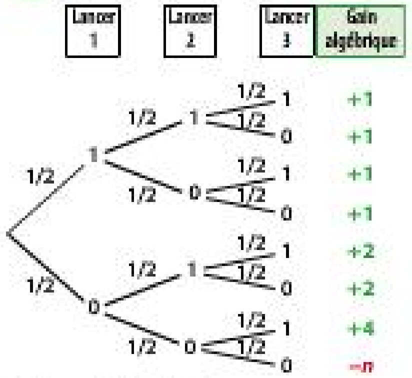
b)
$$\begin{aligned} P(X > 16) = 1 - P(X \leqslant 16) &= 1 - 0{,}9762 \\ &= 0{,}0238. \end{aligned}$$

D'où $P(X \leqslant 3) + P(X > 16) = 0{,}0090 + 0{,}0238$,

soit $P(X \leqslant 3) + P(X > 16) = 0{,}0328$.

On obtient la probabilité que X prenne ses valeurs dans la zone de rejet. Ainsi, il y a une probabilité d'environ 3,3 % de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie.

31 **a)** Un arbre pondéré illustre l'expérience.



Loi de probabilité de G.

g_i	1	2	4	$-n$
$P(G = g_i)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

b) Dire que le jeu est équitable signifie que E(X) = 0.

$E(X) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{8} - \dfrac{n}{8} = \dfrac{12 - n}{8}$.

Ainsi, E(X) = 0 équivaut à $n = 12$.

37 **1. a)** L'événement « X = 0 » est représenté par le chemin à n branches :

$$\xrightarrow{0{,}4} \text{N} \xrightarrow{0{,}4} \text{N}\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{0{,}4} \text{N}$$

Donc $P(X = 0) = 0{,}4^n$.

b) L'événement «X = *k*» est représenté par le chemin à *k* branches :

$$\xrightarrow{0,4} N \xrightarrow{0,4} N \ldots\ldots\ldots N \xrightarrow{0,4} N \xrightarrow{0,6} V$$

On obtient $(k-1)$ perles noires, puis la k^e est verte.

c) Ainsi, $P(X=k)=0{,}4^{k-1}\times 0{,}6$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$.

2. Somme des probabilités : $S=\sum_{k=0}^{n} P(X=k)$.

$$S=0{,}4^n+0{,}6+0{,}4\times 0{,}6+0{,}4^2\times 0{,}6+\ldots+0{,}4^{n-1}\times 0{,}6$$

$$S=0{,}4^n+0{,}6\underbrace{(1+0{,}4+0{,}4^2+\ldots+0{,}4^{n-1})}$$

Rappel

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}\quad (q\neq 1).$$

$S=0{,}4^n+0{,}6\times\dfrac{1-0{,}4^n}{1-0{,}4}=0{,}4^n+0{,}6\times\dfrac{1-0{,}4^n}{0{,}6}$,
soit $S=1$.

43 Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de Pile au terme des six lancers.
X suit une loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=\frac{1}{2}$.

$$P(X=k)=\binom{6}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{6-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\binom{6}{k}.$$

a) On calcule $P(X \leqslant 2)$.

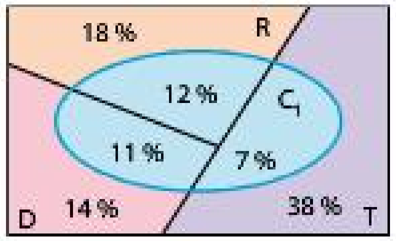
$P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$.

$$P(X\leqslant 2)=\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\binom{6}{0}+\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\binom{6}{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\binom{6}{2}.$$

$P(X\leqslant 2)=\dfrac{1}{64}(1+6+15)$, donc $P(X\leqslant 2)=\dfrac{11}{32}$.

b) L'événement A «Obtenir au moins un Pile» a pour événement contraire : «Obtenir aucun Pile», c'est-à-dire «X = 0».
Ainsi, $P(A)=1-P(X=0)$,
soit $P(A)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\dfrac{63}{64}$.

