Le vocabulaire de la LOGIQUE

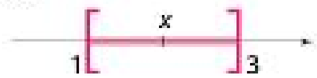
Ces pages peuvent être utilisées dès le début de l'année car les exemples proposés sont tous tirés de la classe de Seconde.

1 Les conjonctions « et », « ou »

1.1 La conjonction « et »

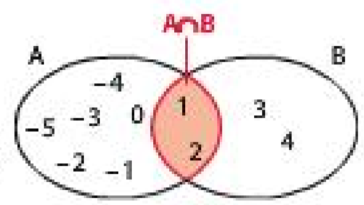
En mathématiques , le sens de la conjonction « et » est le sens du langage courant.

- Le nombre x est supérieur à 1 **et** inférieur à 3.
- Le triangle ABC est rectangle **et** isocèle.



L'ensemble « A et B »

Considérons les deux ensembles de nombres :
A = {–5 ; –4 ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2} et B = {1 ; 2 ; 3 ; 4}.
Les nombres qui appartiennent à la fois à A et B sont les nombres : 1 et 2. L'ensemble de ces nombres est appelé « **A inter B** » ; il est noté **A ∩ B**. On écrit : A ∩ B = {1 ; 2}.



1.2 La conjonction « ou » en langage mathématique

On l'a vu, en mathématiques, le sens de la conjonction « et » est le sens du langage courant. Il n'en est pas de même pour la conjonction « ou ». Dans le langage courant, le « ou » est **exclusif**. En mathématiques, le « ou » est **non exclusif** : il est **inclusif**.

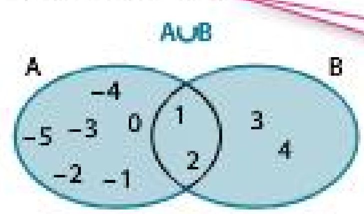
Exemple. Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte au hasard. On gagne si la carte tirée est « un roi **ou** une carte de couleur rouge ».
On gagne à ce jeu lorsque la carte est un roi qui n'est pas de couleur rouge, ou alors une carte de couleur rouge qui n'est pas un roi, ou alors un roi de couleur rouge.
Ainsi, en mathématiques, le « ou » accepte les deux cas à la fois.

L'ensemble « A ou B »

Reprenons les deux ensembles A et B précédents. Quels sont les nombres qui appartiennent à A **ou** à B ? **En mathématiques**, la réponse est la suivante.
Ces nombres sont :
– soit les nombres qui sont dans A sans être dans B : –5 ; –4 ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ;
– soit les nombres qui sont dans B sans être dans A : 3 ; 4 ;
– soit les nombres qui sont dans A et dans B : 1 ; 2.
Ce sont donc les nombres : –5 ; –4 ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.

L'ensemble des nombres qui appartiennent à A ou à B est appelé « **A union B** » ; il est noté **A ∪ B**.
On écrit : A ∪ B = {–5 ; –4 ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4}.

Les nombres qui sont à la fois dans A et B ne sont écrits qu'une seule fois.



1.3 Emploi de « et » et de « ou » : exemples

Pour deux nombres a et b :

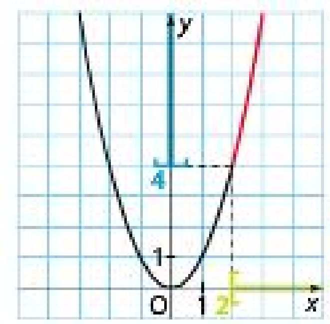
- $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ **ou** $b = 0$;
- $ab \neq 0$ équivaut à $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$;
- $a^2 + b^2 = 0$ équivaut à $a = 0$ **et** $b = 0$.

2 L'implication

Le mot **proposition** désigne, à notre niveau, une phrase qui est soit vraie, soit fausse.
Une proposition sera notée (P) ou (Q).

2.1 L'implication : si…, alors…

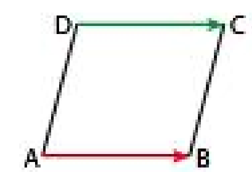
Examinons l'énoncé suivant : « Si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ ».
Cet énoncé affirme ceci :
si la proposition (P) : « $x \geqslant 2$ » est vraie, **alors** la proposition (Q) : « $x^2 \geqslant 4$ » est vraie. Un tel énoncé est une **implication**.
Le graphique ci-contre montre que l'implication est vraie.



On dit alors que **l'hypothèse (P) implique la conclusion (Q)**.
Ce qui se traduit par **Si (P), alors (Q)** ou par **(P) donc (Q)**.
Pour signifier que (P) implique (Q), on peut écrire **(P) ⇒ (Q)**.

Autre exemple

« Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati) » est aussi une implication vraie.



Implications implicites

« Implicite » signifie que l'implication n'est pas exprimée comme on vient de l'expliquer.

Parfois, dans un énoncé, l'implication est **implicite**. Par exemple, « Deux nombres opposés ont leurs carrés égaux » est une implication implicite.
En effet, cette phrase signifie : « Si deux nombres sont opposés, alors leurs carrés sont égaux ».

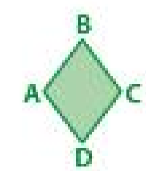
2.2 Condition suffisante, condition nécessaire

Dans l'implication « Si (P), alors (Q) », on dit que (P) est une **condition suffisante** pour (Q) et que (Q) est une **condition nécessaire** pour (P).

