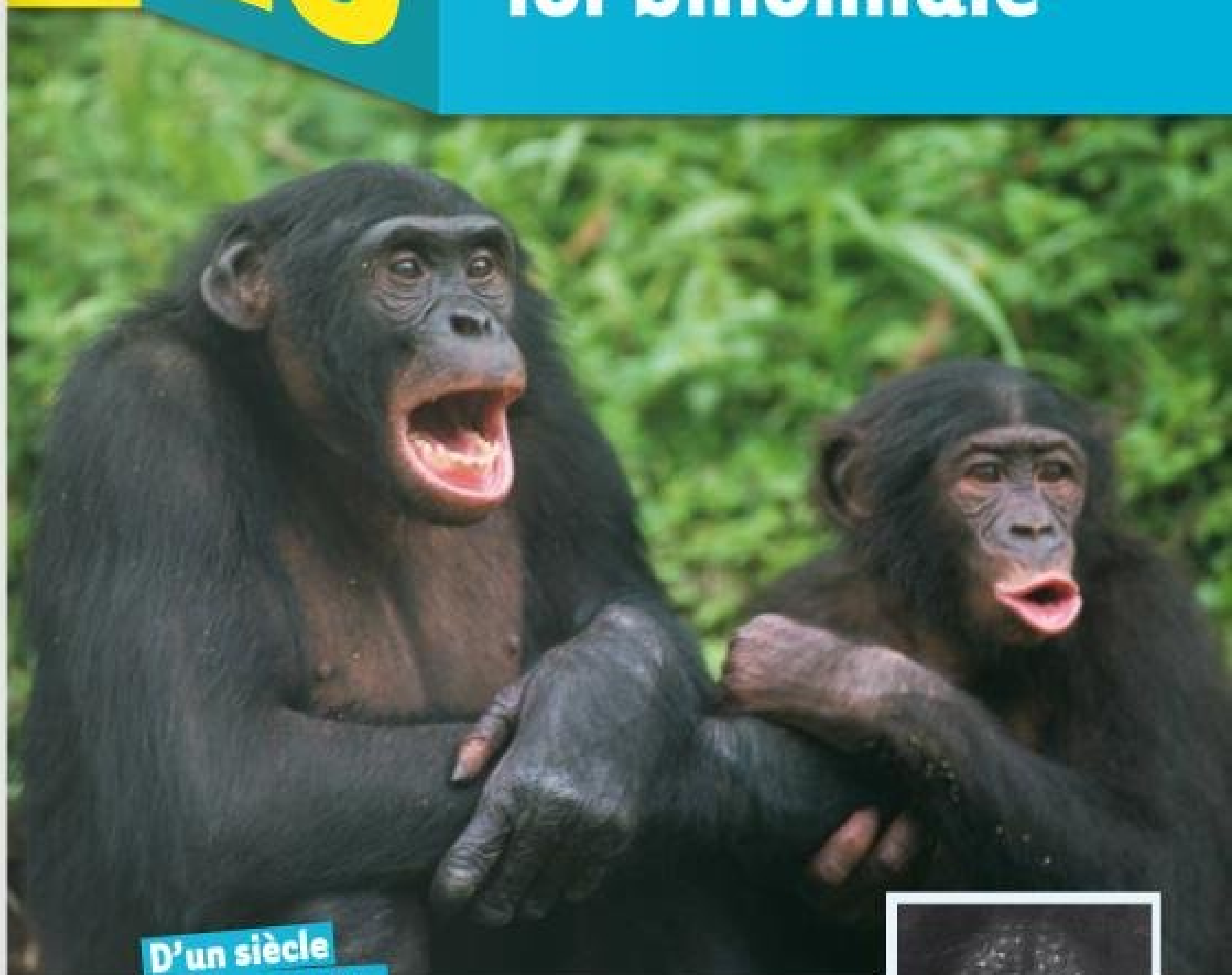
CHAPITRE

13 Probabilités : loi binomiale



D'un siècle à un autre

Au début du XVIIIe siècle, Jacob Bernoulli consolide les bases du calcul des probabilités dans son œuvre majeure : le traité *Ars Conjectandi*.

Mais ce calcul n'a été introduit que récemment en biologie pour la détermination de génomes ancestraux. Il est actuellement un des axes privilégiés de recherche pour la reconstruction d'arbres phylogénétiques à partir de données moléculaires.

Ces méthodes probabilistes ont pour but de mettre en évidence les éventuels ancêtres communs.

En savoir plus sur **Jacob Bernoulli**

→ Chercheurs d'hier p. 333

Activité 1 SIMULATION DE LA LOI DU NOMBRE DE SUCCÈS TICE

Une expérience consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique parfait.
On s'intéresse alors au nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des trois lancers.

Durant d'une expérience, le numéro 6 peut sortir 0, 1, 2 ou 3 fois.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de succès (sortie du 6) au terme des trois lancers.

Nous allons simuler n fois ($n \leqslant 2\,500$) cette expérience en mesurant les fréquences de réalisation des divers événements du type « $X = k$ » au cours de ces n expériences.

Protocole de simulation

- Lors d'un lancer, on affiche 1 (succès) lorsque le numéro 6 sort ; sinon, on affiche 0.
- Au terme des trois lancers, le nombre de succès correspond à la somme des 1 obtenus. Ainsi, X ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2 ou 3.
- La fréquence de réalisation d'un événement du type « $X = k$ » au cours de n expériences est le rapport :

$$\frac{\text{nombre de réalisations de } k \text{ succès}}{\text{nombre d'expériences}}.$$

1 **a)** Ouvrez une feuille de calcul puis complétez les cellules A2, B2, C2, D2 et E2. outil 10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Expérience n°	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Nombre de succès	X=0	X=1	X=2	X=3
2									

Aide
Dans B2, C2 et D2 : =SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)=6;1;0).
Dans E2 : =SOMME(B2:D2).

b) Faites afficher la fréquence de réalisation de chaque événement au cours de ces n lancers.

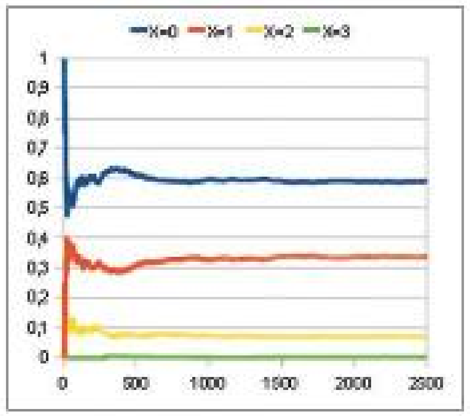
Aide
Dans F2, on calcule la fréquence de l'événement « X = 0 » : =NB.SI(E$2:E2;0)/$A2.
Dans G2, H2 et I2 : adapter la formule précédente.

c) Sélectionnez la ligne 2 puis recopiez vers le bas jusqu'à la ligne 2501 pour obtenir une simulation de 2 500 expériences.

2 **a)** Faites afficher un graphique représentant les fréquences des divers événements en sélectionnant les colonnes A, F, G, H et I.

Aide
Type de diagramme XY, option Lignes seules.

outil 11



b) Utilisez **« la loi des grands nombres »** pour donner une estimation de la probabilité de chacun des événements « $X = k$ ».

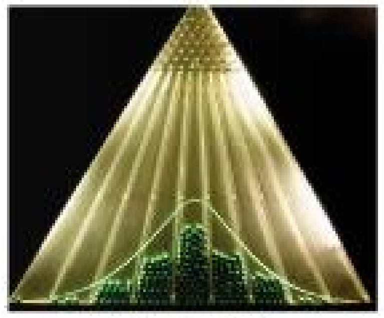
→ *activité 2, chapitre 12, page 293*

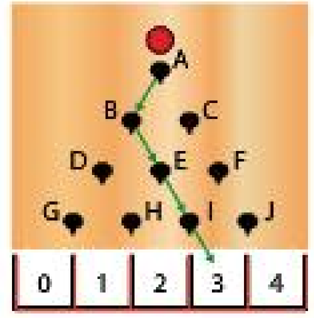
Conclusion

Les valeurs obtenues de $P(X = k)$ donnent une estimation de la loi de probabilité de X, appelée loi du nombre de succès.

Activité 2 LA PLANCHE DE GALTON

La planche de Galton est un dispositif inventé par Sir Francis Galton (1822-1911). Il est constitué d'une planche où sont plantés des clous disposés en quinconce. Une bille lâchée sur la planche décrit un chemin en passant soit à gauche soit à droite du clou, avec la même probabilité, et termine sa course dans un bac.



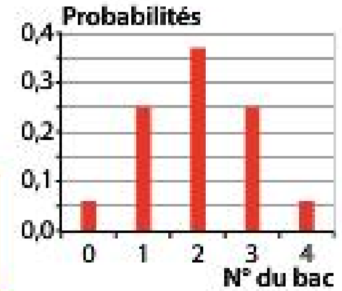


Le schéma ci-contre représente ce dispositif pour une expérimentation à quatre niveaux (quatre rangées de clous).

1 Représentez par un arbre les différents chemins possibles pour une bille lâchée au-dessus du clou A.

2 On associe à chaque chemin une issue correspondant à l'un des bacs numérotés 0, 1, 2, 3 ou 4. Tous les chemins sont équiprobables. Déterminez la probabilité de chacune des issues.

Remarque
Les résultats que vous avez obtenus peuvent être représentés sous la forme d'un diagramme en bâtons (voir ci-contre).
Cette représentation est associée à une loi de probabilité appelée loi binomiale.



Activité 3 ÉCHANTILLONNAGE ET PRISE DE DÉCISION

Note
Faire cette activité nécessite d'avoir vu le cours sur la loi binomiale.

1 **Problématique**

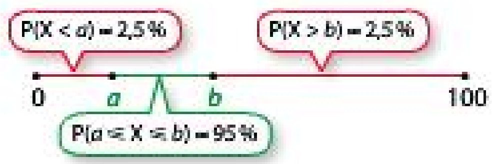
Au Pays basque, un médecin veut savoir si le pourcentage d'habitants de la région appartenant au groupe sanguin O^- correspond à la valeur de 6 %, connue pour la population globale en France métropolitaine.
Pour le vérifier, il constitue, au hasard, un échantillon de 100 habitants de la région et détermine leur groupe sanguin. Il constate que 19 personnes appartiennent au groupe O^-.
Ainsi, la fréquence de l'événement « la personne est O^- », observée sur cet échantillon, est $f = 0{,}19$.
Comment ce médecin peut-il répondre à la question qu'il se pose à l'aide de cette valeur observée f ?

2 **Analyse de la situation**

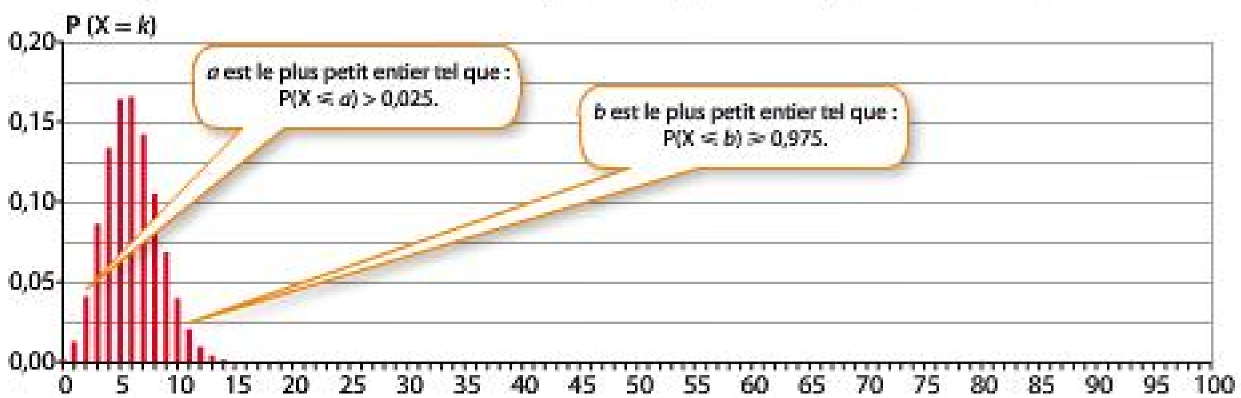
- L'échantillon est prélevé au hasard et la population est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer qu'il s'agit d'un tirage avec remise de n personnes.
- Si la proportion du caractère O^- était $p = 0{,}06$, la constitution de l'échantillon serait un schéma de Bernoulli de taille 100, associé à l'épreuve dont les issues sont S et $\overline{S}$, avec S : « la personne est O^- », de probabilité $p = 0{,}06$. La variable aléatoire X, qui indique le nombre de personnes O^- dans un échantillon de 100 personnes, suivrait alors une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}06$.
On suppose donc que $p = 0{,}06$.
Comment juger de la validité de cette hypothèse à partir de l'observation de f ?

3 <u>Mise en place d'un protocole de prise de décision</u>

- On choisit de fixer le seuil de décision à 5 %.
- On cherche alors deux nombres entiers a et b ($a < b$) entre 0 et 100 tels que la variable aléatoire X vérifie les conditions ci-dessous.



La loi de X est représentée par le diagramme en bâtons ci-dessous.
On adoptera les définitions de a et b indiquées. Ainsi, $P(a \leq X \leq b)$ est d'au moins 95 %.



4 **a)** Reproduisez puis complétez à l'aide de la calculatrice le tableau des probabilités cumulées de X.

k	0	1	2	3	...	10	11	12	13
$P(X \leq k)$									

outil 12

outil 13

b) Déduisez-en les valeurs des nombres entiers a et b.