54 **1.**



2. Interroger un client au hasard sur la classe qu'il réserve pour ses voyages est une épreuve de Bernoulli associée à l'issue C_1 de probabilité $p=P(C_1)=0{,}30$.

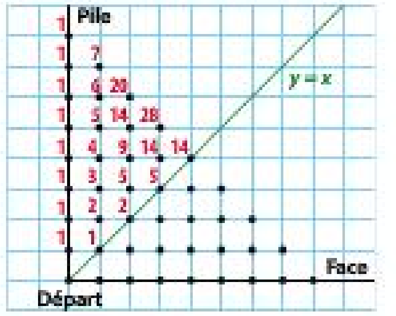
3. a) On est dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre *n* associé à la probabilité de succès $p=0{,}3$.
On note A l'événement : «au moins un client voyage en classe C_1». Son événement contraire est $\bar{A}$: «Aucun des *n* clients ne voyage en classe C_1».
$\bar{A}$ est représenté par le chemin :

$$\xrightarrow{0,7} \bar{C_1} \xrightarrow{0,7} \bar{C_1}\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{0,7} \bar{C_1}$$

Ainsi, $P(\bar{A})=0{,}7^n$, donc $P_n=P(A)=1-0{,}7^n$.

b) $P_n>0{,}999\,9$ s'écrit $1-0{,}7^n>1-0{,}000\,1$ d'où $0{,}7^n<0{,}000\,1$.
Le plus petit entier solution est $n_0=26$.

58 **1.** Pour dénombrer les chemins de 8 pas qui sont situés au-dessus ou sur la droite *d*, on utilise le protocole de codage de l'exercice 57.



2. Tous les chemins de 8 pas sont équiprobables. Le nombre de chemins possibles est $N=2^8=256$. On note T l'événement : «Pile fait la course en tête». Le nombre de chemins favorables à T sont ceux qui arrivent aux points de coordonnées (0; 8), (1; 7), (2; 6), (3; 5) et (4; 4).
Le code associé à chacun de ces points indique le nombre de chemins menant à cette arrivée.
Ainsi, le nombre de chemins favorables à T est :

$$n_T=1+7+20+28+14=70.$$

D'où $P(A)=\dfrac{n_T}{N}=\dfrac{70}{256}=\dfrac{35}{128}$.

69 **1.** L'expérience comporte un seul saut. La puce arrive soit à la case 1, soit à la case 2.
D'où la loi de X_1 :

k	1	2
$P(X_1=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X_1)=\dfrac{3}{2}$.

2. La succession de *n* sauts indépendants définit un schéma de Bernoulli d'ordre *n*. L'épreuve associée a pour issues S : «Saut de 1 case» et $\bar{S}$: «Saut de 2 cases», avec $p=P(S)=\dfrac{1}{2}$.
Y_n suit une loi binomiale de paramètres *n* et $p=0{,}5$.
Ainsi, $E(Y_n)=np$, soit $E(Y_n)=\dfrac{n}{2}$.

3. a) Durant les *n* sauts, Y_n donne le nombre de sauts d'une case donc $n-Y_n$ indique le nombre de sauts de deux cases. Ainsi, le numéro de la case sur laquelle la puce arrive au terme des *n* sauts est :

$$X_n=1\times Y_n+2\times(n-Y_n)\text{, soit } X_n=2n-Y_n.$$

b) X_n prend les valeurs entières de *n* à 2*n*.