Exemple

« Si $\underbrace{\text{le quadrilatère ABCD est un losange}}_{\text{(P)}}$, alors $\underbrace{\text{ABCD est un parallélogramme}}_{\text{(Q)}}$. »

Il **suffit** que (P) soit vraie pour que (Q) soit vraie.
Il faut que (Q) soit vraie pour que (P) le soit. En effet, si (Q) est fausse (si ABCD n'est pas un parallélogramme), (P) est fausse aussi (ABCD ne peut pas être un losange).



2.3 Implication réciproque d'une implication

Reprenons l'implication : « Si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ ».

Par définition, l'implication réciproque de « si (P), alors (Q) » est « si (Q), alors (P) ».

L'implication réciproque s'énonce :

« Si $x^2 \geqslant 4$, alors $x \geqslant 2$ ».

Cette implication est fausse. En effet, le nombre $x = -3$ est tel que « $x^2 \geqslant 4$ » est vraie et « $x \geqslant 2$ » est fausse.

Autre exemple

Reprenons l'autre exemple du paragraphe **2.1**. L'implication réciproque de « si (P), alors (Q) » est :
« Si ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati), alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ».
Cette implication réciproque est vraie.

3 Propositions équivalentes

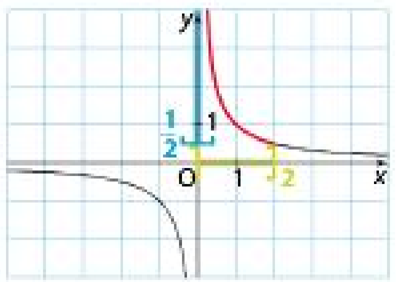
3.1 Un exemple pour comprendre

Reprenons les propositions (P) : « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ » et (Q) : « ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati) ».
Nous avons vu que « Si (P), alors (Q) » et « Si (Q), alors (P) » sont des implications vraies.
On dit alors que (P) et (Q) sont équivalentes.

Deux propositions (P) et (Q) sont **équivalentes** lorsque (P) implique (Q) **et** lorsque (Q) implique (P).
On peut écrire **(P) ⇔ (Q)**, ce qui se traduit par (P) **équivaut à** (Q) ou par (P) **si et seulement si** (Q).

Autres exemples

1. Comme le montre le graphique ci-dessous, « $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$ » équivaut à « $x \in]0 ; 2]$ ».



2. « ABC est un triangle rectangle en A » équivaut à « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».

3.2 Condition nécessaire et suffisante

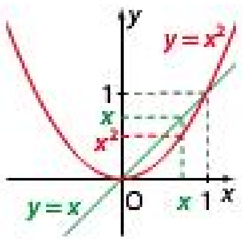
Lorsque (P) équivaut à (Q), on dit que (P) est une **condition nécessaire et suffisante pour** (Q) ou que (Q) est une condition nécessaire et suffisante pour (P).

4 Les quantificateurs

4.1 Les locutions « Quel que soit », « Pour tout »

Exemples

1. La proposition (P) : « Quel que soit le nombre x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x$ » est une proposition vraie illustrée par la figure ci-contre.



Quel que soit est appelé **quantificateur universel**. Ce quantificateur permet de préciser l'ensemble des nombres x tels que $x^2 \leqslant x$.
Il signifie que **tout** nombre x de l'intervalle $[0; 1]$ possède la propriété $x^2 \leqslant x$.
On peut dire aussi : « Pour tout nombre x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x$ ».
« **Pour tout** » est aussi un **quantificateur universel**.

2. « Pour tout nombre x, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$ » est une proposition vraie.

3. « Pour tout x de l'intervalle $[-1 ; 2]$, $x^2 \in [1 ; 4]$ » est une proposition fausse. En effet, 0 est dans $[-1 ; 2]$ et $0^2 \notin [1 ; 4]$.

4. « Quelle que soit la série de données statistiques, la médiane est comprise entre les quartiles Q_1 et Q_3 » est une proposition vraie.

Remarque : « Pour tout » et « un »

Parfois, « quel que soit » ou « pour tout » sont remplacés par l'article indéfini « un ».
Par exemple, la proposition : « Dans **un** triangle, les médianes sont concourantes » doit se comprendre ainsi : « **Pour tout** triangle, les médianes sont concourantes ».

4.2 La locution « Il existe au moins un »

Un exemple pour comprendre

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.
La proposition « **Il existe au moins** un nombre x tel que $f(x) \geqslant 5$ » est une proposition vraie.
En effet, par exemple, $f(2) \geqslant 5$. (En réalité, tous les nombres x tels que $x \geqslant 1$ sont tels que $f(x) \geqslant 5$.)
Il existe au moins un est appelé **quantificateur existentiel**.

Autres exemples

1. « **Il existe au moins** un nombre x tel que $4 \cos x = 5$ » est une proposition fausse.
En effet, $4 \cos x = 5$ signifie $\cos x = \frac{5}{4} > 1$ et pour tout nombre x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

2. Considérons la proposition (P) : « Si a, b et c sont trois nombres positifs tels que $a + b + c = 12$, alors parmi ces trois nombres, il en existe au moins un qui est supérieur ou égal à 4 ».
Cette proposition est vraie. En effet si a, b et c, positifs, sont tous strictement inférieurs à 4, leur somme est strictement inférieure à 12. Donc au moins l'un de ces nombres est supérieur ou égal à 4.

5 Négation d'une proposition

5.1 Définition

À partir d'une proposition (P), on peut toujours énoncer une autre proposition notée **(non P)** qui est la négation de (P).
Par exemple, la négation de la proposition « Le triangle ABC **est** isocèle » est « Le triangle ABC **n'est pas** isocèle ».
Des deux propositions, évidemment, si l'une est vraie, l'autre est fausse, et réciproquement.