5 On définit alors l'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence selon la loi binomiale par :

$$I = \left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right], \text{ où } n \text{ est la taille de l'échantillon.}$$

En supposant que $p = 0{,}06$, on sait, avant de prélever un échantillon aléatoire de taille 100, que la fréquence de personnes du type O⁻ dans un tel échantillon appartient à I avec une probabilité d'au moins 0,95.
Autrement dit, si l'hypothèse est vraie, il y a moins de 5 % de chances de prélever un échantillon aléatoire de taille 100 pour lequel la fréquence du caractère étudié est en dehors de l'intervalle I.
Indiquez l'intervalle de fluctuation d'une fréquence sur un échantillon de taille $n = 100$.

6 On utilise alors la règle de décision suivante : si la fréquence observée appartient à I, on accepte l'hypothèse $p = 0{,}06$ dans la population basque ; sinon, on la rejette.
Quelle décision va-t-on prendre à partir de la fréquence observée sur l'échantillon du médecin ?

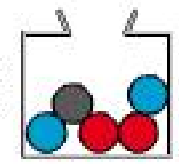
Problème ouvert Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

Une tombola a lieu une fois par semaine. Sur cent billets, trois sont gagnants. Chaque billet coûte 2 €. Anna prévoit d'acheter dix billets la même semaine alors que Boris envisage lui d'acheter un billet pendant dix semaines. Quelle est la meilleure stratégie pour obtenir au moins un billet gagnant ?

1 Répétition d'épreuves identiques et indépendantes

Parfois, une expérience aléatoire consiste à répéter n fois une même expérience appelée **épreuve**.
Dans ce chapitre, on sera toujours dans le cas où l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves qui l'ont précédée. On dit alors que ces épreuves sont **indépendantes**.

1.1 Étude d'un exemple : tirage avec remise



Une urne contient cinq boules indiscernables : deux bleues, deux rouges et une noire. L'**expérience aléatoire** étudiée ici consiste à tirer au hasard successivement deux boules de l'urne **avec remise** et à noter les couleurs obtenues.

Définition de l'épreuve

Analysons le protocole. On remet la boule après le premier tirage, donc la composition de l'urne lors du second tirage est identique à celle rencontrée lors du premier tirage.

Cette expérience est donc la répétition de l'épreuve « tirer au hasard une boule dans l'urne et noter sa couleur ». On répète cette épreuve deux fois.

De plus, le résultat du second tirage ne dépend pas de l'issue du premier : les deux épreuves (1er tirage et 2e tirage) sont indépendantes.

Attention, il n'en serait pas de même lors d'un tirage sans remise.

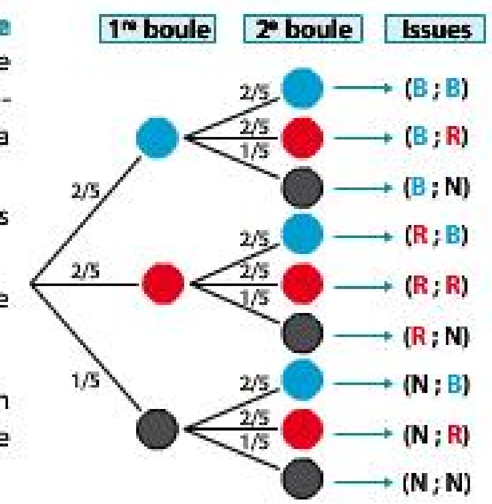
Calcul des probabilités lors d'une épreuve

L'univers associé à chaque épreuve est l'ensemble des cinq boules qui ont toutes la même probabilité $\frac{1}{5}$ d'être tirées. Les événements B (boule bleue), R (boule rouge) et N (boule noire) ont donc respectivement pour probabilités $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$.

Construction de l'arbre associé à l'expérience aléatoire.

L'expérience aléatoire peut être illustrée par un **arbre dit pondéré** qui permet le calcul des probabilités. Pour réaliser l'arbre pondéré, on procède de la manière suivante :

- on dessine les branches qui représentent les résultats obtenus lors de la répétition des deux épreuves ;
- on inscrit sur chacune des branches la probabilité de l'événement correspondant.



Issues de l'expérience.

On associe à chaque chemin la liste des résultats lus en parcourant ce chemin. Cette liste est une issue de l'expérience.
Ainsi, le chemin → R → N représente l'issue (R ; N).

Probabilité d'une issue de l'expérience

On admettra que la probabilité d'une issue s'obtient en faisant le produit des probabilités inscrites sur le chemin représentant cette issue.

Par exemple, $P(R ; N) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$; $P(R ; B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

1.2 Cas général

Lorsqu'une expérience aléatoire est la répétition de n épreuves identiques et indépendantes, on peut la représenter par un arbre pondéré.

On admettra que :

- une issue est une liste ordonnée de résultats, représentée par un chemin ;
- la probabilité d'une issue est le produit des probabilités de chacun de ces résultats.

1.3 Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

Les règles suivantes précisent les conditions à respecter pour construire un arbre pondéré représentant une expérience aléatoire et calculer les probabilités des événements.

Règle 1 La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud vaut 1.

Ceci est la loi des nœuds.

Règle 2 La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ceci est la loi des chemins.

Règle 3 La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de A.

Les exemples qui suivent exploitent l'expérience aléatoire du paragraphe 1.1.

Exemple. Calcul de la probabilité d'un événement

Notons U l'événement « tirage unicolore ».

Trois chemins conduisent à U : → B → B ; → R → R ; → N → N.

D'après la règle 3 et la loi des chemins (règle 2) :

$$P(U) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{25}.$$

Exemple. Loi d'une variable aléatoire. Considérons la variable aléatoire Z qui indique le nombre de boules rouges obtenues. Lors des deux tirages, on ne peut obtenir que zéro, une ou deux boules rouges donc Z prend les valeurs 0, 1 ou 2.

- L'événement « $Z = 2$ » correspond au seul chemin : → R → R.

Donc $P(Z = 2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

- « $Z = 1$ » est réalisé à partir des chemins :

→ B → R ; → R → B ; → R → N ; → N → R.

D'où $P(Z = 1) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{12}{25}$.

- « $Z = 0$ » est réalisé à partir des chemins :

→ B → B ; → B → N ; → N → B ; → N → N.

D'où $P(Z = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Ainsi, la loi de probabilité Z est définie par :

k	0	1	2
$P(Z = k)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

2 Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli

Définition 1 Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet **exactement deux issues** : S (Succès), de probabilité p, et $\overline{S}$ (Échec), de probabilité $q = 1 - p$.

Exemple. On lance un dé cubique parfait et on s'intéresse à la sortie du numéro 6.

Cette expérience est une épreuve de Bernoulli telle que S signifie « sortie du 6 », $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$.

Définition 2 Dans une épreuve de Bernoulli, notons Y la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et la valeur 0 en cas d'échec.

La loi de probabilité de Y est donnée ci-contre.

On dit que Y suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p.

k	0	1
$P(Y = k)$	$1 - p$	p

Conséquences. L'espérance et la variance de Y sont $E(Y) = p$ et $V(Y) = p(1 - p) = pq$.

En effet, $E(Y) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$ et $V(Y) = (1 - p) \times 0^2 + p \times 1^2 - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

3 Schéma de Bernoulli d'ordre *n*. Loi binomiale

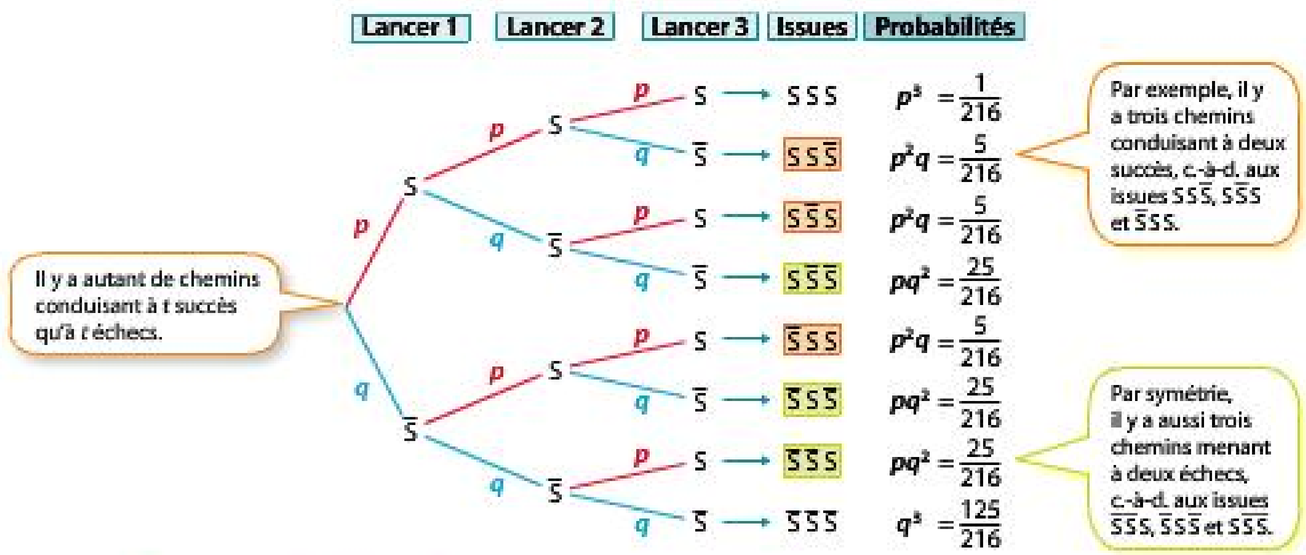
3.1 Étude d'un exemple

On lance trois fois de suite un dé cubique parfait et on s'intéresse au nombre de sorties du numéro 6 au terme de ces trois lancers. → *Activité 1, page 316*

Cette expérience est la répétition de l'épreuve de Bernoulli : « lancer un dé cubique parfait » avec l'issue S : « sortie du 6 », de probabilité $p = \frac{1}{6}$.

Animation

Arbre pondéré associé à l'expérience. Les probabilités de chacune des issues sont calculées en utilisant la loi des chemins.



Loi du nombre de succès. Notons X la variable aléatoire qui à chaque issue associe le nombre de succès au terme des trois lancers. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

- L'événement « X = 2 » est réalisé en suivant les trois chemins dont les issues correspondantes ont la même probabilité p^2q, d'où $P(X = 2) = 3\,p^2q$.

De même, $P(X = 0) = q^3$, $P(X = 1) = 3pq^2$ et $P(X = 3) = p^3$ avec $p = \frac{1}{6}$ et $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

- On a ainsi défini la loi de probabilité de X, appelée **loi du nombre de succès**.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$q^3 = \frac{125}{216}$	$3pq^2 = \frac{75}{216}$	$3p^2q = \frac{15}{216}$	$p^3 = \frac{1}{216}$

On dit aussi que X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$.

3.2 Loi binomiale de paramètres n et p

Définition 3 On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n l'expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

L'exemple du paragraphe **3.1** se généralise dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre n.

Définition 4 Le **nombre de chemins** de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté $\binom{n}{k}$.

On lit « k parmi n ».

Les nombres entiers $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux.

Exemple. Dans la situation du paragraphe **3.1**, l'événement « X = 2 » est réalisé à partir de trois chemins donc $\binom{3}{2} = 3$. De même, $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.

Théorème 1 On considère un schéma de Bernoulli d'ordre n où chaque épreuve est telle que la probabilité de S est p. La loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre k de succès au terme des n épreuves est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ pour tout entier naturel } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit **une loi binomiale de paramètres n et p**.

Remarque. Si $n = 1$, la variable aléatoire X est telle que $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

On retrouve la loi de Bernoulli, qui a pour espérance p.

3.3 Espérance, variance, écart-type

De façon pratique, on peut dire que si l'on gagne un euro par succès, on peut espérer gagner à chaque épreuve, en moyenne, p euro. La répétition de n épreuves identiques et indépendantes nous laisse espérer alors un gain moyen de np euros. On conjecture donc que $E(X) = np$. Cette conjecture est validée par le théorème 2 (admis).

Théorème 2 X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :

- $E(X) = np$; • $V(X) = np(1 - p) = npq$; • $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

3.4 Les coefficients binomiaux

Théorème 3 Pour tous nombres entiers n et k :

- si $0 \leqslant k \leqslant n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ • si $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Ceci est la formule de Pascal.

• Exercice 57 → p. 340
• Exercice 64, Roc → p. 342

Démonstration. • **On suppose $0 \leqslant k \leqslant n$.** Sur l'arbre, il y a autant de chemins conduisant à t succès qu'à t échecs. Or, dire qu'un chemin indique k succès pour n répétitions équivaut à dire que ce chemin indique $n - k$ échecs. Il y a donc autant de chemins de chacun de ces types d'où $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

• **On suppose $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.** On considère l'arbre à $n + 1$ répétitions d'une épreuve de Bernoulli. Les chemins qui indiquent $k + 1$ succès sont de deux types : ceux qui se terminent par S (type 1) et ceux qui se terminent par $\overline{S}$ (type 2).

- Un chemin du type 1 indique k succès lors des n premières répétitions ; il y en a donc $\binom{n}{k}$.
- Un chemin du type 2 indique les $k + 1$ succès lors des n premières répétitions ; il y en a $\binom{n}{k+1}$.

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ chemins donnent $k + 1$ succès en $n + 1$ répétitions donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Animation

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal, représenté ci-contre, permet de calculer, de proche en proche, les coefficients binomiaux en utilisant la formule de Pascal.

L'entier $\binom{n}{k}$ est à l'intersection de la ligne n et de la colonne k.

- On place les valeurs évidentes :

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ et } \binom{n}{n} = 1.$$

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4 →	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

La calculatrice affiche directement les entiers $\binom{n}{k}$.