Note

La valeur *n* est obtenue lorsque tous les sauts sont de 1 case alors que la valeur 2*n* est obtenue lorsque tous les sauts sont de 2 cases.

c) Pour $n\leqslant k\leqslant 2n$, l'événement «$X_n=k$» signifie «$2n-Y_n=k$», soit «$Y_n=2n-k$».
Ainsi, $P(X_n=k)=P(Y_n=2n-k)$
d'où, en utilisant la loi binomiale de Y_n :

$$P(X_n=k)=\binom{n}{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-(2n-k)}$$

$$P(X_n=k)=\binom{n}{2n-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Application

$$P(X_5=7)=\binom{5}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\times\frac{1}{32}=\frac{5}{16}.$$

La probabilité que la puce soit à la case n° 7 après une succession de 5 sauts est $\dfrac{5}{16}$.

d) $E(X_n)=E(2n-Y_n)=2n-E(Y_n)$,
d'où $E(X_n)=2n-\dfrac{n}{2}=\dfrac{3n}{2}$.
Si on répète, un grand nombre de fois, une série de *n* sauts, la moyenne des numéros des cases sur lesquelles arrive la puce à chaque série est $\dfrac{3n}{2}$.

Coups de pouce

Chapitre 1

1 Pour résoudre ce système, pensez à substituer une des inconnues… Ne soyez pas surpris de trouver plusieurs possibilités.

2 Évitez de compter deux fois l'aire du carré commun aux deux bandes vertes.

3 Pensez que la variable *x* appartient nécessairement à l'intervalle [0 ; 10].

4 Le calcul de l'aire nécessite la connaissance d'une hauteur : tracez la hauteur issue de D et notez *h* sa longueur.

5 L'aire d'un disque de rayon R est égale à πR^2. La somme des rayons des deux disques intérieurs est égale à 10 cm.

6 Pensez à utiliser le théorème de Thalès.

7 Le problème se ramène à la résolution d'une inéquation du second degré en *x*.

8 Vérifiez que x^2-x+2 ne s'annule jamais.

9 $\mathscr{C}$ entièrement située dans la bande de plan délimitée par les droites d'équation $y=-1$ et $y=1$ revient à dire que pour tout nombre réel x, $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

Chapitre 2

1 Il est nécessaire d'étudier le signe de $f(x)$.

2 Attention, la fonction *g* n'est peut-être pas monotone sur l'intervalle [0 ; 2].

3 Les fonctions *g*, *h* et *k* sont «associées» à la fonction *f*. Appliquer les théorèmes du cours.

4 Utilisez les valeurs remarquables de *x* et n'oubliez pas que $|f(x)|$ est toujours positif.

5 Le point $M\,(x\,;f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}$ a pour symétrique $M_1(-x\,;f(x))$ par rapport à l'axe des ordonnées et $M_2(x\,;-f(x))$ par rapport à l'axe des abscisses.

6 Le point de coordonnées $(x\,;y)$ est à la distance $\sqrt{x^2+y^2}$ de l'origine du repère.

7 L'étude du signe du trinôme x^2+2x+2 est utile. On peut même remarquer que $x^2+2x+2=(x^2+2x+1)+1$ …

8 N'oubliez pas que $OM=\sqrt{2}\times f(x)$.

9 La perpendiculaire à *d* passant par O coupe *d* en un point H.

Chapitre 3

1 Par lecture graphique vous pouvez trouver facilement le coefficient directeur de chacune des tangentes. Vous avez les coordonnées de O, A, B et, sur ces tangentes, un second point à coordonnées entières.

2 Après avoir tracé la parabole et la droite, vous avez l'impression que *d* est tangente à $\mathscr{P}$. Posez-vous la question : «En quel point cette droite *d* est-elle tangente à $\mathscr{C}$» ? Il vous reste ensuite à vérifier qu'en ce point la tangente est bien la droite *d*.

3 Faites une figure et construisez H'. Vous avez ensuite deux façons de démontrer que la tangente en A passe par H'.
- Vous cherchez une équation de la tangente en A et vous vérifiez que H' est un point de cette tangente.
- Vous comparez le nombre dérivé en $x=1$ et le coefficient directeur de (AH').

4 Pensez que les coordonnées des points A et B vérifient le système :

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+3. \end{cases}$$

Sa résolution vous donne les coordonnées de A et B. Celles de H s'en déduisent immédiatement.