5.2 Négation d'une proposition (P_1 et P_2)

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes et on considère la proposition (P) : « la carte tirée est une figure de couleur rouge ».
(P) est de la forme **(P_1 et P_2)** avec :
(P_1) : « la carte est une figure » et (P_2) : « la carte est rouge ». Dans le tableau ci-contre, (P) est représenté par la case verte. Donc (non P) est représentée par les trois cases bleues.

	Figure	7, 8, 9, 10, as
Rouge	(P)	
Noire		

Ainsi, nier (P), c'est dire que « la carte n'est pas une figure » ou « la carte n'est pas rouge ».

La négation de (P_1 et P_2) est la proposition ((non P_1) ou (non P_2)).

5.3 Négation d'une proposition (P_1 ou P_2)

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
La proposition (P) : « la carte tirée est un Pique ou une figure » est de la forme **(P_1 ou P_2)** avec (P_1) : « la carte tirée est un Pique » ou (P_2) : « la carte tirée est une figure ».
Dans le tableau ci-contre, (P) est représentée par les trois cases vertes.
Donc (non P) est représentée par la case bleue.

	Figure	7, 8, 9, 10, as
Pique		
Non pique		Non (P)

Ainsi, nier (P), c'est dire que la carte tirée n'est pas un Pique **et** n'est pas une figure.

La négation de (P_1 ou P_2) est la proposition ((non P_1) et (non P_2)).

5.4 Négation d'une proposition universelle

Une proposition universelle est une proposition qui contient le seul quantificateur « pour tout » ou « quel que soit » (ou « pour tous » ou « quels que soient »).

Exemple

Prenons la proposition (P) suivante : « **Pour tout** nombre x, $(x+1)^2 > 0$ ». Nier (P), c'est dire : « Il **existe au moins** un nombre x tel que $(x+1)^2 \leqslant 0$ ».
(Non P) est vraie car pour $x = -1$, $(x+1)^2 = 0$. Donc (P) est fausse.

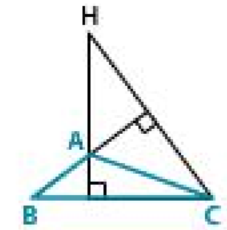
Cas général

Notons (P) la proposition : « **Pour tout élément x** d'un ensemble E, x **satisfait** à une condition C ».
Alors (non P) est la proposition :
« **Il existe au moins** un élément x de E qui **ne satisfait pas** la condition C ».

Conséquence : démonstration par recours à un contre-exemple

À l'aide d'un contre-exemple, démontrons que la proposition (P) : « Pour tout nombre $x > -1$, $x^2 > 1$ » est fausse.
Démontrer que (P) est fausse revient à démontrer que sa négation (non P) est vraie. Or (non P) est :
« **Il existe** au moins un nombre x tel que $x > -1$, et tel que $x^2 \leqslant 1$ ».
Il s'agit donc de trouver un tel nombre x.
On cherche au plus simple : zéro convient car $0 > -1$ et $0^2 \leqslant 1$.
Donc (P) est fausse.

5.5 Négation d'une proposition existentielle



Exemple. La négation de la proposition (P) : « Il **existe au moins** un triangle dont l'orthocentre **est à l'extérieur** du triangle » est : « **Pour tout** triangle, l'orthocentre **est à l'intérieur** du triangle ».
Ici, (P) est vraie (figure ci-contre), et donc (non P) est fausse.

Cas général

Notons (P) la proposition : « **Il existe au moins** un élément x de l'ensemble E qui **satisfait** à une condition C ». Alors (non P) est la proposition :
« **Pour tout** élément x de E, x **ne satisfait pas** à C ».

6 Contraposée d'une implication

Par définition, la **contraposée** de l'implication :
« (P) implique (Q) » est « (non Q) implique (non P) ».

Une implication et sa contraposée sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses : elles sont équivalentes.

Supposons que « (P) implique (Q) » soit vraie. Alors « (non Q) implique (non P) » est vraie aussi.
En effet, si « (non Q) implique (non P) » est fausse, alors « (non Q) implique (P) » est vraie.
Puisque « (P) implique (Q) » est vraie, on déduit que « (non Q) implique (Q) » est vraie, ce qui est impossible. On en déduit que « (non Q) implique (non P) » est vraie.

Intérêt de la contraposée

1. Le théorème de Pythagore est vrai :
Si (P) : « Un triangle ABC est rectangle en A », **alors (Q)** : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».
Donc sa contraposée est vraie. Or sa contraposée s'énonce :
Si (non Q) : « Dans un triangle ABC, $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ », **alors (non P)** : « ABC n'est pas rectangle en A ».
Cette contraposée permet de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

2. La proposition suivante est vraie :
« Dans un repère, si les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires, alors $xy' - x'y = 0$. »
Par contraposée, on déduit une autre proposition vraie : « Dans un repère, si deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont tels que $xy' - x'y \neq 0$, alors les vecteurs ne sont pas colinéaires. »

Différence entre implication réciproque et contraposée

La réciproque de « (P) implique (Q) » est « (Q) implique (P) » tandis que la contraposée est « (non Q) implique (non P) ».

Exemple

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan.
Une équation de la droite d est $y = mx + p$ et une équation de la droite d' est $y = m'x + p'$.
Considérons l'implication (A) :
« $\underbrace{d \text{ est parallèle à } d'}_{(P)}$ implique que $\underbrace{m = m'}_{(Q)}$ ».
L'implication réciproque de (A) est (B) : « $m = m'$ implique que d est parallèle à d' ».
La contraposée de (A) est : « $m \neq m'$ implique que d et d' sont non parallèles ».
Ces implications sont toutes vraies. La réciproque sert à démontrer que deux droites du plan sont parallèles, tandis que la contraposée sert à démontrer que deux droites du plan sont non parallèles, c'est-à-dire sécantes.