- On complète le triangle en suivant le processus donné en exemple : $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$

4 Échantillonnage et prise de décision

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est p. On souhaite juger cette hypothèse. Pour cela, on prélève dans la population au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f de ce caractère.

Hypothèse : proportion supposée p

Échantillon de taille n
Fréquence observée f

4.1 Intervalle de fluctuation à 95 % selon la loi binomiale

Définition 5 L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence, sur un échantillon aléatoire de taille n, selon la loi binomiale de paramètres n et p, est :

$$\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right] \text{ avec } \begin{cases} a : \text{plus petit entier tel que } P(X \leqslant a) > 0{,}025 \\ b : \text{plus petit entier tel que } P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975 \end{cases}$$

Conditions admises : $n \geqslant 30$; $np \geqslant 5$; $n(1 - p) \geqslant 5$.

4.2 Règle de prise de décision

Règle 4

- Si f appartient à I, l'hypothèse est acceptée au seuil de 95 %.
- Si f n'appartient pas à I, on rejette l'hypothèse au seuil de 5 %.

La probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, est inférieure à 5 %.

Application

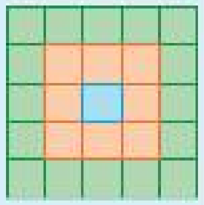
Compléments numériques

OBJECTIF 1 Utiliser un arbre pondéré

- La répétition de n épreuves identiques et indépendantes peut se représenter par un **arbre pondéré**. On utilise alors les différents chemins pour le calcul de probabilités.
- **Loi des chemins :** une issue représentée par un chemin, a pour probabilité le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
- **Probabilité d'un événement :** c'est la somme des probabilités des issues associées à tous les chemins qui conduisent à la réalisation de cet événement.

EXERCICE RÉSOLU A Répéter une épreuve et calculer des probabilités

Une épreuve consiste à lancer une fléchette sur une cible du type ci-contre. On considère les événements V : « le joueur atteint la zone verte », O : « le joueur atteint la zone orange » et B : « le joueur atteint la zone bleue ». On admet qu'à chaque lancer le joueur atteint la cible sans viser de zone particulière.



1. Quelles sont les probabilités des événements V, B et O ?

2. Le joueur lance une volée de trois fléchettes de façon indépendante.
Quelle est la probabilité qu'il atteigne lors de ces trois lancers :

a) trois fois la zone bleue (événement C) ? **b)** trois fois une même zone (événement D) ?

Méthode

1. On utilise le modèle associé à l'épreuve qui définit la probabilité d'atteindre une zone par $\frac{\text{aire (zone)}}{\text{aire (cible)}}$.

2. On représente la répétition de trois épreuves identiques et indépendantes par un arbre pondéré.
Sa construction dépend des trois issues V, O, B d'une épreuve.

Remarque
Il n'est pas nécessaire de construire la totalité de l'arbre.

a) On repère le chemin qui conduit à la réalisation de l'événement C.
On applique alors la loi des chemins.

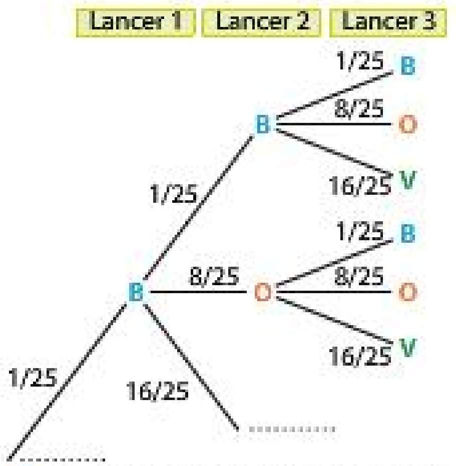
b) On cherche tous les chemins qui conduisent à la réalisation de l'événement D.
On calcule la somme des probabilités des issues associées à tous ces chemins.

Solution

1. L'unité d'aire choisie est celle d'un carreau. La cible a pour aire 25 et les différentes zones respectivement 1 (bleu), 8 (orange) et 16 (vert), donc :

$$P(V) = \frac{16}{25},\ P(O) = \frac{8}{25} \text{ et } P(B) = \frac{1}{25}.$$

2. On construit le début de l'arbre pondéré.



a) Un seul chemin, $\rightarrow B \rightarrow B \rightarrow B$, conduit à la réalisation de l'événement C, donc :

$$P(C) = \frac{1}{25} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{15\,625}.$$

b) La réalisation de D correspond à trois chemins : $\rightarrow V \rightarrow V \rightarrow V$, $\rightarrow O \rightarrow O \rightarrow O$ et $\rightarrow B \rightarrow B \rightarrow B$. Donc :

$$P(D) = \left(\frac{16}{25}\right)^3 + \left(\frac{8}{25}\right)^3 + \left(\frac{1}{25}\right)^3 = \frac{4\,609}{15\,625}.$$

Mise en pratique

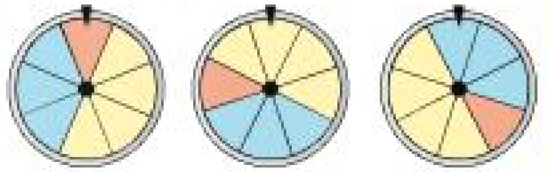
1 On reprend la situation de l'exercice résolu A où le joueur lance une volée de trois fléchettes sur la cible.

1. Quelle est la probabilité de l'événement E : « le joueur atteint les trois zones » ?

2. Même question avec l'événement F : « le joueur atteint exactement deux zones ».

3. On appelle Z la variable aléatoire qui à chaque issue associe le nombre de zones atteintes lors d'une volée de trois fléchettes. Indiquez la loi de probabilité de Z.

2 Lors d'une fête foraine, on propose une loterie. Pour un joueur, la partie consiste à lancer successivement trois roues indépendantes.
À l'arrêt des roues, un repère indique la couleur obtenue sur chacune d'elles.



Pour jouer, on achète un ticket à 12 euros. La personne gagne un lot d'une valeur de :
- 1 024 €, si les trois roues indiquent rouge ;
- 64 €, si les trois roues indiquent bleu ;
- 20 €, si les trois roues indiquent jaune ;
- 8 €, si les trois couleurs sortent.

Sinon, il ne gagne rien.

1. Construisez l'arbre pondéré associé à l'expérience aléatoire.

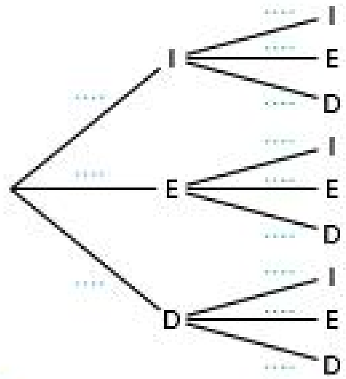
2. On appelle G la variable aléatoire qui donne la valeur du lot obtenu.

a) Déterminez la loi de probabilité de G.

b) Calculez E(G). Cette loterie est-elle favorable à l'organisateur ?

3 Au secrétariat d'un lycée, chaque élève a un dossier scolaire qui indique en particulier son régime : demi-pensionnaire D, interne I ou externe E. Un professeur tire un dossier au hasard, l'examine, puis le remet en place. Le trimestre suivant il consulte de nouveau les dossiers, dans les mêmes conditions.
La probabilité que les deux dossiers soient ceux d'un interne est 0,09. La probabilité que l'un des dossiers soit celui d'un interne et que l'autre soit celui d'un externe est 0,12.

1. Reproduisez puis complétez l'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.



Aide
- Utilisez le chemin $\rightarrow I \rightarrow I$ pour trouver la probabilité de I.
- Utilisez les chemins $\rightarrow I \rightarrow E$ et $\rightarrow E \rightarrow I$ pour en déduire la probabilité de E.

2. Calculez la probabilité des événements A : « les deux dossiers sont ceux d'un demi-pensionnaire » et B : « les deux dossiers sont l'un d'un externe et l'autre d'un demi-pensionnaire ».

4 Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque :

– 5 buts avec une probabilité de 0,2 (événement A) ;
– 4 buts avec une probabilité de 0,5 (événement B) ;
– 3 buts avec une probabilité de 0,3 (événement C).

Chaque joueur, à l'entraînement, tire deux séries de cinq pénaltys. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des séries sont indépendants.
On choisit un joueur au hasard.

1. a) Dressez l'arbre pondéré qui représente la séance de tirs aux deux séries de pénaltys.

b) Quelle est la probabilité que le joueur réussisse tous ses tirs lors des deux séries ?

2. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de buts marqués lors des deux séries.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminez la loi de probabilité de X.

c) L'entraîneur considère que le joueur a réussi son entraînement s'il a marqué au moins huit buts. Quelle est la probabilité que le joueur réussisse son entraînement ?

OBJECTIF 2 Utiliser la loi binomiale

- Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve à deux issues, S et $\overline{S}$. On pose $p = P(S)$.
- Si on répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, on définit un **schéma de Bernoulli d'ordre** n. Alors la variable aléatoire X qui indique **le nombre de succès** au terme des n épreuves suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Pour tout entier naturel k, $0 \leqslant k \leqslant n$: $\mathbf{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$. → exercice résolu B

L'espérance mathématique de X est alors : $\mathbf{E(X) = np}$. → exercice résolu C

EXERCICE RÉSOLU B Reconnaître une loi binomiale et calculer des probabilités

Un test d'aptitude consiste à poser une série de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, deux réponses sont proposées dont une seule est correcte.
Un candidat répond chaque fois au hasard.
Il est reconnu apte s'il obtient au moins trois réponses correctes lors du test.

1. Justifiez que le test correspond à un schéma de Bernoulli ; précisez la nature de l'épreuve.
2. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses correctes.
a) Calculez $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.
b) Quelle est la probabilité qu'un candidat qui répond au hasard soit reconnu apte ?

Méthode	Solution
1. On définit l'épreuve qui va être répétée.	**1.** Une épreuve consiste à répondre au hasard à une question posée.
• On précise l'issue S et on détermine P(S).	• On note S l'issue : « réponse correcte ». On pose $p = P(S) = 0{,}5$.
• On s'assure de la répétition de n épreuves identiques et indépendantes.	• Le candidat répond à quatre questions indépendantes donc le test correspond à un schéma de Bernoulli d'ordre 4.
2. a) On indique la loi du nombre de succès.	**2. a)** La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}5$.
• On calcule $P(X = 3)$ en utilisant la formule de calcul de k succès en n répétitions. Ici $n = 4$, $k = 3$ et $p = 0{,}5$. **Note** : Le triangle de Pascal ou la calculatrice permettent d'obtenir les coefficients binomiaux.	• Ainsi, $P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0{,}5^3 \times (1 - 0{,}5)^{4-3}$. Or le coefficient binomial est $\binom{4}{3} = 4$, donc $P(X = 3) = 4 \times 0{,}5^3 \times 0{,}5 = 0{,}25$.
• De même, on calcule avec $n = 4$, $k = 4$ et $p = 0{,}5$.	• De même, $P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0{,}5^4 \times (1 - 0{,}5)^0$ donc $P(X = 4) = 1 \times 0{,}5^4 \times 1 = 0{,}0625$.
b) On traduit l'événement comme une réunion d'événements incompatibles.	**b)** L'événement A : « le candidat est apte » signifie « $X \geqslant 3$ ». Cet événement est réalisé lorsque le candidat obtient soit trois, soit quatre bonnes réponses.
• On calcule sa probabilité.	• Ainsi, $P(A) = P(X = 3) + P(X = 4)$ donc $P(A) = 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}3125$.

Mise en pratique

5 Un conseiller commercial en informatique reçoit huit clients par jour. On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de 0,1 et que les décisions des clients sont indépendantes les unes des autres.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de commandes que le conseiller obtient par jour.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale.

2. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) qu'il obtienne :

a) deux commandes ?

b) moins de deux commandes ?

6 Une urne contient trois fois plus de boules noires que de boules blanches.

1. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ?

2. On tire à présent trois boules successivement avec remise.
On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors de la série de trois tirages.

a) Justifiez que N suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

b) Donnez la loi de probabilité de N.

c) Déduisez-en la probabilité d'obtenir au moins deux boules blanches.

7 Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles, 12,1 % des élèves sont des filles qui étudient l'allemand et 36,9 % des élèves sont des garçons qui n'étudient pas l'allemand.

1. On choisit un élève au hasard. On considère les événements suivants :
- F : « l'élève est une fille » ;
- A : « l'élève étudie l'allemand ».

a) Complétez le tableau illustrant la situation.

	F	$\overline{F}$	
A	0,121		
$\overline{A}$		0,369	
	0,55		

b) Déduisez-en la probabilité P(A).

2. On choisit maintenant, et de façon indépendante, six élèves du lycée.
On suppose que l'effectif du lycée est suffisamment élevé pour que cette expérience soit assimilée à un schéma de Bernoulli.
Calculez la probabilité (à 10^{-3} près) que sur les six élèves :

a) trois étudient l'allemand ;

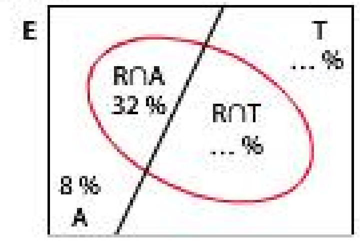
b) aucun n'étudie l'allemand ;

c) au moins un étudie l'allemand.

8 Une auto-école propose deux filières pour préparer l'examen du permis de conduire :
- l'apprentissage anticipé de la conduite (A) ;
- la filière traditionnelle (T).

E désigne l'ensemble des candidats qu'elle a présentés pour la première fois à l'examen et R la partie de E formée des candidats qui ont réussi.
Parmi les candidats de E :
- 40 % on choisi l'option A ;
- 32 % l'option A et ont réussi ;
- 31 % l'option T et ont échoué.