5 Souvenez-vous, le coefficient directeur est $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

6 Il faut trouver l'abscisse x_0 de C…, mais pensez que $f'(x_0)=m$…

7 Trouvez d'abord la fonction dérivée, puis $f'(m)$ et $f(m)$.

8 Connaissant $f(m)$ et $f'(m)$, il vous reste à appliquer la «formule» donnant l'équation de la tangente en un point d'une courbe.

9 Il vous reste à traduire le fait que la tangente en M passe par A(0 ; −3)… et à résoudre une équation du second degré en *m*.

10 Il suffit de traduire les trois idées suivantes, contenues dans le texte :
- O est un point de P ;
- A est un point de P ;
- *d* est la tangente en A.

11 Il suffit de traduire les trois conditions de 1. a) : on calcule $f(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.

12 Résolvez le système précédent et vous aurez la réponse.

Chapitre 4

1 Avec un logiciel ou à la calculatrice tracez $\mathscr{C}$ et la droite *d*. Déplacez la droite *d* et conjecturez ainsi le nombre de points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à *d*.
La tangente en un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0 a pour coefficient directeur $f'(x_0)$.

2 Comme pour l'exercice précédent avec GeoGebra par exemple, tracez $\mathscr{C}$ et une droite de coefficient directeur 1. Déplacez la droite et conjecturez le nombre de points. Pensez que le coefficient directeur $f'(x_0)$ doit être égal à 1.

3 Pensez à dériver *f* et à dresser le tableau de variation. Les réponses en découlent.

4 Une conjecture avec GeoGebra est intéressante : sur une même figure tracez $\mathscr{C}$ ainsi que les droites d'équations respectives $y=4$ et $y=7$ puis $x=-1$ et $x=\dfrac{4}{3}$. Dressez puis exploitez le tableau de variation.

5 Dire qu'un point $M(m,\,p)$ est un point de $\mathscr{C}$ équivaut à $f(m)=p$. Traduisez cette idée pour les points A, B, C afin d'obtenir le système.

6 On trouve d'abord *a* facilement… il reste ensuite à résoudre un système.

7 Avec GeoGebra placez A, B, C puis tracez la courbe représentative de *f*. Tracez la droite (BC) et la tangente en A. Intéressez-vous aux réponses qui apparaissent dans la fenêtre algèbre. Retrouvez ces résultats par le calcul.

8 La diagonale *d* d'un carré et le côté *a* sont liés par la relation $d=a\sqrt{2}$.

9 On rappelle que le volume d'une pyramide est $\dfrac{1}{3}Bh$ où B est l'aire de la base et *h* la hauteur…

10 Le volume est une fonction de *h*. Étudiez les variations de $\mathscr{V}$ sur l'intervalle [0 ; 12].

11 Posez-vous la question : l'équation $f'(x)=0$ a-t-elle toujours deux solutions ?

12 Vous pouvez aussi mener une conjecture avec GeoGebra… puis exploiter le tableau de variation dans ce cas particulier.

Chapitre 5

1 En appuyant sur les touches, $\boxed{1}\,\boxed{.}\,\boxed{1}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{1}\,\boxed{5}$, par exemple, de votre calculatrice, vous obtiendrez une valeur (approchée) de $1{,}1^{15}$. Faites de même avec des nombres choisis de manière pertinente et vous trouverez la réponse.

2 Chercher (sur Internet par exemple) l'année de l'événement. Traduisez en équation et résolvez.

3 Établissez un lien entre les arcs successifs, cela doit vous permettre d'économiser les calculs.

4 Conjecturez l'expression de u_n en fonction de *n*. Vérifiez à l'aide du tableur (Format – Cellules… – Fraction).

5 Pensez au théorème de Pythagore et posez $q^2 = Q$.

6 Observez les différents résultats obtenus et reconnaissez une suite.

7 Le calcul des premiers termes de la suite peut être utile.

Chapitre 6

1 En remplaçant n par 1, 2… vous avez les réponses demandées. Profitez de ce calcul pour conjecturer les variations de la suite.