1 Démontrer une implication

1.1 Par implications successives

Notons (P) la proposition : « $0 < x < 2$ et $0 < y < 2$ » et (Q) la proposition : « $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$ ».
Démontrons que « (P) implique (Q) » est vraie.

$$(P) : \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \text{et} \\ 0 < y < 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1) : \begin{cases} \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (Q) : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1.$$

Passage à l'inverse (voir les rappels page 355).

On ajoute membre à membre des inégalités de même sens.

On a effectué la démonstration par **implications successives** $(P) \Rightarrow (P_1) \Rightarrow (Q)$.

L'**organigramme** d'une démonstration par implications successives est :
$\mathbf{(P)} \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_n \Rightarrow \mathbf{(Q)}$,
où chaque proposition (P_i) se déduit des propositions précédentes ou d'une partie d'entre elles.

1.2 Par transformation de la conclusion

Au lieu de démontrer que (P) implique (Q), on remplace (Q) par une proposition (Q') **qui lui est équivalente**. L'**organigramme** d'une telle démonstration est $(P) \Rightarrow (Q') \Leftrightarrow (Q)$.

Exemple. Démontrons que : « pour tout nombre $x \geq 0$ et tout nombre $y \geq 0$, $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ».
Cette proposition est l'implication : « si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ».
Dans l'ensemble des nombres positifs, on sait que « $a \leq b$ » équivaut à « $a^2 \leq b^2$ ».
On remplace donc (Q) : « $2\sqrt{xy} \leq x + y$ » par la proposition équivalente (Q') : « $4xy \leq (x + y)^2$ ».
(Q') équivaut à (Q_1) : « $4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy$ » ; (Q_1) équivaut à (Q_2) : « $0 \leq (x - y)^2$ ». (Q_2) est vraie car tout carré est positif ou nul, donc $(P) \Rightarrow (Q_2) \Leftrightarrow (Q_1) \Leftrightarrow (Q') \Leftrightarrow (Q)$.

1.3 Par utilisation de la contraposée

Une proposition et sa contraposée sont équivalentes. Ainsi, pour démontrer qu'une proposition est vraie, **on peut démontrer que sa contraposée est vraie**.

Exemple. Démontrons la proposition :

Si $\underbrace{\text{le carré d'un entier naturel } n \text{ est pair}}_{(P)}$, alors $\underbrace{n \text{ est pair}}_{(Q)}$.

La contraposée de cette implication est :

Si $\underbrace{n \text{ est un entier naturel impair}}_{\textbf{(non Q)}}$, alors $\underbrace{n^2 \text{ est impair}}_{\textbf{(non P)}}$.

Supposons donc que n est impair, c'est-à-dire que $n = 2k + 1$, où k est un entier naturel.
Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n^2 est impair.
La contraposée est vraie donc la proposition « Si le carré d'un entier n est pair, alors n est pair » est vraie.

1.4 Par l'absurde

Pour démontrer par l'absurde l'implication « (P) implique (Q) », on conserve l'hypothèse (P) et **on ajoute l'hypothèse (non Q)**.
À partir de l'hypothèse (P et (non Q)), on déroule un raisonnement qui aboutit à une contradiction ou à une proposition impossible. Il en résulte que (non Q) est fausse, donc que (Q) est vraie.

Démontrons avec cette méthode l'implication :
Si (P) : « x est un nombre différent de 3 », alors (Q) : « $\frac{x+1}{x-3}$ est différent de 1 ».
Supposons ((P) et (non Q)), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x \neq 3 \quad \textbf{(P)} \\ \quad \text{et} \\ \frac{x+1}{x-3} = 1 \quad \textbf{(non Q)} \end{cases} \quad \text{alors} \begin{cases} x \neq 3 \\ x + 1 = x - 3 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} x \neq 3 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

$0 = 4$ est impossible. En conclusion, la proposition (non Q) est fausse et (Q) est vraie.

2 Démontrer une équivalence

Pour démontrer l'équivalence : (P) équivaut à (Q), on retiendra deux façons.

1 Par double implication
On démontre que $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$.

2 Par équivalences successives
On démontre que $(P) \Leftrightarrow (Q_1)$ puis $(Q_1) \Leftrightarrow (Q_2)$, … jusqu'à $(Q_n) \Leftrightarrow (Q)$.

Par double implication : étude d'un exemple

a et b sont des nombres positifs.
Démontrons l'équivalence :

(P) : « $a < b$ » équivaut à (Q) : « $a^2 < b^2$ ».

- **Supposons que (P) est vraie :** $a < b$.
(Q) : « $a^2 < b^2$ » équivaut à (Q') : « $(a + b)(a - b) < 0$ ».
a et b sont positifs et $b > a$ donc $b > 0$; ainsi $a + b > 0$.
$a < b$ soit $a - b < 0$ donc $(a + b)(a - b) < 0$.
Ainsi $(P) \Rightarrow (Q')$ est vraie.
Donc $(P) \Rightarrow (Q)$ est vraie.
- **Supposons que (Q) est vraie :** $a^2 < b^2$.
Alors $(a + b)(a - b) < 0$.
a et b sont positif et $b > a$ donc $b > 0$; ainsi $a + b > 0$.
Comme $(a + b)(a - b) < 0$, on a donc $a - b < 0$, soit $a < b$.
Donc $(Q) \Rightarrow (P)$ est vraie.
- **Conclusion :** $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ donc $(P) \Leftrightarrow (Q)$.