1. Reproduisez le diagramme ci-dessous puis complétez les pointillés par les pourcentages qui conviennent.



2. On interroge au hasard un candidat de E.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

3. On interroge au hasard dix candidats de E.
On suppose que l'effectif est suffisamment élevé pour que cette expérience soit assimilée à un schéma de Bernoulli.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de candidats reçus.
Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) que sur les dix candidats :

a) cinq candidats soient reçus ?

b) au moins un des candidats soit reçu ?

EXERCICE RÉSOLU C Utiliser l'espérance d'une loi binomiale

Un fabricant produit et vend 125 tondeuses par mois. Le coût de fabrication est de 160 € par machine. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacune de ses machines. Le test est positif pour une tondeuse dans 92 % des cas ; ainsi la tondeuse est conforme et est vendue 250 €. Si le test est négatif, la tondeuse est bradée à un sous-traitant au prix de 100 €.

1. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de tondeuses conformes parmi les 125 tondeuses produites.
Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale. Calculez E(X).

2. On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel en euros.
a) Exprimez Y en fonction de X. **b)** Déduisez-en E(Y). Interprétez ce résultat.

Méthode

1. On définit le schéma de Bernoulli qui correspond au test des tondeuses produites.

- On justifie le fait que X suit une loi binomiale.
- On calcule l'espérance : $E(X) = np$.

2. a) À la vente, on distingue deux catégories :
– les tondeuses conformes, vendues 250 € ;
– celles non conformes, vendues 100 €.

- On calcule le bénéfice mensuel :
Bénéfice = recette – coût.

b) On utilise la formule sur l'espérance :
$E(aX + b) = aE(X) + b$.
On interprète le résultat.

Solution

1. Le test de conformité est une épreuve de Bernoulli dont l'issue S est « la tondeuse est conforme ». On répète 125 fois cette épreuve dans les mêmes conditions donc on définit un schéma de Bernoulli d'ordre 125.

- La variable aléatoire X indique le nombre de succès, donc elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 125$ et $p = 0{,}92$.
- Donc $E(X) = 125 \times 0{,}92 = 115$.

2. a) X indique le nombre de machines conformes, donc le nombre de machines non conformes est donné par $125 - X$.
Le prix de vente est $250X + 100(125 - X)$;
le coût total s'élève à : $125 \times 160 = 20\,000$.
D'où le bénéfice mensuel en euros :
$Y = 250X + 100(125 - X) - 20\,000$
$Y = 150X - 7\,500$.

b) $E(Y) = E(150X - 7\,500) = 150E(X) - 7\,500$
donc $E(Y) = 150 \times 115 - 7\,500 = 9\,750$.
Le fabricant peut espérer un bénéfice mensuel moyen de 9 750 €.

Mise en pratique

9 Un parcours hippique de trois kilomètres comporte huit obstacles du même type. À l'entraînement, ce parcours est réalisé à la vitesse de 15 km·h^{-1}. On estime que pour un cavalier, la probabilité qu'il franchisse sans faute un obstacle est de 0,625. Le passage sans faute ne ralentit pas le cavalier alors qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Précisez la loi de probabilité de X et indiquez son espérance.

2. Quel est le temps théorique de parcours exprimé en minutes ?

3. On note D la variable aléatoire qui indique la durée en minutes du parcours du cavalier.
a) Exprimez D en fonction de X.
b) Déduisez-en E(D) et interprétez le résultat.

10 Un QCM se présente sous la forme de cinq affirmations indépendantes où l'élève doit répondre par vrai ou faux.
Chaque réponse juste rapporte deux points tandis qu'une réponse incorrecte pénalise d'un point. Ainsi, la note obtenue peut être négative.
Un élève décide de répondre au hasard.
On note J la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses justes.

1. Indiquez la loi de probabilité de J et précisez la valeur de E(J).

2. On appelle N la variable aléatoire qui indique la note obtenue au QCM.
a) Quelles sont les valeurs prises par N ?
b) Exprimez N en fonction de J ; déduisez-en E(N).
c) Que dire de la stratégie de réponse au hasard ?

OBJECTIF 3 Exploiter un intervalle de fluctuation

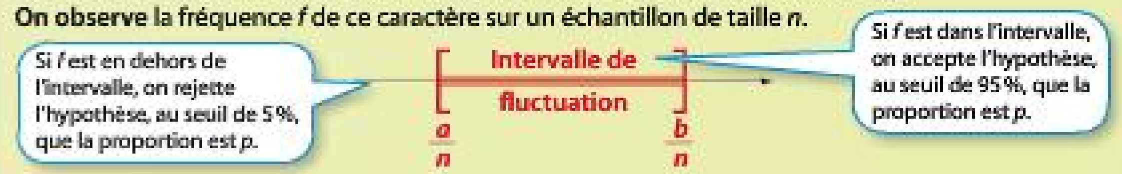
- **Intervalle de fluctuation d'une fréquence selon la loi binomiale**

L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence *f*, sur un échantillon aléatoire de taille *n*, selon la loi binomiale de paramètres *n* et *p*, est :

$$\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right] \text{ avec } \begin{cases} a : \text{plus petit entier tel que } P(X \leqslant a) > 0{,}025 \\ b : \text{plus petit entier tel que } P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975 \end{cases} \quad (1)$$

- **Règle de prise de décision**

On suppose que dans une population la proportion d'un certain caractère est *p*.
On observe la fréquence *f* de ce caractère sur un échantillon de taille *n*.



EXERCICE RÉSOLU D Prendre une décision

La proportion de gauchers en France est estimée à 13 %.
Parmi les 93 élèves de Première S d'un lycée, 17 sont gauchers. On souhaite savoir si la fréquence des gauchers observée sur cet échantillon est en accord avec la proportion *p* de gauchers de la population française. Pour cela, on fait l'hypothèse que la proportion de gauchers dans le lycée est de 13 %.

k	$P(X \leqslant k)$
5	0,0139
6	0,0341
7	0,0715
...	
17	0,9467
18	0,9706
19	0,9846
20	0,9924

1. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de gauchers dans un échantillon aléatoire de 93 personnes sous l'hypothèse $p = 0{,}13$.
Justifiez que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 93$ et $p = 0{,}13$.

2. On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$.
Déterminez l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des gauchers.

3. La fréquence des gauchers dans cet échantillon d'élèves est-elle en accord avec la proportion de gauchers de la population française ?

Méthode

1. On met en évidence un schéma de Bernoulli, ainsi la loi du nombre de succès est une loi binomiale.

2. On cherche les entiers *a* et *b* dans la table en utilisant la définition (1).

- L'intervalle de fluctuation à 95 % est $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$.

3. On prend une décision sur la qualité de l'échantillon au seuil de 95 %. Pour cela, on situe la fréquence observée par rapport à l'intervalle de fluctuation.

- On applique la règle de prise de décision.

Solution

1. X indique le nombre de succès (S : « être gaucher ») dans un schéma de Bernoulli d'ordre 93, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 93$ et $p = 0{,}13$.

2. $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}0139$ et $P(X \leqslant 6) \approx 0{,}0341$
donc $a = 6$.
$P(X \leqslant 18) \approx 0{,}9706$ et $P(X \leqslant 19) \approx 0{,}9846$
donc $b = 19$.
D'où l'intervalle de fluctuation à 95 %
$I = \left[\frac{6}{93} ; \frac{19}{93}\right]$.

3. La fréquence observée $\frac{17}{93}$, appartient à I.

La fréquence observée est en accord avec la proportion de 13 % de gauchers en France.

Mise en pratique

11 Le maire d'une ville affirme que 50 % des automobilistes qui traversent sa ville dépassent la vitesse autorisée 50 km·h⁻¹. Un contrôle de police a constaté que sur 256 véhicules, 115 étaient en infraction.

1. On souhaite savoir si le maire a raison. On suppose alors que la proportion d'automobilistes en infraction est $p = 0{,}5$.
On note I la variable aléatoire qui indique le nombre d'infractions sur un échantillon aléatoire de 256 personnes.

a) Quelle est la loi de I ?

b) Utilisez l'extrait ci-dessous de la table des probabilités cumulées pour déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 %.

k	$P(I \leqslant k)$
111	0,0195
112	0,0262
113	0,0349
114	0,0457
...	...
143	0,9738
144	0,9805
145	0,9857
146	0,9897

2. a) Quelle est la fréquence observée f des infractions de vitesse ?

b) Peut-on considérer, au seuil de 5 %, que l'affirmation du maire est exacte ?

12 Une chaîne d'embouteillage d'eau minérale assure une production dont on estime que les réglages peuvent conduire à la proportion $p = 5\,\%$ de bouteilles défectueuses.
On contrôle la production en prélevant un échantillon de 200 bouteilles ; on découvre 17 bouteilles défectueuses.

1. On suppose que la production de bouteilles défectueuses est de 5 %.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de bouteilles défectueuses sur un échantillon aléatoire de 200 bouteilles.

a) Précisez la loi de probabilité de X.

b) Utilisez la calculatrice pour compléter le tableau suivant (valeurs à 10^{-4} près) :

k	3	4	15	16	17
$P(X \leqslant k)$					

c) Déduisez-en les bornes de l'intervalle de fluctuation à 95 %.

2. a) Peut-on affirmer, au seuil de 5 %, que la chaîne fonctionne correctement ?

b) Calculez $P(X \leqslant 3) + P(X > 16)$.
Que représente cette probabilité ?

13 Un fournisseur d'accès Internet propose des abonnements incluant la fourniture d'un modem ADSL.
La proportion de modems présentant des anomalies est estimée par le fournisseur à $p = 0{,}16$.
Une association de consommateurs lance une enquête auprès des abonnés à sa revue pour estimer leur degré de satisfaction concernant leur fournisseur d'accès. Parmi les réponses à l'enquête, 428 concernent ce fournisseur d'accès : 86 abonnés déclarent avoir reçu un modem défectueux.

1. On suppose que la proportion de modems défectueux est 0,16.
On appelle Y la variable aléatoire qui, à un échantillon aléatoire de 428 modems du fournisseur, associe le nombre de modems défectueux.

a) Précisez la loi de probabilité de Y.

b) Utilisez l'extrait de la table de probabilités cumulées ci-dessous pour déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 %.

k	$P(Y \leqslant k)$
53	0,0215
54	0,0298
55	0,0406
56	0,0543
...	...
83	0,9739
84	0,9806
85	0,9858
86	0,9897

2. a) Quelle est la fréquence observée f sur l'échantillon de l'association de consommateurs ?

b) Peut-on estimer, au seuil de 5 %, que l'association de consommateurs donne une information qui confirme les indications du fournisseur d'accès ?

c) Quelle est la probabilité de commettre une erreur lors de la prise de décision ?

Pour se tester

Exercices interactifs

14 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) Une épreuve de Bernoulli a ...... issues.

b) La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes définit ......

c) Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud vaut ......

d) On construit le triangle de Pascal en utilisant la relation $\binom{n+1}{k+1} =$ ......

e) La probabilité d'obtenir k succès en n répétitions indépendantes d'une épreuve est ......

f) Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :
- E(X) = ...
- V(X) = ...

15 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. On lance trois fois de suite un dé cubique parfait. La probabilité d'obtenir :

a) un multiple de 3 lors d'un seul lancer est $\frac{1}{3}$;

b) deux multiples de 3 lors des trois lancers est $\frac{2}{3}$;

c) trois multiples de 3 lors des trois lancers est $\frac{1}{27}$.

2. Les coefficients binomiaux sont tels que :

a) $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3$; **b)** $\binom{2011}{2}=\binom{2011}{2009}$.

3. On lance cinq fois de suite une pièce équilibrée.
La probabilité d'obtenir au terme des cinq lancers :

a) deux fois Pile est 0,3125 ;

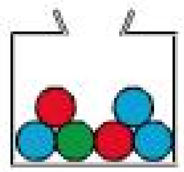
b) trois fois Pile est 0,5 ;

c) au moins une fois Pile est 0,875.

16 QCM — Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : trois bleues, deux rouges et une verte.
On y prélève au hasard, l'une après l'autre avec remise, trois boules.



1. On considère les événements suivants :
- U : « tirage unicolore » ;
- B : « tirage bicolore » ;
- T : « tirage tricolore ».

Les probabilités de ces événements sont :

a) $P(U) = \frac{35}{216}$; **b)** $P(T) = \frac{1}{36}$; **c)** $P(B) = \frac{2}{3}$.

2. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de boules bleues à l'issue du tirage. Alors :

a) $P(X = 0) = \frac{1}{9}$; **b)** $P(X = 3) = \frac{1}{9}$;

c) $P(X = 1) = P(X = 2)$; **d)** $E(X) = 2$.

17 QCM — Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

Les motos sont réparties en deux catégories.
A : cylindrée supérieure ou égale à 125 cm³ ;
B : cylindrée inférieure à 125 cm³.
On distingue les motos routières (R) des sportives (S).
Une étude a établi que parmi les motards :
- 44 % ont des motos de la catégorie A ;
- 36,6 % ont des motos du type R ;
- 19,6 % ont des motos de la catégorie B et du type R.

1. En interrogeant un motard pris au hasard, on a :

a) $P(A \cap R) = 0{,}17$; **b)** $P(A \cup R) = 0{,}636$;
c) $P(S) = 0{,}634$; **d)** $P(B \cup S) = 0{,}83$.

2. On interroge au hasard, et de façon indépendante, quatre motards (le même motard pouvant être interrogé plusieurs fois). Voici les probabilités (arrondies à 0,001 près) des événements indiqués.

a) « Un seul a une moto de catégorie A » : 0,309 ;

b) « Tous ont des motos de type R » : 0,162 ;

c) « Deux ont une moto de type S » : 0,323 ;

d) « Au moins un a une moto de catégorie B » : 0,963.

Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

18 En état de marche

Un système électronique comporte trois composants qui fonctionnent indépendamment les uns des autres avec la même probabilité $p = 0{,}9$. Le système ne marche que si au moins deux des composants sont opérationnels.

Objectif Trouver la probabilité que le système soit en état de marche.

L'état d'un composant définit une épreuve de Bernoulli dont les issues sont S : «il fonctionne» et $\overline{S}$: «il est en panne» telle que $p = P(S) = 0{,}9$. Les trois composants fonctionnent de façon indépendante donc l'état du système définit un schéma de Bernoulli d'ordre 3. D'où l'idée d'introduire la variable aléatoire X qui indique le nombre de composants en état de marche.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. a) Traduisez l'événement A : «le système est en état de marche» en utilisant la variable aléatoire X.

b) Déduisez-en P(A).

19 Combien d'enfants pour avoir une fille ?

On s'intéresse au nombre d'enfants d'une famille.
On suppose qu'il n'y a pas de naissances multiples et qu'il y a équiprobabilité pour la naissance d'un garçon ou d'une fille.

Objectif Trouver le nombre minimum d'enfants afin que la probabilité d'avoir une fille dépasse 0,99.

1. On peut considérer la naissance d'un enfant comme une épreuve de Bernoulli dont les issues sont S : «naissance d'une fille» et $\overline{S}$: «naissance d'un garçon».

a) Quel modèle d'expérience décrit la naissance de n enfants dans une famille ?

b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le nombre de filles dans le cas de n naissances ?

2. On s'intéresse à l'événement A : «avoir au moins une fille sur les n naissances». La définition de A contient la locution «au moins».
En général il est alors plus facile de calculer $P(\overline{A})$.

a) Que signifie $\overline{A}$?

b) Calculez sa probabilité puis déduisez-en que :

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

c) Trouvez le plus petit entier n tel que $P(A) > 0{,}99$.

20 Loi géométrique tronquée

On lance quatre fois de suite un dé cubique équilibré. On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante :

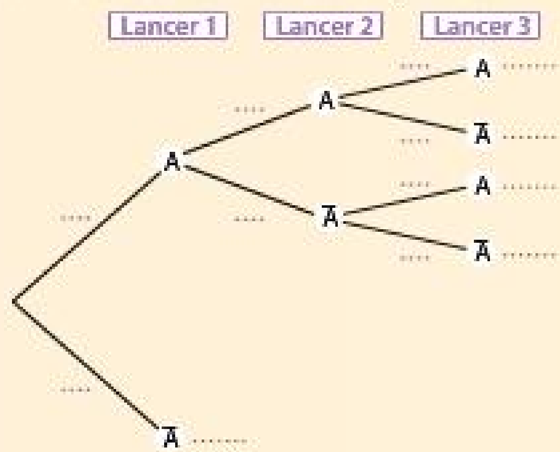
- si au terme des quatre lancers le numéro 1 n'est pas sorti, X prend la valeur 0 ;
- sinon, X prend pour valeur le rang du premier 1 sorti.

Objectif Trouver la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E(X).

1. Lors d'un lancer, seuls deux événements nous intéressent : la sortie du 1, événement noté A, et son événement contraire, noté $\overline{A}$. D'où l'idée de considérer qu'un lancer est une épreuve à deux issues, A et $\overline{A}$.

Quelles sont les probabilités des événements A et $\overline{A}$?

2. On répète quatre fois cette épreuve dans les mêmes conditions donc les épreuves successives sont indépendantes. L'expérience peut alors être représentée par un arbre pondéré qui permet le calcul des probabilités des événements. Voici le début de l'arbre pondéré.



a) Quel est le nombre de chemins de l'arbre complet ?

b) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?

c) Pourquoi l'événement «X = 0» est-il représenté par l'unique chemin $\to \overline{A} \to \overline{A} \to \overline{A} \to \overline{A}$?
Déduisez-en $P(X = 0)$.

d) Pourquoi l'événement «X = 4» est-il représenté par l'unique chemin $\to \overline{A} \to \overline{A} \to \overline{A} \to A$?
Déduisez-en $P(X = 4)$.

e) Calculez de même la probabilité des événements du type «$X = k$».

f) Dressez le tableau de la loi de probabilité de X puis calculez son espérance.

Note On dit que X suit une loi géométrique tronquée.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

21 Une martingale à la roulette

La roulette comporte trente-sept cases numérotées de 0 à 36. Le zéro est vert et les autres numéros sont alternativement rouges ou noirs.
La mise est perdue si le zéro sort. Un joueur mise sur rouge (év. R) : si R est réalisé, il reçoit le double de sa mise, sinon, il la perd.
Un joueur dispose de 315 € et mise 5 € sur «rouge» : s'il gagne, il arrête de jouer ; s'il perd, il mise le double, toujours sur «rouge». Peut-il être ruiné ? Quel gain algébrique peut-il espérer obtenir ?

22 Le Loto foot 15&7

On pronostique les résultats de quinze matches de football.
Exemple :

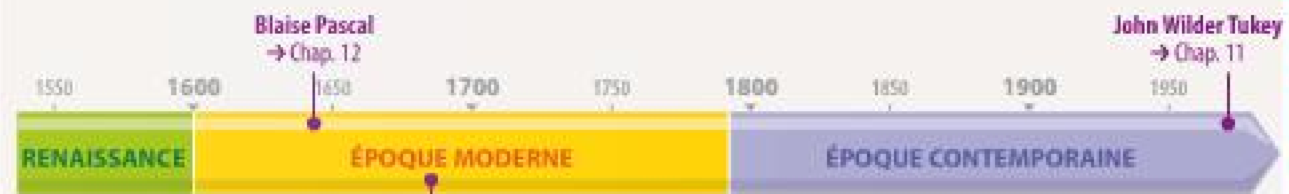
Bordeaux	Lyon	1	N	2

On choisit parmi trois cases : 1 pour la victoire de Bordeaux, 2 pour celle de Lyon et N pour un match nul.
On suppose que les résultats des matches sont indépendants et qu'il y a équiprobabilité entre les trois résultats pour chaque match. On remplit une grille (simple) au hasard. Une grille est gagnante si elle contient au moins douze bonnes réponses.
Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité d'avoir une grille gagnante au Loto foot 15 ?
Comparez avec le Loto foot 7, où une grille de sept matches est gagnante à partir de six bons résultats.

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

Chercheurs d'hier

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine des probabilités et des statistiques.



Jacob Bernoulli
(1654-1705)

Mathématicien et physicien suisse, il pose le principe du calcul des probabilités. Il étudie notamment la répétition d'épreuves aléatoires indépendantes ayant une probabilité p de succès.
Dans son livre *Ars Conjectandi* (*l'Art de la conjecture*), il montre en particulier le résultat suivant :
la fréquence moyenne d'apparition d'un résultat dans une répétition d'épreuves tend vers la probabilité d'observer cette apparition dans une seule épreuve.
Cet énoncé nous est devenu familier sous le nom de «loi des grands nombres».

▲ Le chef-d'œuvre de Jacob Bernoulli

Sur le Web http://www.bibmath.net/bios

Utiliser sa calculatrice

→ Pour afficher des coefficients binomiaux
→ Pour afficher les probabilités suivant une loi binomiale

TP 23 Calculer des probabilités selon une loi binomiale

On lance vingt fois de suite une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de sorties de « Face » durant les vingt lancers. On sait que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5$.

1. Faites afficher les coefficients binomiaux $\binom{20}{5}$ et $\binom{20}{10}$.

2. Donnez une valeur approchée à 10^{-4} près de $P(X = 5)$ et de $P(X \leqslant 10)$.

Avec une Casio

1. Allez dans le menu RUN, appuyez sur OPTN puis choisissez l'option PROB (F3).

```
x!  nPr  nCr  RAND      ▷
```

coefficients binomiaux

Tapez : 20 F3 (nCr)5 EXE.

```
20C5
              15504
```

Ainsi, $\binom{20}{5} = 15\,504$. De même, $\binom{20}{10} = 184\,756$.

2. Dans le menu STAT, choisissez l'option DIST (F5) puis l'option BINM (F5).

Pour calculer P(X = k) :

- Sélectionnez option Bpd (F1).
- Complétez :

```
Binomial P.D
Data     :Variable
x        :5
Numtrial :20
p        :0.5
Save Res :None
Execute
CALC
```

Nombre de succès — Nombre d'épreuves — Probabilité

- Appuyez sur EXE. Vous obtenez $P(X = 5) \approx 0{,}0148$.

Pour calculer $P(X \leqslant k)$:

Procédez de même en choisissant l'option Bcd (F2).
Vous obtenez : $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}5881$.

Note

Bpd signifie « binomial probability distribution ».
Bcd signifie « binomial cumulative distribution ».

Avec une TI

1. • Tapez 20 math, puis choisissez, dans le menu PRB, l'option 3 (Combinaison).

```
MATH NUM CPX PRB
1:NbrAléat
2:Arrangement
3:Combinaison
4:!
```

• Tapez 5 puis appuyez sur entrer.

```
20 Combinaison 5
              15504
```

Ainsi, $\binom{20}{5} = 15\,504$. De même, $\binom{20}{10} = 184\,756$.

2. Tapez sur 2nde var (distrib).

Pour calculer P(X = k)

• sélectionnez la fonction A:binomFdp(puis appuyez sur entrer ;

```
DISTRIB DESSIN
0:FFRép(
A:binomFdp(
B:binomFRép(
```

• complétez `binomFdp(20,0.5,5)`

nombre d'épreuves — probabilité — nombre de succès

puis appuyez sur entrer.

Vous obtenez $P(X = 5) \approx 0{,}0148$.

Pour calculer $P(X \leqslant k)$:

• Procédez de même en choisissant la fonction B:binom FRép(.

Vous obtenez : $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}5881$.

Utiliser un tableur

→ Pour tabuler et représenter une loi binomiale

TP 24 Un dé truqué ?

COMPÉTENCES

TICE	Mathématiques
■ Tabuler une loi binomiale	■ Utiliser la loi binomiale
■ Représenter une loi binomiale	■ Déterminer un intervalle de fluctuation
■ Créer le diagramme des probabilités cumulées	■ Rejeter ou accepter une hypothèse

On lance cinquante fois un dé cubique et on obtient seize fois la sortie du numéro 6.
Peut-on penser que ce dé est truqué ?

1. Simuler la loi binomiale

On suppose que le dé n'est pas truqué. Ainsi, la probabilité de sortie du 6 lors d'un lancer est $p = \frac{1}{6}$.

Sur un échantillon aléatoire de 50 lancers successifs, la variable aléatoire X qui indique le nombre de succès (sortie du 6) suit une loi binomiale de paramètres 50 et $\frac{1}{6}$. Elle prend les valeurs k de 0 à 50.

a) **Tabulation de la loi de X**

outil 9

• Ouvrez une feuille de calcul. Complétez les cellules A2, B2 et C2.

	A	B	C
1	k succès	P(X=k)	P(X<=k)
2			

Aide

en B2 : =LOI.BINOMIALE(A2;50;1/6;0)
en C2 : =LOI.BINOMIALE(A2;50;1/6;1)

• Tirez la plage de cellules A2:C2 vers le bas jusqu'en A52:C52.
Vous obtenez : en colonne B, la loi de probabilité de X ;
en colonne C, la table des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 50$.

b) **Représentation graphique**

outil 13

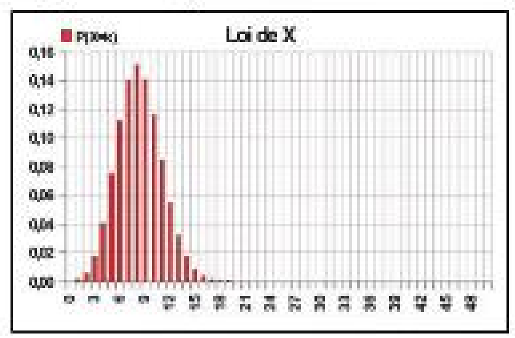
• Pour la loi de X, sélectionnez la colonne B puis utilisez le type de diagramme en colonne.

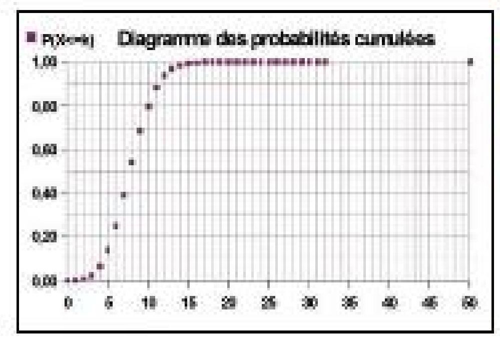
Aide

Pour le réglage des catégories, renseignez la boîte de dialogue avec \$Feuille1.\$A\$2:\$A\$52.

outil 12

• Pour le diagramme des probabilités cumulées, sélectionnez les colonnes A et C puis le type de diagramme XY ; points seuls.





2. Prendre une décision

a) Déterminer, en utilisant la table de la loi de X, les plus petits entiers a et b tels que :
$$P(X \leqslant a) > 0{,}025 \text{ et } P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975.$$

b) Déduisez-en l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence d'apparition du 6.

c) Quelle est la fréquence observée d'apparition du 6 ?

L'hypothèse $p = \frac{1}{6}$ est-elle acceptée ? Concluez.

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

25 Le bureau de la vie scolaire d'un lycée détient les fiches informatisées des élèves : 10 % sont internes, 30 % externes et 60 % demi-pensionnaires.
Le conseiller d'éducation consulte au hasard, l'une après l'autre (avec possibilité de reprendre la même) trois de ces fiches.
Quelles sont les probabilités de :

a) consulter trois fiches d'internes ?

b) aucune fiche de demi-pensionnaires ?