2 Le calcul peut paraître délicat. Pensez que $a^{n+1} - a^n = a^n(a - 1)$.

3 C'est une simple affaire de signe… Il n'y a pas de calculs.

4 Vous n'avez rien à démontrer. Vous devez seulement construire «l'escalier» … et conjecturer.

→ *Exercice résolu B, page 150.*

5 N'oubliez pas de tracer la courbe à la calculatrice ou avec GeoGebra pour avoir une idée des variations. Calculez la dérivée et concluez.

6 Pensez que «$a<b$» équivaut à «$a-b<0$»… Cherchez donc le signe de $u_n - 3$.

7 Voyez l'exercice résolu C page 151 pour avoir une idée de la méthode. N'oubliez pas que $u_n < 3$.

8 Calculez C_1, C_2… vous aurez ainsi une idée sur la nature de la suite. En appliquant ensuite les formules, on trouve C_n et ℓ_n en fonction de n. Afin que vous puissiez continuer, on trouve $\ell_n = 8\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

9 Voir le coup de pouce **6**.

10 …Il vous reste seulement à résoudre $\ell_n > 8 - 10^{-4}$ … à la calculatrice.

11 Le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \geqslant 1$ vous donnera la réponse.

12 Assurez-vous au préalable que tous les termes u_n sont positifs.

13 Voyez le chapitre 5 page 121. En écrivant les premiers termes et les deux derniers… la simplification est immédiate.

14 Cherchez un entier naturel n tel que $\ell_n > 1 - 10^{-4}$.

Chapitre 7

1 Pour construire M, pensez à exprimer $\overrightarrow{AM}$ (par exemple) en fonction de $\overrightarrow{AB}$ avec la relation de Chasles.

2 Posez-vous la question suivante : les vecteurs $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont-ils colinéaires ?

3 Le choix du repère $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est pertinent. Il facilite vos calculs.
Pour M et N, il suffit de remarquer que :

$$\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}.$$

4 Tout est ici une affaire de colinéarité… Intéressez-vous d'une part aux vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DN}$ et d'autre part aux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CN}$.

5 Avec la relation de Chasles, décomposez les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GC}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IC}$… et I est le milieu de [AC].

6 Toujours avec la relation de Chasles, exprimez $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ensuite, à partir de la relation $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, exprimez $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

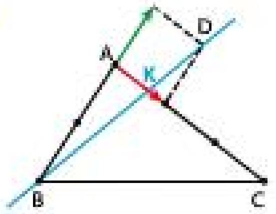
7 Le choix du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ semble le plus pertinent.
Il permet de trouver rapidement les coordonnées de C et de J. Il permet aussi d'avoir rapidement k, car k est l'abscisse de K dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$.

8 Vous pouvez trouver les coordonnées de K de deux manières :
- en traduisant la colinéarité de $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ avec $K(x ; 0)$;
- en trouvant une équation de (CJ) et en cherchant l'abscisse de K, intersection de (CJ) et de l'axe des abscisses.

9 Dans ce repère, les coordonnées de I et K sont immédiates. Pour J, pensez que $4\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC}$.
Cette égalité vous permet de trouver les coordonnées $(x ; y)$ de J.

10 Voyez l'exercice [illegible] page 184. Il vous permet de trouver de manière astucieuse les équations des droites (AI) et (CK).
Il vous reste à trouver ensuite les coordonnées de M, intersection de ces deux droites, et à vérifier l'alignement de M, J, B.

11



12 Pensez que K a pour coordonnées $(0 ; y)$ et traduisez l'alignement des points B, D et K.

13 Une figure précise vous aidera rapidement à trouver les coordonnées de I et J. Notez $(-5 ; y)$ les coordonnées de K, puis traduisez l'alignement de K, B, C pour trouver y.

Chapitre 8

1 Revoyez le résolu C page 199 et pensez d'abord à trouver la mesure de l'angle géométrique associé.

2 Revoyez le résolu C page 199.
Revenez à des vecteurs de même origine et à trouver la mesure de l'angle géométrique associé.