Par équivalences successives : étude d'un exemple

Démontrons que (P) : « $a^2 = b^2$ » équivaut à (Q) : « $a = b$ ou $a = -b$ ».
(P) équivaut à (P_1) : « $a^2 - b^2 = 0$ » et (P_1) équivaut à (P_2) : $(a + b)(a - b) = 0$.
Enfin (P_2) équivaut à (Q) : « $a = b$ ou $a = -b$ ».
Ainsi $(P) \Leftrightarrow (P_1) \Leftrightarrow (P_2) \Leftrightarrow (Q)$.

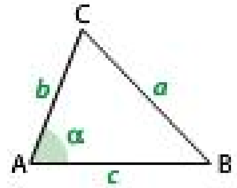
Quelle méthode choisir ?

On utilise plutôt la méthode par équivalences successives lorsque les équivalences intermédiaires sont bien connues. Sinon, en cas de doute, il est préférable d'opérer en deux étapes, par double implication.

3 Autres types de raisonnements

3.1 Démonstration par disjonction des cas : exemple

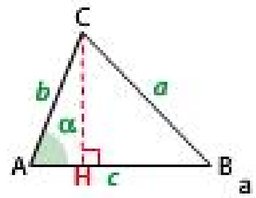
ABC est un triangle quelconque.
On note AB = c, AC = b, BC = a et α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.



On se propose de démontrer que aire(triangle ABC) $= \frac{1}{2} bc \sin\alpha$.

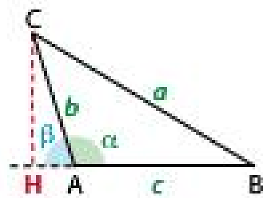
Pour cela, on va examiner les **deux seuls cas de figures possibles** : $\widehat{BAC}$ est un angle aigu ou $\widehat{BAC}$ est un angle obtus.

- **1er cas : $\widehat{BAC}$ est un angle aigu**



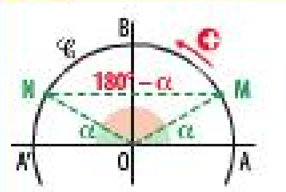
Dans le triangle rectangle AHC, CH = $b \sin\alpha$.
Or aire(ABC) $= \frac{1}{2}$ AB × CH. Donc aire(ABC) $= \frac{1}{2} bc \sin\alpha$.

- **2e cas : $\widehat{BAC}$ est un angle obtus**



Dans le triangle rectangle AHC, CH = $b \sin\beta$.
Or $\beta = 180° - \alpha$ et $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.
Donc CH = $b \sin\alpha$ et aire(ABC) $= \frac{1}{2} bc \sin\alpha$.

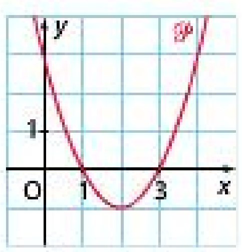
Note



M et N sont symétriques par rapport à OB, donc :
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

- **Conclusion :** Pour tout triangle ABC, aire(ABC) $= \frac{1}{2} bc \sin\alpha$.

3.2 Démonstration par utilisation d'un contre-exemple



f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
(P) est la proposition : « Pour tout nombre x, $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ ».
(P) est une proposition universelle.
Pour démontrer que (P) est une proposition fausse, il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire de prouver que la proposition (non P) :
« Il existe un nombre x tel que $x^2 - 4x + 3 < 0$ »
est une proposition vraie.
Pour $x = 2$, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 < 0$ donc (non P) est vraie.
Ainsi la proposition (P) est fausse.

Rappels

Ces rappels viennent compléter ceux qui se trouvent dans chaque chapitre.

1 Comparer des nombres

a, b, c et d sont des nombres quelconques.
Pour comparer deux nombres, on dispose de plusieurs méthodes.

- On utilise la calculatrice, lorsqu'on peut trouver des valeurs exactes ou approchées significatives.
- On étudie le signe de la différence car : « $a < b$ » équivaut à « $a - b < 0$ ».
- Lorsque les nombres sont **positifs**, on compare leurs carrés car : « $0 < a < b$ » équivaut à « $a^2 < b^2$ ».
- On utilise les règles de comparaison suivantes.

R1 Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

R2 Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

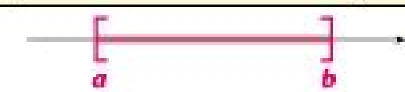
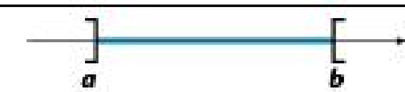
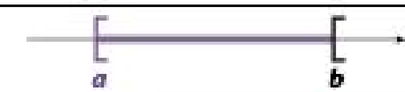
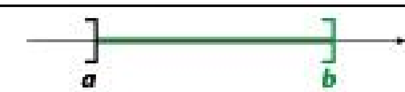
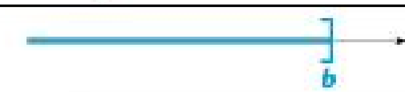
R3 Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

R4 Si $0 < a < b$ et $0 < c < d$, alors $ac < bd$.

R5 Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

2 Intervalles

Intervalle	Inégalité	Représentation sur une droite graduée
$[a ; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a ; b[$	$a < x < b$	
$[a ; b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a ; b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a ; +\infty[$	$x \geqslant a$	
$]-\infty ; b]$	$x \leqslant b$	

LOGIQUE
Vocabulaire de la logique
→ p. 346

- L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant **aux deux** intervalles à la fois.
Par exemple : $[1 ; 3] \cap]2 ; +\infty[=]2 ; 3]$.