26 On lance cinq fois de suite une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité (exprimée sous forme d'une fraction) qu'au cours des cinq lancers on obtienne :

a) aucune fois « Face » ?

b) une fois « Face » ?

27 On connaît les coefficients binomiaux suivants :

- $\binom{10}{4} = 210$
- $\binom{10}{5} = 252$.

Quelle est la valeur des entiers :

a) $\binom{10}{6}$?

b) $\binom{11}{5}$?

28 Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible est de 0,8.
Il lance une volée de trois flèches et on suppose les tirs indépendants.
Quelle est la probabilité :

a) que toutes les flèches ratent la cible ?

b) qu'au moins une flèche soit dans la cible ?

29 Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}125$.

a) Quelle est l'espérance de X ?

b) Sa variance ?

RÉPÉTITION D'UNE MÊME ÉPREUVE

30 Une urne contient trois boules indiscernables : une rouge R, une verte V et une noire N.
On tire successivement avec remise trois boules de l'urne.

a) Quel est le nombre d'issues ?

b) On considère les événements U : « tirage unicolore », T : « tirage tricolore » et B : « tirage bicolore ».
Calculez les probabilités de U, T et B.

31 On lance trois fois de suite une pièce équilibrée.
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.
On considère le jeu suivant :

- si 1 sort au premier lancer on gagne 1 € ;
- sinon, s'il sort au deuxième lancer on gagne 2 € ;
- sinon, s'il sort au troisième lancer on gagne 4 € ;
- enfin, s'il n'est pas sorti, on perd n euros.

G est la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

a) Déterminez la loi de probabilité de G.

b) Comment choisir n pour que le jeu soit équitable ?

Rappel
Un jeu est dit équitable, lorsque l'espérance de gain du joueur est nulle.

32 Un dé parfait a ses faces numérotées : 1, 1, 1, 2, 2, 4.
On lance ce dé trois fois de suite.
On note de gauche à droite le numéro obtenu ; on obtient ainsi un nombre de trois chiffres.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.

2. Calculez sous forme fractionnaire la probabilité des événements suivants :
A : « le nombre est 421 ».
B : « le nombre a trois chiffres différents ».
C : « le nombre contient au moins une fois le chiffre 2 ».

3. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où le chiffre 1 est utilisé dans l'écriture du nombre.
Déterminez la loi de probabilité de X.

33 Deux amis A et B décident de jouer à pile ou face leurs derniers jeux sur console.
Chacun dispose de quatre jeux ; ces jeux sont tous différents entre eux.
Ils décident de jouer quatre parties.
Lors du lancer de la pièce équilibrée, on note G_A et G_B les événements « A gagne un jeu » et « B gagne un jeu ».

1. Illustrez la situation par un arbre pondéré.

2. X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de A. (Si A gagne il marque + 1, sinon –1.)

a) Quelle est la probabilité que A perde tous ses jeux ?

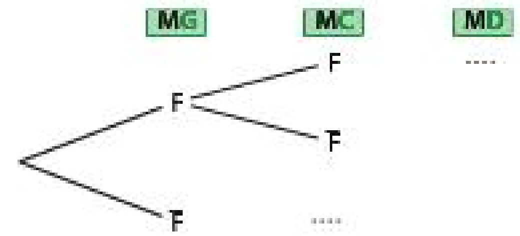
b) Dressez le tableau de la loi de probabilité de X.

c) Ce jeu est-il équitable ?

34 Un avion dispose de trois moteurs à hélices du même type : un moteur central MC et deux moteurs d'aile MG et MD.

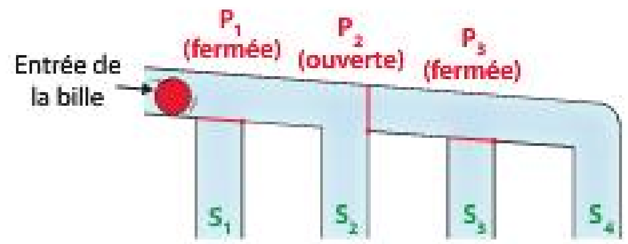
L'avion se maintient en vol lorsque le moteur central ou les deux moteurs d'aile fonctionnent.
La probabilité qu'un des moteurs fonctionne est 0,995.
Les trois moteurs fonctionnent de façon indépendante les uns par rapport aux autres.
On note F l'événement « le moteur fonctionne ».

1. Représentez la situation par un arbre pondéré du type suivant.



2. Déduisez-en à 10^{-6} près la probabilité que l'avion s'écrase au sol.

35 Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1, P_2, P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles S_1, S_2, S_3, S_4.
Un système électronique positionne de façon aléatoire ces trois portes en position « ouverte » ou « fermée » indépendamment les unes des autres.



Pour jouer, on doit miser 7 €.
Si la bille sort par S_1, on ne reçoit rien ; sinon, si elle sort par S_2 on reçoit 5 €, par S_3, on reçoit 10 € et par S_4, on reçoit 20 €.
X est la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.

2. a) Déterminez la loi de probabilité de X.

b) Calculez E(X).

c) Comment modifier le montant de la mise pour que ce jeu soit équitable ?

LOI GÉOMÉTRIQUE TRONQUÉE

36 **Arbre « réduit »**
Un coffret contient 60 perles vertes et 40 noires.
On tire au hasard, successivement et avec remise quatre perles du coffret.
On s'intéresse à l'obtention de la première perle verte.
On appelle X la variable aléatoire qui indique le rang de sortie de la première perle verte. Par convention, si on n'obtient pas de perle verte, on attribue à X la valeur 0.

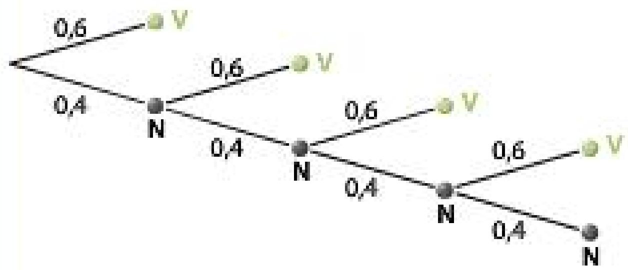
1. Illustration par un arbre pondéré

a) Représentez les quatre tirages successifs par un arbre pondéré.
On notera : V « on tire une perle verte » et N « on tire une perle noire ».

b) Calculez la probabilité de l'événement « X = 0 ».

c) Dressez le tableau de la loi de X.

2. Illustration par un arbre « réduit »
Justifiez que l'arbre réduit ci-dessous permet de retrouver la loi de X.

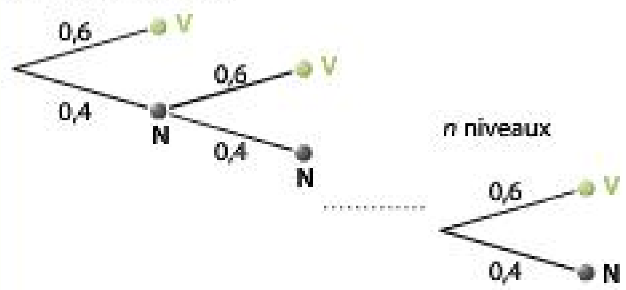


Note On dit que X suit une loi géométrique tronquée.

37 **Loi géométrique tronquée de paramètres n et p**
On se place dans les conditions de l'exercice **36** et on procède à n tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui indique le rang de sortie de la première perle verte ; si on n'obtient pas de perle verte, on attribue à X, la valeur 0.

1. a) Exprimez P(X = 0) en fonction de n.

b) Un arbre « réduit » du type de celui vu en exercice **36** illustre la situation.



Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, à quel chemin correspond la réalisation de l'événement « X = k » ?

c) Déduisez-en la probabilité P(X = k).

Note
La loi de la variable aléatoire X est appelée loi géométrique tronquée de paramètres n et $p = 0{,}6$.

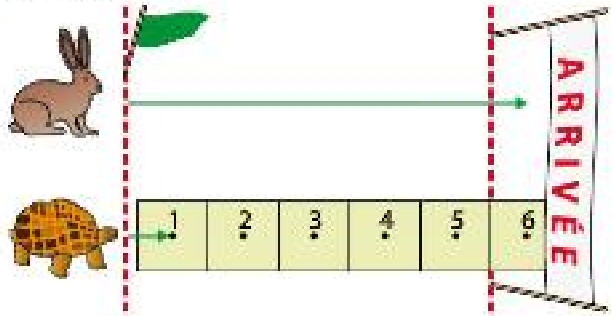
2. Vérifiez que $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.

Rappel
$1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1} = \frac{1-p^n}{1-p}$ $(p \neq 1)$.

38 **Le lièvre et la tortue**

Une course entre le lièvre et la tortue est simulée par le lancer d'un dé équilibré : si le résultat est 6, le lièvre a gagné, sinon la tortue avance d'une case. Les lancers sont indépendants.

La tortue gagne si elle atteint la case n° 6 (elle a donc six cases à parcourir).



La course ne peut pas dépasser six lancers. Dès que le 6 sort, le lièvre a gagné. La tortue gagne si le 6 n'est pas sorti durant les six lancers.

1. Représentez par un arbre pondéré (« réduit ») du type de celui de l'exercice **36**, la succession des six lancers.

2. a) Quelle est la probabilité que la tortue gagne ?

b) Déduisez-en la probabilité que le lièvre gagne.

3. On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le lièvre vainqueur et 0 sinon.

a) Dressez le tableau de la loi de probabilité de N.

b) Calculez E(X) puis interprétez ce résultat.

39 **Simulation et moyenne** ALGORITHMIQUE

(D'après inter-académiques Poitiers 2010)

La probabilité qu'un atome se désintègre par unité de temps est $p = 0{,}07$. On simule cette désintégration en limitant le temps d'attente à 100 unités de temps. On s'intéresse à la moyenne du temps d'attente sur un échantillon constitué de 200 expériences.

Protocole

On associe 0 à l'événement qui indique qu'après 100 unités de temps la désintégration n'a pas eu lieu ; sinon on indique au bout de combien d'unités de temps t la désintégration s'est produite.

Programme de simulation

Casio

```
======ATTENTE ======
For 1→N To 200↵
0→C:0→T↵
While T=0 And C<100↵
Int (Ran# +0.07)→T↵
C+1→C↵
WhileEnd↵
If T=0↵
Then T→List 1[N]↵
Else C→List 1[N]↵
IfEnd↵
Next↵
Mean(List 1)↵
Prog "ATTENTE"
```

Texas

```
PROGRAM:ATTENTE
:For(N,1,200)
:0→C
:0→T
:While T=0 and C<100
:int(rand+0.07)→T
:C+1→C
:End
:If T=0
:Then
:T→L1(N)
:Else
:C→L1(N)
:End
:End
:Disp mean(L1)
```

1. Précisez le rôle de la boucle conditionnelle :

While … WhileEnd (ou End).

2. Quelle partie du programme traite les conditions du protocole ? Détaillez les alternatives.

3. a) Écrivez ce programme sur votre calculatrice.

b) Après quelques tests indiquez une estimation du temps d'attente moyen avant la désintégration.

Commentaire

Le temps d'attente est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique tronquée de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}07$. Son espérance est proche de $\frac{1}{p}$ lorsque n est grand (voir exercice 73).

LOI BINOMIALE

Pour les exercices 40 à 43

Les probabilités seront données sous forme de fractions.

40 On lance trois fois de suite un dé cubique parfait. Quelle est la probabilité d'avoir trois as ?

41 Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible donnée est 0,7. Les tirs sont supposés indépendants. Quelle est la probabilité qu'il touche trois fois la cible sur une volée de cinq flèches ?

42 On tire successivement avec remise huit cartes d'un jeu de trente-deux cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir cinq cœurs ?

43 On lance six fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) au plus deux « Pile » ?

b) au moins un « Pile » ?

Pour les exercices 44 à 48

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Les probabilités seront données à 10^{-4} près.

Pour tabuler la loi de X, voir l'exercice **23**, ou bien utiliser le mode TABLE des calculatrices.

Exemple : $n = 6$ et $p = 0{,}4$.

CASIO Menu Table OPTN F6(▷) F3(STAT) F1(DIST) F5(BINM) F1(Bpd)

Tapez : Y1 = BinomialPD(X, 6, 0.4) puis EXE . F5(SET)

Réglez les valeurs de la table puis validez.

Faites afficher la table pour les valeurs entières de 0 à 6.

TEXAS Y= 2nd VARS(DISTR) option 0

Tapez : binomialpdf(6, 0.4, X) puis entrer

Réglez les valeurs de la table puis validez.

Faites afficher la table pour les valeurs entières de 0 à 6.

44 $n = 6$, $p = 0{,}4$. Donnez le tableau de la loi de X.

45 $n = 9$, $p = 0{,}6$. Donnez le tableau de la loi de X.

46 $n = 15$, $p = 0{,}8$. Calculez $P(X = 8)$ et $P(X = 12)$.

47 $n = 10$, $E(X) = 3$. Calculez $P(X \leqslant 3)$ et $P(X \geqslant 7)$.

48 $p = 0{,}2$, $\sigma(X) = 2$. Calculez $P(X \leqslant 2)$ et $P(X < 2)$.

49 La probabilité qu'une machine tombe en panne durant un mois donné est $p = 0{,}05$. Les pannes sont indépendantes les unes des autres.

Calculez les probabilités (à 10^{-3} près) que la machine :

1. ne tombe pas en panne durant un an ;

2. tombe en panne plus d'une fois durant cette année.