3 $\widehat{DBA}$ se calcule facilement… Il vous reste à remarquer que le triangle DBA est isocèle pour trouver la mesure de $\widehat{BAD}$.

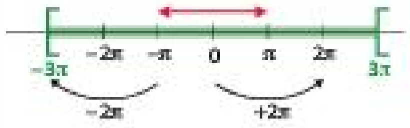
4 Ces points semblent alignés, il vous manque seulement $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ pour conclure… avec la relation de Chasles.

5 Revenez, pour les deux premiers angles orientés, à des vecteurs de même origine. La présence du carré BCDE vous facilitera la tâche.

6 Si vous trouvez d'abord la nature des triangles MOP et NOP, puis la mesure des angles géométriques $\widehat{POA}$ et $\widehat{AON}$, il ne vous restera plus qu'à conclure.

7 Placez les points repérés par ces réels sur le cercle $\mathscr{C}$.
Sans doute aurez-vous besoin de trouver au préalable $\sin x$ pour répondre aux questions posées.
Aidez-vous d'un cercle trigonométrique.

8 Vous pouvez chercher d'abord les réels dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$ et écrire vos réponses sous la forme $x + 2k\pi$.
Vous chercherez ensuite les valeurs de k pour lesquelles ces réels «restent» dans l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi[$.

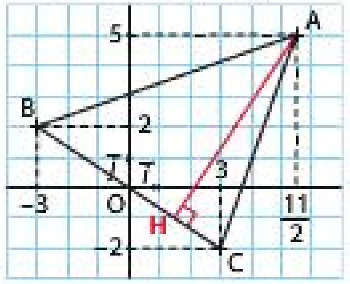


Chapitre 9

1 Dessinez A' à main levée. Que dire de (AA') et d ? Que dire de H, intersection de ces deux droites ? Cherchez ses coordonnées.

2 D'abord, faites une figure… Choisissez des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ de d et d' de manière que l'angle géométrique associé soit aigu.

3 Souvenez-vous que l'aire du triangle ABC est, par exemple, égale à $\frac{1}{2}$ BC × AH.



4 Il semble que le choix d'un repère est bien adapté à l'exercice. Attention, le repère doit être orthonormé. On peut prendre par exemple le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{\imath}$ et $OB = b\vec{\jmath}$.

5 La présence des angles droits vous offre deux pistes possibles : utiliser un repère orthonormé ou exprimer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de deux vecteurs par la relation de Chasles.

6 Il y a beaucoup d'angles droits dans la figure. La piste géométrique semble difficile. Choisissez un repère orthonormé qui conduit à des coordonnées simples. N'oubliez pas que AB = AD = 1…

7 Il n'y a pas d'angles droits. Il est ici préférable de suivre la piste géométrique. Pensez à $MP^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}\right)^2$ …

8 Exprimez $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$, puis calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. L'équivalence découle immédiatement du résultat précédent.

9 Transformez l'expression en remarquant que $\overrightarrow{CM}$ est commun aux deux produits scalaires. La relation de Chasles fait le reste.

10 En exprimant $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction de deux vecteurs par la relation de Chasles, vous profiterez de la présence des angles droits en A et D. Il vous restera ensuite à gérer le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

Chapitre 10

1 Ne vous lancez pas dans les calculs sans faire une figure précise. Elle vous renseignera sur la particularité du triangle ABC. Cela vous permettra de trouver le centre et le rayon.

2 Une figure est indispensable. Il vous faut les coordonnées du centre de $\mathscr{C}$. Avec deux médiatrices bien choisies, les calculs sont simplifiés. Une équation du cercle $\mathscr{C}$ est :

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 3y = 0.$$

3 On sait que l'abscisse de D est 4 et que D est un point de $\mathscr{C}$. Vous êtes ramené à résoudre une équation du second degré.