- La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant à l'**un au moins** des intervalles.
Par exemple : $[1 ; 3] \cup]2 ; 5] = [1 ; 5]$.

3 Fonctions

3.1 Définitions

- D est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque nombre de D un **nombre unique noté** $f(x)$, appelé **image de** x par f.

Exemple. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.

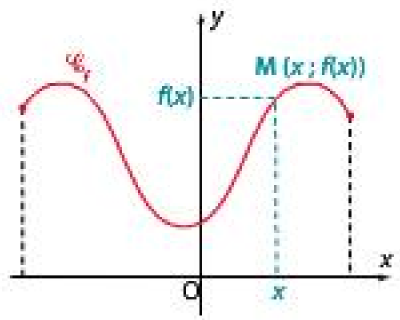
$f(0) = 0$: l'image de 0 est 0 ; $f(2) = \dfrac{2}{3}$: l'image de 2 est $\dfrac{2}{3}$.

- Si un nombre k est l'image d'un nombre x, c'est-à-dire si $f(x) = k$, alors on dit que x est **un antécédent** de k.

Exemple. Si $f(x) = x^2$, 2 a pour image 4 et 4 a pour antécédents 2 et -2.

3.2 Courbe représentative

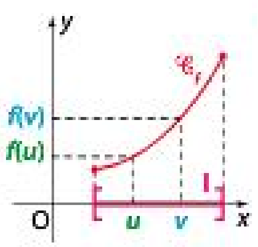
- Un repère du plan étant choisi, la **courbe représentative** de f, notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points $M(x ; f(x))$ où x appartient à D.



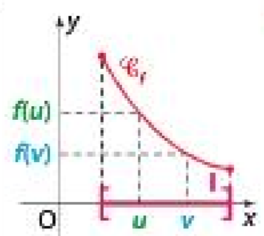
- M est un point de coordonnées $(a ; b)$, $a \in D$.
  - Si $b = f(a)$, alors $M \in \mathscr{C}_f$.
  - Si $b \neq f(a)$, alors $M \notin \mathscr{C}_f$.

3.3 Sens de variation

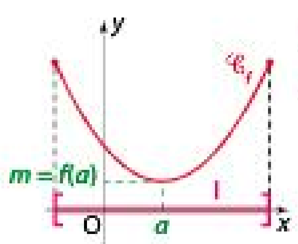
I est un intervalle contenu dans le domaine de définition D de la fonction f.



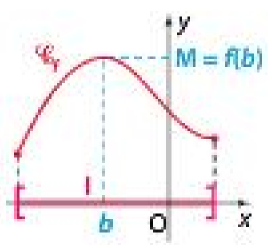
- f **est strictement croissante sur I** signifie que pour tous réels u et v de I :
$u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.



- f **est strictement décroissante sur I** signifie que pour tous réels u et v de I :
$u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.



- m **est le minimum de** f **sur I** signifie que pour tout réel x de I :
$f(x) \geqslant m$
avec $m = f(a)$.



- M **est le maximum de** f **sur I** signifie que pour tout réel x de I :
$f(x) \leqslant M$
avec $M = f(b)$.

4 Fonction affine

4.1 Définitions

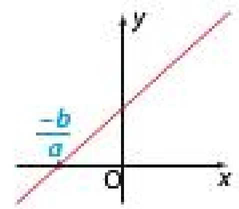
- Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres donnés.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Cette droite a pour équation $y = ax + b$.

a est le **coefficient directeur** de la droite.
b est l'**ordonnée à l'origine**.

4.2 Sens de variation

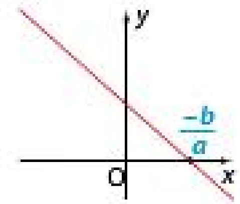
f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

- **Si $a > 0$**, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- **Si $a < 0$**, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

5 Fonctions polynômes du second degré et paraboles

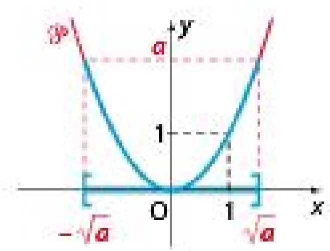
5.1 La fonction carré

La fonction f qui à chaque réel x **associe son carré** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

f est strictement :
- croissante sur $[0 ; +\infty[$;
- décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Ainsi :
$$0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$
$$a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2.$$



Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est appelée **parabole**.

Utiliser la parabole. La parabole permet de retenir les résultats suivants.

- L'équation $x^2 = a$ (avec $a > 0$) admet deux solutions $\sqrt{a}$ **et** $-\sqrt{a}$.
- L'inéquation $x^2 \leqslant a$ (avec $a > 0$) a pour solutions tous les nombres de l'intervalle $[-\sqrt{a} ; \sqrt{a}]$.