50 **Le problème du chevalier de Méré**

Le chevalier de Méré posa en 1654 le problème suivant à Blaise Pascal : « A-t-on plus de chance d'obtenir au moins un six en lançant un dé cubique quatre fois, ou d'obtenir au moins un double six en lançant deux dés vingt-quatre fois ? »

1. On lance un dé parfait quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un six ?

2. On lance deux dés vingt-quatre fois de suite.

a) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun double six ?

b) Déduisez-en la probabilité d'obtenir au moins un double six. Concluez.

51 Une épreuve consiste à lancer deux dés cubiques parfaits, l'un bleu et l'autre rouge, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note S l'événement « la somme des numéros des deux dés est supérieure ou égale à 10 ».

On répète dix fois de suite cette épreuve dans les mêmes conditions.

1. Quelle est la probabilité de S lors d'une épreuve ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois la réalisation de S lors des dix épreuves ?

On donnera la valeur arrondie à 10^{-3} près.

3. On répète cette épreuve n fois de suite.

a) Prouvez que la probabilité P_n d'obtenir au moins une fois la réalisation de S est $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b) Quel est le nombre minimum d'épreuves pour que cette probabilité soit supérieure à 0,9 ?

52 Une urne contient cinq boules indiscernables : trois vertes et deux rouges. On tire au hasard une boule de l'urne. Si la boule est rouge on perd 20 €, si elle est verte on gagne 10 €. Un joueur réalise cette épreuve quinze fois avec remise de la boule après un tirage. On se propose de calculer l'espérance de gain de ce joueur.

On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur et X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules rouges obtenues au terme des quinze tirages.

1. Justifiez que : $G = 150 - 30X$.

2. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ?

3. Déduisez-en l'espérance mathématique de G.

53 **Avec la calculatrice**

Une entreprise fabrique des cartes à puce. Chaque puce peut présenter deux défauts a et b. On prélève au hasard, une puce dans la production de la journée.

Une étude a permis de montrer que la probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait :

– le défaut a est 0,03 ;

– le défaut b est 0,02 ;

– ni le défaut a ni le défaut b est 0,950 6.

1. Quelle est la probabilité que la puce ait les deux défauts à la fois ?

2. Les puces sont conditionnées par lots de 100 pour un nettoyage avant montage sur la carte.

On prélève au hasard un lot de 100 puces (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise).

X est la variable aléatoire, qui à chaque lot, associe le nombre de puces défectueuses.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Quel est en moyenne le nombre de puces sans défaut dans un lot de 100 ?

3. Après le nettoyage, les puces sont regroupées par paquets de 800 pour alimenter l'atelier de montage sur la carte. On prélève au hasard un lot de 800 cartes (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise).

On appelle Y la variable aléatoire qui indique le nombre de cartes en mauvais état de fonctionnement.

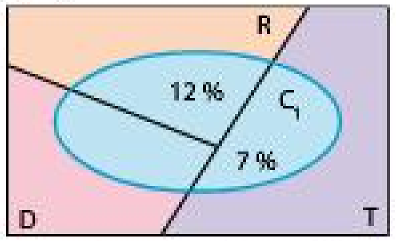
Déterminez le plus petit entier n tel que $P(Y > n) \leqslant 0{,}05$.

Interprétez ce résultat.

54 Une enquête réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne révèle que 45 % des passagers utilisent ses avions pour des raisons touristiques (T), 30 % pour des raisons professionnelles (R) et les autres pour des raisons diverses (D).

Parmi ses avions la compagnie distingue deux classes, C_1 et C_2. En première classe on relève 30 % de la clientèle dont 7 % pour la catégorie T et 12 % pour la catégorie R.

1. Complétez le diagramme ci-dessous en indiquant les pourcentages qui conviennent.



2. On choisit au hasard un client de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il voyage en classe C_1 ?

3. On choisit au hasard n clients de la compagnie (on suppose que le tirage se fait avec remise).

a) Exprimez, en fonction de n, la probabilité P_n qu'au moins un des clients, parmi les n, voyage en classe C_1.

b) Déterminez le plus petit entier n pour lequel :

$$P_n > 0{,}9999.$$

55 **Programmer sur sa calculatrice** ALGORITHMIQUE

1. Voici un algorithme

```
Variables
k, n, p, R
Entrées
n, p
Algorithme
Pour k de 0 jusqu'à n
R reçoit (n k)×p^k×(1-p)^(n-k)
Afficher «Probabilité pour k=»
Afficher k, "=", R
FinPour
```

Quel est le but de cet algorithme ?

2. a) Programmez-le sur votre calculatrice.

b) Testez-le pour les valeurs $n = 3$ et $p = 0{,}5$ puis $n = 10$ et $p = 0{,}1$.

Vérifiez avec le programme intégré de votre calculatrice.

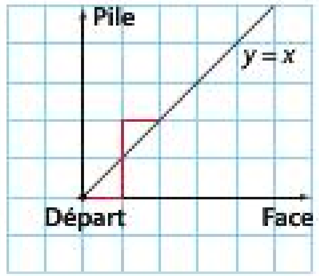
COEFFICIENTS BINOMIAUX

56 La répétition n fois du lancer d'une pièce équilibrée peut être représentée dans un quadrillage par un chemin. On adopte le protocole suivant :

- si Face sort, on se déplace d'un pas vers la droite D ;
- si c'est Pile, on se déplace d'un pas vers le haut H.

Dans cet exercice : $n = 4$.

Le chemin rouge représente l'issue FPPF.



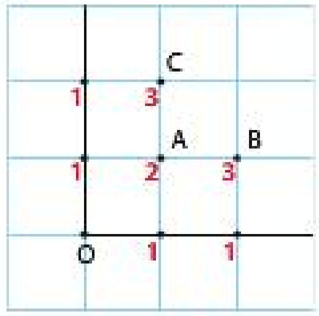
1. a) Indiquez le nombre de chemins possibles ($n = 4$).

b) Représentez tous les points d'arrivée possibles.

2. Pour chacun de ces points, quel est le nombre de chemins aboutissant à cette arrivée ?

57 **Compter des chemins**

On reprend la situation de l'exercice **56** lorsque $n = 8$. Voici une méthode de dénombrement.



- Pour aller de O au point de coordonnées (1 ; 0) il y a un seul chemin : D.

On code 1 ce point.

- Pour aller de O au point de coordonnées (0 ;1), il y a un seul chemin : H. On code 1 ce point.
- Pour aller de O en A il y a deux chemins possibles :

– un qui passe par le point de coordonnées (1 ; 0) : DH ;

– un qui passe par le point de coordonnées (0 ; 1) : HD.

On code 2 le point A.

- Pour aller de O au point de coordonnées (0 ; 2) il y a un seul chemin possible : DD.

On code 1 ce point.

- Pour aller de O à B, il y a trois chemins possibles :

– un qui vient du point de coordonnées (2 ; 0) ;

– deux qui viennent de A.

On code 3 le point B.

Ainsi, de proche en proche, on peut coder tous les points par le nombre de chemins qui les relient à O en utilisant comme seuls déplacements D et H.

1. Réalisez le codage pour un chemin de $n = 8$ pas.

2. Indiquez les coordonnées des points d'arrivée.

3. Que représentent les nombres qui codent les issues représentées par les points d'arrivée ?

58 On se place dans les conditions de l'exercice **57** avec $n = 8$. On dit que « Pile fait la course en tête », si le chemin associé à une issue est toujours situé au-dessus ou sur la droite d d'équation $y = x$.

1. Utilisez un protocole de codage (voir exercice 57) pour dénombrer les chemins menant aux points situés au-dessus ou sur d après 8 pas.

2. Tous les chemins de huit pas sont équiprobables. Quelle est la probabilité que « Pile fasse la course en tête » ?

59 Utilisez le triangle de Pascal pour trouver l'entier n satisfaisant la condition imposée :

a) $\binom{n}{2} = 36.$

b) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}.$

60 **1.** Utilisez la formule de Pascal pour trouver les entiers n et p tels que :

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\binom{n}{p}.$$

Aide

$\binom{3}{3}=\binom{4}{4}.$

2. Comment lire ce résultat dans le triangle de Pascal ?

PRISE DE DÉCISION

61 Une enquête a établi qu'une proportion $p = 52\,\%$ des élèves d'un lycée utilisaient quotidiennement Internet pour les devoirs.

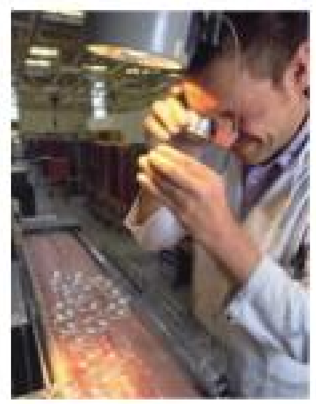
Un professeur interroge sur ce sujet, 64 de ses élèves ; parmi eux, 42 utilisent Internet tous les jours. L'effectif du lycée est suffisamment important pour que l'on puisse considérer ces interrogations comme indépendantes.

1. Déterminez, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de réalisation de l'événement « l'élève utilise Internet pour les devoirs ».

2. Comparez cet intervalle à celui obtenu en classe de seconde par $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où n désigne la taille de l'échantillon qu'on interroge.

3. Les classes du professeur sont-elles en accord avec la proportion p dans le lycée ?

62 Un atelier réalise le polissage de lentilles. À la sortie du robot de polissage, on classe les lentilles en suivant deux catégories A (haute qualité) et B (qualité moyenne). On contrôle la production en prélevant au hasard des échantillons de 80 lentilles.



La production est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise.

On suppose que la proportion de lentilles de type B est $p = 15\,\%$ (réglage type du robot).

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lentilles de type B sur un échantillon de taille 80.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Les limites de contrôle sont les bornes de l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence.

Calculez les limites de contrôle.

3. Quelle est, sous réglage type, la probabilité de commettre une erreur de décision à partir d'un échantillon ?

AVEC LES TICE

63 **Comparaison d'intervalles de fluctuation à 95 %**

On suppose que dans une population la fréquence d'un certain caractère est p.

On observe sur un échantillon aléatoire de taille n (obtenu par tirage avec remise) une fréquence f.

Le but de cette activité est de mettre en place une procédure automatisée pour obtenir l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence selon :

- la loi binomiale $I = \left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$;
- la formule vue en seconde $J = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

On peut alors comparer les deux intervalles.

Procédons à un exemple avec $n = 30$ et $p = 0{,}4$.

NB. On limitera la simulation aux valeurs $n \leqslant 1\,000$.

1. Préparer une feuille de calcul du type suivant :

	A	B	C	D	F	G	H	I	J
1	Intervalle de fluctuation à 95% selon la loi binomiale					Comparaison des intervalles			
2	Échantillon : taille		Proportion supposée						
3	n=		p=			Loi binomiale		Seconde	
4									
5	k	P(X<=k)	Borne: a/n	Borne: b/n		a/n=		p-1/racine(n)=	
6									
7						b/n=		p+1/racine(n)=	

a) Valeurs initiales

Renseignez les cellules B3 et D3.

b) Protocole

- k prend les valeurs de 0 à n. Tapez 0 en A6.
- $P(X \leqslant k)$ donne les probabilités cumulées selon la loi binomiale de paramètres n et p.

Tapez en B6 :

=SI(A6<=B$3;LOI.BINOMIALE(A6;B$3;D$3;1);"").

- Les bornes de l'intervalle de fluctuation selon la loi binomiale sont $\frac{a}{n}$ et $\frac{b}{n}$.

Tapez en C6 : =SI(B6>0,025;A6/B$3;"").

Tapez en D6 : =SI(B6>=0,975;A6/B$3;"").

- Sélectionnez la plage A6:D6 puis recopiez vers le bas jusqu'à obtenir pour k la valeur n (ici : $n = 30$).

Les bornes $\frac{a}{n}$ et $\frac{b}{n}$ sont les premières valeurs qui apparaissent dans les colonnes correspondantes.

c) Affichage des intervalles

- Intervalle selon la loi binomiale

Tapez en H5 : =MIN(C6:C1006).
Tapez en H7 : =MIN(D6:D1006).

- Intervalle selon la formule de seconde

Tapez en J5 : =D3-1/RACINE(B3).
Tapez en J7 : =D3+1/RACINE(B3).

2. Comparez les deux intervalles de fluctuation.

3. Utilisez ce programme dans les cas suivants :

a) $n = 30, p = 0{,}6$; b) $n = 30, p = 0{,}85$;
c) $n = 100, p = 0{,}15$; d) $n = 100, p = 0{,}55$;
e) $n = 500, p = 0{,}22$; f) $n = 500, p = 0{,}9$.

Que constatez-vous ?

ROC Restitution organisée de connaissances

64 **Prérequis :**

$\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins menant à k succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli.

Si $0 \leqslant k \leqslant n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration

On s'intéresse au nombre de chemins conduisant à 3 succès lors de 6 répétitions.

Ces succès sont répartis au fil des répétitions. Si on obtient k succès ($0 \leqslant k \leqslant 3$) lors des trois premières répétitions on obtient $3 - k$ succès lors des trois dernières.

1. Prouvez que parmi les chemins conduisant à trois succès au terme des six répétitions il y en a respectivement $\binom{3}{0}^2, \binom{3}{1}^2, \binom{3}{2}^2, \binom{3}{3}^2$ qui indiquent 0, 1, 2, 3 succès lors des trois premières répétitions.

2. Déduisez-en les entiers n et p tels que :

$$\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = \binom{n}{p} \qquad [1]$$

Application

Comment lire cette formule dans le triangle de Pascal ?

Écrivez la formule analogue qui correspond au nombre de chemins conduisant à quatre succès au terme de huit répétitions.

Prendre toutes les initiatives

65 Un QCM comprend dix questions auxquelles on répond par « Vrai » ou « Faux ». Un élève répond au hasard à toutes les questions.