4 Cette fois $y = 0$. Une factorisation vous donne l'abscisse de C.

5 Sur la figure, H appartient déjà à une hauteur. Il faut prouver qu'il appartient à une seconde hauteur. Les calculs seront plus simples si vous choisissez celle issue de O.

6 Utilisez un cercle trigonométrique.
$\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5} = \ldots\ldots\ldots ?$
Revenez ensuite aux angles associés du chapitre 8.

7 Placez sur le cercle trigonométrique de la question **1** $\frac{7\pi}{10}$ et $\frac{4\pi}{5}$ puis concluez. C'est toujours une affaire d'angles associés.

8 Exploitez la figure.

9 Pensez au théorème de Pythagore généralisé.

10 Rappelez-vous, si a est le côté d'un triangle équilatéral, alors la hauteur est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Déduisez-en la valeur de OA.
Vous connaissez l'angle OAI. Utilisez le théorème de Pythagore généralisé.

11 Sur la figure, il y a trois axes de symétrie passant par O. Exploitez-les pour trouver le centre et le rayon.

12 Faites une figure, à compléter au fur et à mesure. Vous pouvez utiliser GeoGebra. On vous demande seulement de vérifier que D, E, F sont des points de $\mathscr{C}$.

13 Trouvez une équation des droites (AC) et (AB), puis des hauteurs issues de B et C. Vous en déduirez les coordonnées de H, M et N. Il ne reste plus qu'à vérifier l'appartenance à $\mathscr{C}$.

Chapitre 11

1 La comparaison peut se faire à partir des indicateurs de position (quartiles – médiane) mais aussi des indicateurs de dispersion (étendue – écart interquartile).

2 Pour chaque jeu, pensez à la fréquence des avis positifs.

3 Un tableau résume la situation.

4 Intéressez-vous à la proportion de garçons et de filles qui testent ces jeux.

5 Pensez à utiliser le centre des classes.

6 Le diagramme des fréquences cumulées croissantes peut être fort utile.

7 La part de la production française n'est autre que la fréquence des «films français».

8 L'équation de la droite permet d'établir une relation affine entre le rang de l'année et la part de la production française. À vous de l'exploiter !

Chapitre 12

1 Il faut exploiter le tableau.

2 Interprétez l'espérance de V.

3 Pensez à introduire une variable aléatoire puis à interpréter son espérance.

4 Une nouvelle variable aléatoire, liée à la première, indique les recettes.

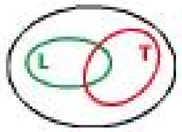
5 Pensez à introduire le gain algébrique du joueur. Quelle doit être la valeur de son espérance pour que le jeu soit équitable ?

6 Un diagramme ensembliste ou un tableau permet de répondre.

	E	$\overline{E}$	
M			
$\overline{M}$			

7 Le prix de vente V d'une maquette est une variable aléatoire; exprimez V en fonction de X. Que vaut E(V) ?

8 Utilisez un tableau à double entrée ou un diagramme ensembliste.



9 Le montant C du chiffre d'affaires est une variable aléatoire; exprimez C en fonction de D. Déduisez-en E(C).

Chapitre 13

1 N'oubliez pas de repérer les chemins qui conduisent à la réalisation des événements cités. Ils mènent directement à la solution.

2 Un arbre peut vous aider à répondre. Sinon, introduisez la variable aléatoire qui indique le nombre de succès.

3 Exprimez en fonction de n la probabilité que Lucy réussisse au moins un panier.

4 Aidez-vous d'un schéma ensembliste ou d'un tableau à double entrée.

5 Vous reconnaissez un schéma de Bernoulli d'ordre 10. Exploitez-le.

6 Pensez à la loi du nombre de succès.

7 Exploitez une relation du type $V = aX + b$ pour calculer E(V).

8 Si X désigne le nombre de vendeurs satisfaits sur un échantillon aléatoire de 872 personnes, quelle est la loi de probabilité de X ? À vos calculatrice pour déterminer I.

9 Testez l'hypothèse !