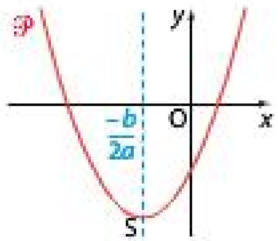
5.2 Fonction polynôme

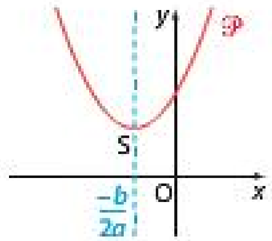
- La fonction f qui à chaque réel x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres connus, $a \neq 0$, est appelée **fonction polynôme du second degré ou fonction trinôme.**
- Sa courbe représentative est appelée **parabole.**

Cas $a > 0$

La parabole est « tournée » vers le haut ; f a un minimum m atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	m	↗

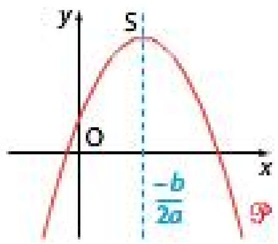


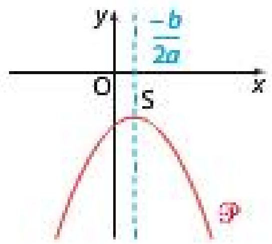


Cas $a < 0$

La parabole est « tournée » vers le bas ; f a un maximum M atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	M	↘





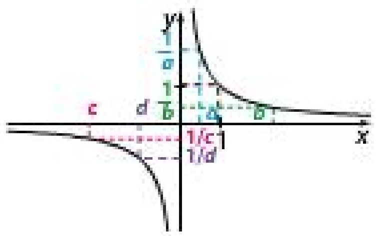
6 Fonction inverse et hyperbole

6.1 Fonction inverse

- La fonction f qui à chaque réel x **non nul associe son inverse** est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

f est strictement :
- décroissante sur $]-\infty\,;0[$;
- décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘



Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est appelée **hyperbole**.

Utiliser l'hyperbole. L'hyperbole permet de retenir les résultats suivants.

- $0 < a < b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > 0$.
- $c < d < 0 \Leftrightarrow 0 > \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{d}$.

6.2 Fonction homographique

On appelle **fonction homographique** toute fonction qui peut s'écrire sous la forme $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c, d sont des nombres connus avec $c \neq 0$ **et** $ad - bc \neq 0$. La courbe représentative est une **hyperbole**.

7 Statistiques

7.1 Moyenne

La **moyenne** de la série statistique ci-contre est le nombre noté $\overline{x}$ défini par :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{N} \text{ avec } N = n_1 + \ldots + n_p$$

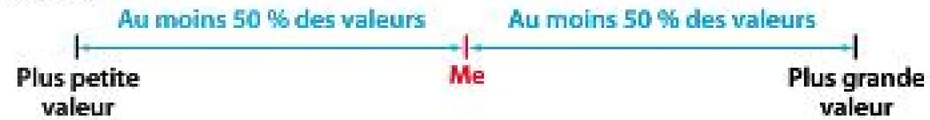
ou

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_px_p \text{ avec } f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Variable x_i	x_1	x_2	...	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	...	n_p
Fréquence f_i	f_1	f_2	...	...	f_p

7.2 Médiane

- La **médiane** d'une série statistique est le nombre, noté Me, qui partage la population selon le schéma suivant :



- Pratiquement, la liste des N valeurs étant **rangée par ordre croissant**, chacune figurant un nombre de fois égal à son effectif :
  - si N est impair, $N = 2k + 1$, alors Me est la valeur de rang $k + 1$;
  - si N est pair, $N = 2k$, alors Me est la demi-somme des valeurs de rang k et $k + 1$.

7.3 Quartiles

La liste des N valeurs est **rangée par ordre croissant**.

- Le **premier quartile** est la plus petite valeur Q_1 de la liste telle qu'au moins un quart des valeurs de la liste sont inférieures ou égales à Q_1.
- Le **troisième quartile** est la plus petite valeur Q_3 de la liste telle qu'au moins les trois quarts des valeurs de la liste sont inférieures ou égales à Q_3.

8 Probabilités

On note E l'univers de l'expérience, $e_1, \ldots, e_n$ les issues et $p(e_i)$ la probabilité de e_i.

- Si $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, alors $p(e_1) + \ldots + p(e_n) = 1$.
- La **probabilité d'un événement** A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.
- Lorsque les événements élémentaires sont équiprobables :

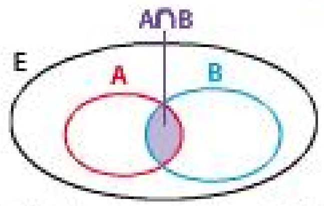
$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issue favorables à A}}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$

- A étant un événement de probabilité $p(A)$, son événement contraire $\overline{A}$, a pour probabilité :

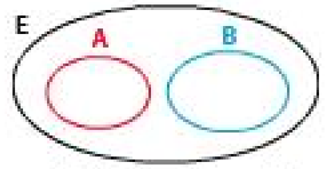
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

- Quels que soient les événements A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

- Lorsque A et B n'ont pas d'issues en commun, on dit qu'ils sont **incompatibles**. On écrit $A \cap B = \varnothing$. Dans ces conditions, $p(A \cap B) = 0$ et $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$.



$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$



$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

9 Géométrie repérée

9.1 Coordonnées

Dans tout repère, les coordonnées du milieu I d'un segment [AB] sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Dans un repère orthonormé, la distance AB entre deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ est telle que :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

9.2 Équations de droites

- Toute droite (AB) **non parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme $\boldsymbol{y = mx + p}$.

Son coefficient directeur m est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

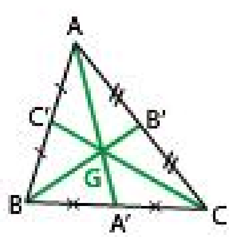
$x_B \neq x_A$ car (AB) n'est pas parallèle à l'axe (Oy).