A-t-il autant de chances de répondre exactement à trois questions que de répondre exactement à sept ?

66 A et B sont deux avions équipés respectivement de deux et trois moteurs qui fonctionnent de façon indépendante. Chaque moteur a la même probabilité $p = 10^{-3}$ de tomber en panne.

Un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ses moteurs fonctionnent.

Quel est l'avion le plus fiable entre A et B ?

Ce résultat est-il valable pour toute valeur de p telle que $0 < p < 1$?

67 Au cours d'une quinzaine commerciale, un magasin offre un billet de loterie à tout acheteur d'un appareil électroménager. Les cinq cents billets numérotés de 1 à 500 sont tous distribués. Parmi eux cinquante billets sont gagnants et rapportent des bons d'achat.

Le magasin annonce : « pour doubler vos chances d'avoir au moins un billet gagnant, achetez deux appareils ».

Une personne sensible à la publicité achète deux appareils et tire deux billets au hasard.

A-t-elle raison de suivre le conseil publicitaire ?

68 **En moyenne, cinq sur vingt**

Lors d'un test, on pose vingt questions à un candidat.

Pour chaque question, k réponses sont proposées aux candidats dont une seule est exacte. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées à chaque question.

On lui attribue un point par bonne réponse mais on le pénalise de 0,5 point par mauvaise réponse.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de bonnes réponses aux vingt questions du test.

1. a) Quelle est en fonction de k, la loi de X ?

b) Exprimez E(X) en fonction de k.

2. On appelle N la variable aléatoire qui indique la note du candidat.

a) Exprimez N en fonction de X.

b) Déduisez-en E(N) en fonction de k.

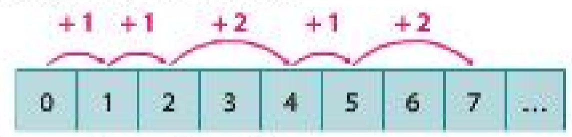
c) Comment choisir k pour que le candidat qui répond au hasard obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

69 **Des sauts de puce**

Une piste est divisée en cases numérotées 0, 1, 2, 3, etc.

Une puce se déplace de la gauche vers la droite, de une ou deux cases au hasard, à chaque saut.

Au départ elle est à la case 0.



Par exemple : au 1^{er} saut, la puce avance d'une case, au 2^e d'une case, au 3^e de deux cases, au 4^e d'une case et au 5^e de deux cases. Au cinquième saut, elle arrive à la case 7.

On se propose d'étudier la variable aléatoire notée X_n qui indique le numéro de la case occupée après n sauts (n entier, $n \geqslant 1$).

1. Déterminez la loi de probabilité de X_1 puis calculez son espérance $E(X_1)$.

2. On appelle Y_n la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

Justifiez que Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$. Déduisez-en $E(Y_n)$.

3. a) Prouvez que $X_n = 2n - Y_n$.

Aide

Remarquez que la puce se déplace d'une case Y_n fois et de deux cases $(n - Y_n)$ fois.

b) Quelles sont les valeurs prises par X_n ?

c) Déduisez-en que pour tout entier naturel k tel que $n \leqslant k \leqslant 2n$, $P(X_n = k) = \binom{n}{2n-k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Application

Calculez $P(X_5 = 7)$.

d) Calculez $E(X_n)$. Interprétez ce résultat.

70 **Vieux jeu !**

Un des jeux à la mode dans les années 1987-1993 était le tapis vert.

♠	1	R	D	V	10	9	8	7
♥	1	R	D	V	10	9	8	7
♦	1	R	D	V	10	9	8	7
♣	1	R	D	V	10	9	8	7

Le jeu consistait à remplir une grille en cochant un pique, un cœur, un carreau et un trèfle.

Le tirage quotidien se faisait en direct à la télévision : une carte de chaque couleur définissait la grille gagnante.

Si on avait coché :

– les 4 cartes tirées, on gagnait 1 000 fois sa mise ;
– 3 cartes tirées, 30 fois sa mise ;
– 2 cartes tirées, 2 fois sa mise.

1. On note X la variable aléatoire qui à chaque grille associe le nombre de cartes qui coïncident avec les cartes tirées.

a) Justifiez que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{8}$.

b) Dressez le tableau de la loi de probabilité de X avec les probabilités écrites sous forme de fractions.

c) Déduisez-en la probabilité d'avoir une grille gagnante.

2. On note G le gain algébrique du joueur pour une mise de 1 €.

a) Donnez la loi de probabilité de G.

b) Quelle est l'espérance de gain à 0,01 € près ?

3. On suppose qu'un joueur remplisse une grille au hasard tous les jours pendant une semaine.

Quelle est la probabilité à 10^{-4} près que le joueur soit gagnant au moins une fois dans la semaine ?

Commentaire

Ce jeu a disparu en 1993 car trop risqué pour l'organisateur. Beaucoup de parieurs aiment jouer le « carré d'as ». Imaginons la catastrophe si les quatre as sortaient… Ceci est arrivé le 28 mars 1988 ! Il y eut le nombre record d'environ 22 000 gagnants.

71 **Trois ou cinq relais ?**

Un système de communication comprend cinq relais. Chaque relais fonctionne indépendamment des autres avec une probabilité p ($0 < p < 1$) et donc ne fonctionne pas avec une probabilité $q = 1 - p$.

Le système total peut effectivement fonctionner si au moins la moitié de ses relais sont en état de marche. On désire comparer ce système avec celui qui ne contient que trois relais et qui fonctionne sous les mêmes conditions.
On note P_5 (resp. P_3) la probabilité que le système à 5 relais (resp. à 3 relais) fonctionne.

1. Démontrez que :
$$P_5 = 10p^3q^2 + 5p^4q + p^5.$$

2. De même, exprimez P_3 en fonction de p et q.

3. a) Vérifiez que $P_5 - P_3 = 6p^5 - 15p^4 + 12p^3 - 3p^2$.

Remarque
Un logiciel de calcul formel permet de factoriser cette expression sous la forme : $P_5 - P_3 = 3p^2(p-1)^2(2p-1)$.

b) Déduisez-en l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles le système à cinq relais est préférable à celui à trois.

72 Espérance de la loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli d'ordre n associé à une épreuve telle que la probabilité de succès soit p.
On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de succès au terme des n épreuves.
Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ on considère la variable aléatoire X_k qui prend la valeur 1 si le succès est réalisé lors de la k^e épreuve, 0 sinon.

→ *exercice 68, page 313*

1. Quelle est l'espérance de X_k ?

2. Justifiez que $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

3. Déduisez-en que $E(X) = np$.

73 Espérance d'une loi géométrique tronquée

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à répéter dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli de paramètre p ($0 < p < 1$) avec au maximum n répétitions et arrêt du processus au premier succès.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur :

- 0 si aucun succès n'est obtenu ;
- k si le 1er succès est obtenu à l'étape k ($1 \leqslant k \leqslant n$). On pose $q = 1 - p$.

1. a) Prouvez que $P(X = 0) = q^n$ et que pour tout nombre entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $P(X = k) = q^{k-1}p$.

Aide Utilisez un arbre « réduit » (voir exercice 37).

b) Vérifiez que $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.

2. Prouvez que $E(X) = p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1})$.

3. On considère la fonction f définie sur $I =]0\,;1[$ par :
$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

a) Prouvez que $f(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

b) Justifiez que f est dérivable sur I et donnez deux expressions de $f'(x)$, pour tout x de I.

4. a) Vérifiez que $E(X) = pf'(q)$.

b) Déduisez de la question 3 que :
$$E(X) = \frac{1}{p}\left[1 - (1 + np)(1 - p)^n\right].$$

Remarque
On admettra que E(X) tend vers $\dfrac{1}{p}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

74 Implication — LOGIQUE

Les implications $(Q_1) \Rightarrow (Q_2)$ sont-elles vraies ?
On considère un schéma de Bernoulli d'ordre n associé à une épreuve dont l'issue du succès a pour probabilité p ($0 < p < 1$). On pose $q = 1 - p$.

1. (Q_1) : X est la variable aléatoire qui indique le nombre de succès au terme des n épreuves.
(Q_2) : $Z = n - X$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et q.

2. (Q_1) : Y est la variable aléatoire qui indique le rang du premier succès, 0 sinon.
(Q_2) : $\sum_{k=1}^{n} P(Y = k) = 1$.

3. X est la variable aléatoire définie à la question 1.
h et k sont deux entiers tels que $0 \leqslant h < k \leqslant n$.
(Q_1) : A est l'événement « $h < X \leqslant k$ ».
(Q_2) : $P(A) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant h)$.

Prendre toutes les initiatives

75 Une fontaine en cascades

On suppose que toutes les vasques sont remplies et que le débit est constant.
Prouvez que les volumes d'eau reçus par chaque vasque d'un même niveau sont proportionnels aux coefficients du triangle de Pascal.

76 Probabilité et suite

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On répète n ($n \geqslant 2$) fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule avec remise et à noter sa couleur.
Les boules ont la même probabilité d'être tirées et les tirages sont indépendants.
On note p_n la probabilité de tirer des boules des deux couleurs lors des n tirages.
À partir de quel nombre n de tirages a-t-on $p_n > 0{,}999$?

77 Le risque des impasses

Le programme d'un examen d'oral est constitué de 20 sujets. On propose à chaque candidat deux sujets tirés au hasard, l'un après l'autre : le candidat traite alors le sujet de son choix. Combien de sujets au minimum, un candidat doit-il connaître pour avoir plus de 75 % de chances de savoir traiter au moins l'un des sujets ?

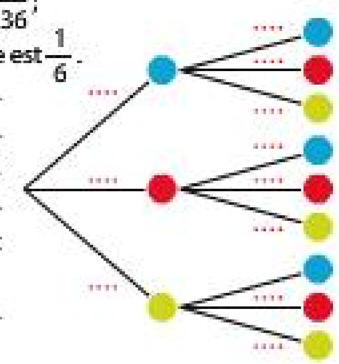
Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.**

A Un arbre qui porte ses fruits

Une urne contient des boules identiques de trois couleurs : bleues (B), vertes (V) et rouges (R).
On tire au hasard et avec remise deux boules de l'urne.
On sait que la probabilité de tirer :

- deux boules bleues est $\dfrac{1}{36}$;
- l'une bleue, l'autre rouge est $\dfrac{1}{6}$.



L'expérience est représentée par l'arbre pondéré ci-contre, où les probabilités des événements B, V et R sont inconnues.

1. Reproduisez puis complétez l'arbre.

2. L'urne contient 18 boules : quelle est sa composition ?

B Au basket-ball

Lucy est inscrite dans un club de basket-ball. Son entraîneur a constaté que lors d'un tir au niveau du poste central la probabilité qu'elle marque un panier est $p = 0{,}6$. À l'entraînement, Lucy effectue une série de n lancers depuis ce poste. On admet que tous ces lancers sont indépendants.

1. Dans cette question $n = 4$.
Calculez les probabilités des événements suivants.

- A : « Lucy marque tous ses paniers » ;
- B : « Lucy marque trois paniers » ;
- C : « Lucy marque au moins un panier ».

2. Quel est le nombre minimum n_0 de lancers, à partir du poste central, que Lucy doit effectuer afin que la probabilité qu'elle réussisse au moins un panier dépasse 0,999 9 ?

C Au cinéma

Une ville ne dispose que d'un cinéma situé au centre-ville et d'un cinéma multiplexe situé en périphérie. Des films français et étrangers sont projetés dans leurs salles.
Une enquête a montré que parmi les personnes qui vont régulièrement au cinéma dans cette ville :

- 75 % préfèrent le cinéma multiplexe (M) ;
- 10 % préfèrent le cinéma du centre-ville (C) et les films français (F) ;
- 70 % préfèrent les films étrangers (E).

1. On interroge au hasard un spectateur régulier.
Calculez les probabilités que la personne préfère :

a) les films français et le cinéma multiplexe ;

b) les films français ou le cinéma du centre-ville.

2. On interroge au hasard, et de façon indépendante, dix personnes qui vont régulièrement au cinéma.
Calculez la probabilité, à 10^{-3} près, que parmi elles cinq préfèrent :

a) les films français et le cinéma multiplexe ;

b) les films français ou le cinéma du centre-ville.

D La grande braderie

Lors des soldes, une boutique affiche des rabais sur un lot de 250 tee-shirts initialement vendus 35 €. Le fournisseur estime qu'un tee-shirt sur cinq présente un léger défaut de coloris.
La gérante prévoit un rabais de 40 % sur les tee-shirts sans défaut, un rabais de 60 % sur les autres, et pense écouler la totalité de son stock. Les coûts d'étiquetage sur ce lot s'élèvent à 150 €.

1. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de tee-shirts sans défaut.
Quelle est la loi de probabilité de X ?
Précisez la valeur de E(X).

2. V est la variable aléatoire qui indique le chiffre d'affaires en euros, réalisé sur la vente du stock, déduction faite des frais d'étiquetage.

a) Exprimez V en fonction de X.

b) Quel chiffre d'affaires, en euros, peut espérer la gérante de la boutique sur la vente de ce lot de tee-shirts ?

E Vente aux enchères

Un site internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères.
La direction affirme que trois quarts des vendeurs opérant sur son site sont satisfaits.
Une enquête de satisfaction a montré que sur 872 vendeurs, 618 se déclarent satisfaits.

1. On suppose que la proportion de vendeurs satisfaits est $p = 0{,}75$.
Déterminez l'intervalle I de fluctuation à 95 %, selon la loi binomiale, de la fréquence de réalisation de l'événement « le vendeur est satisfait de la transaction ».

2. Peut-on considérer, au seuil de 5 %, que l'affirmation de la direction est exacte ?