- Si la droite (AB) est **parallèle à l'axe des ordonnées**, une de ses équations est $\boldsymbol{x = x_A}$ (ou $x = x_B$).
- Si la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses, une de ses équations est $\boldsymbol{y = y_A}$ (ou $y = y_B$).
- Dans un repère, la droite d a pour équation $y = mx + p$ et la droite d' a pour équation $y = m'x + p'$.

$$d \text{ est parallèle à } d' \Leftrightarrow m = m'$$
$$d \text{ et } d' \text{ sont sécantes} \Leftrightarrow m \neq m'$$

- Dire que « Trois points A, B, C, dont les abscisses sont distinctes deux à deux, sont alignés » équivaut à dire que « Les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur ».

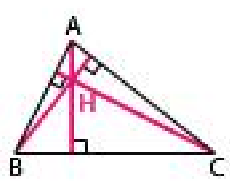
10 Les triangles : droites et points remarquables



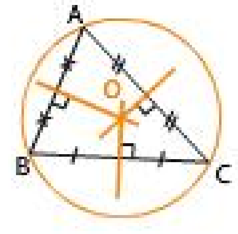
ABC est un triangle.

- Les **médianes** d'un triangle sont concourantes.
- Leur point d'intersection G est le **centre de gravité** du triangle.

$AG = \frac{2}{3}AA'$; $BG = \frac{2}{3}BB'$ et $CG = \frac{2}{3}CC'$.

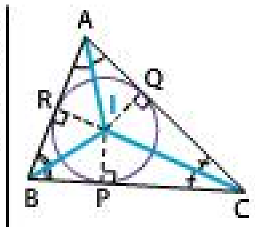


- Les **hauteurs** d'un triangle sont concourantes.
- Leur point d'intersection H est l'**orthocentre** du triangle.



- Les **médiatrices** d'un triangle sont concourantes.
- Leur point d'intersection O est le **centre du cercle circonscrit au triangle**.

OA = OB = OC.



- Les **bissectrices** d'un triangle sont concourantes.
- Leur point d'intersection I est équidistant de chacun des trois côtés du triangle. I est le **centre du cercle inscrit**.

IP = IQ = IR.

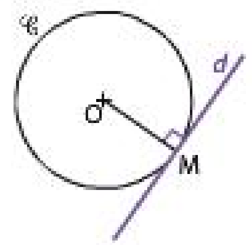
11 Reconnaître un quadrilatère

- « ABCD est un parallélogramme » équivaut à « Ses côtés opposés sont parallèles » **ou** « Ses diagonales ont le même milieu ».

- Un parallélogramme est un :

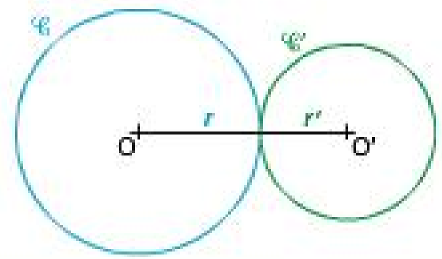
losange	rectangle	carré
• si deux côtés consécutifs ont la même longueur ; • si ses diagonales sont perpendiculaires.	• si deux côtés consécutifs sont perpendiculaires ; • si ses diagonales ont la même longueur.	• s'il est à la fois un rectangle et un losange.

12 Cercles : droite tangente, cercles tangents

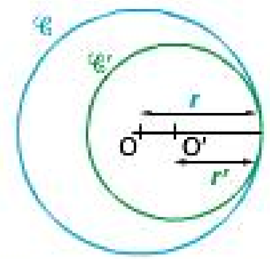


- La **tangente au cercle** 𝒞 en un point M de 𝒞 est la droite perpendiculaire au point M à la droite (OM).

- 𝒞 est un cercle de centre O et de rayon r et 𝒞′ est un cercle de centre O′ et de rayon r' avec $r > r'$.



« Les cercles sont tangents extérieurement » $\Leftrightarrow$ « $OO' = r + r'$ »



« Les cercles sont tangents intérieurement » $\Leftrightarrow$ « $OO' = r - r'$ »

13 Les vecteurs

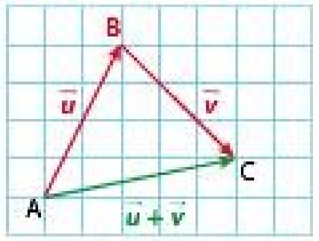
13.1 Notion de vecteur

- **Deux vecteurs égaux** sont deux vecteurs qui ont même direction, même sens et même longueur.
- A, B, C, D sont quatre points deux à deux distincts **et non alignés**.

« $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » équivaut à « ABDC est un parallélogramme ».
« $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ opposés » équivaut à « $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ ».

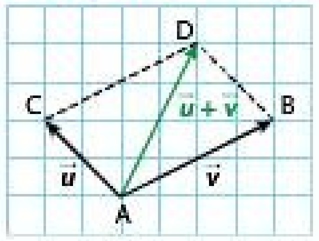
13.2 Somme de deux vecteurs

Relation de Chasles



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Vecteurs « bout à bout »

Règle du parallélogramme



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
Vecteurs de même origine

13.3 Vecteurs colinéaires

- Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** équivaut à dire qu'il existe un nombre k ($k \neq 0$) tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
- Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(AB) // (CD)	⇔	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires	⇔	Il existe un nombre k ($k \neq 0$) tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

- Dire que trois points A, B, C, distincts deux à deux, sont alignés équivaut à dire qu'il existe un nombre k ($k \neq 0$) tel que :

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$$

13.4 Repère et coordonnées

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$:

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
- $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x' ; y')$. k est un nombre.
  - Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$.
  - Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx ; ky)$.
  - « $\vec{u} = \vec{v}$ » équivaut à « $x = x'$ et $y = y'$ ».