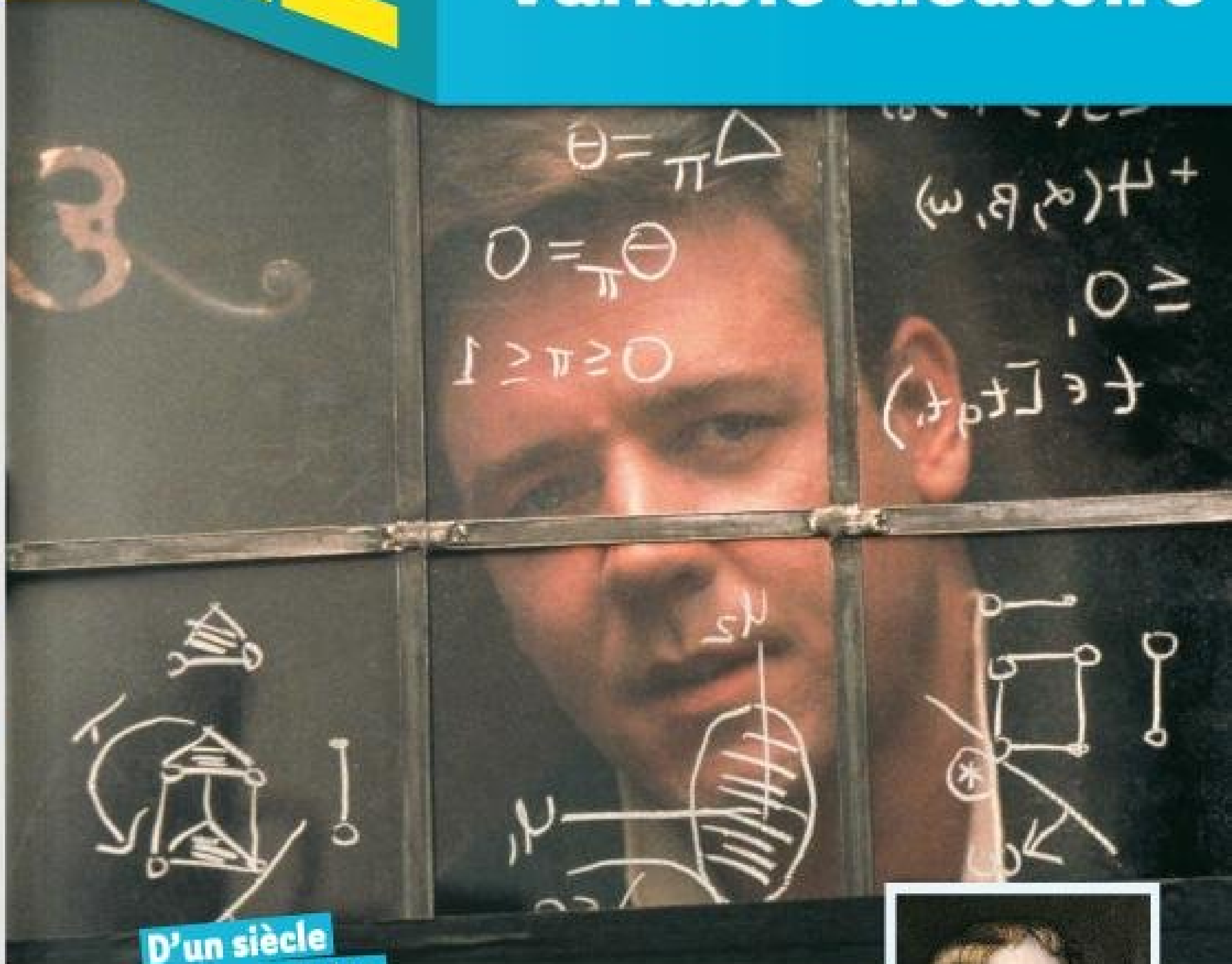
CHAPITRE 12

Probabilités : variable aléatoire



D'un siècle à un autre

Au milieu du XVIIe siècle, Pascal pose les bases du calcul des probabilités en analysant les jeux de hasard.

Au XXe siècle, le mathématicien John Forbes Nash s'intéresse aux équilibres dans les jeux non coopératifs. Cela lui vaudra le prix Nobel d'Économie en 1994.

Russel Crowe interprète le rôle de John Nash dans le film *Un homme d'exception* (2001), qui raconte la vie du brillant mathématicien.

En savoir plus sur **Blaise Pascal**

→ Chercheurs d'hier p. 301

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Expérience aléatoire et probabilité

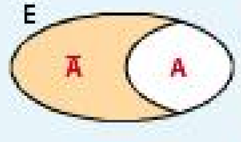
- Pour décrire une expérience aléatoire :
  – on définit l'**univers** $E = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$ constitué de toutes les issues possibles ;
  – on associe à chaque issue sa **probabilité** $P(e_i)$:
  $P(e_i) \geqslant 0$ et $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$.
- Si toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**. Alors :
  $$P(e_i) = \frac{1}{n}.$$

1 Un sac contient 15 boules bleues, 25 boules rouges et 10 boules vertes. On tire au hasard une boule et on considère l'univers constitué des trois couleurs {B ; R ; V}.
a) Indiquez la probabilité de chaque issue.
b) Ces issues sont-elles équiprobables ?

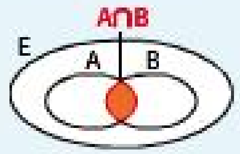
2 On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et on note le résultat sous la forme d'un triplet (exemple : PFP).
a) Utilisez un arbre pour décrire l'univers.
b) Y a-t-il équiprobabilité ?

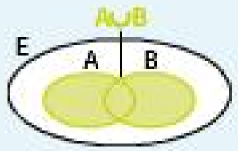
Événements

- Un **événement** A est une partie de l'univers E.
- Son **événement contraire**, $\overline{A}$, contient toutes les issues qui n'appartiennent pas à A.



- Si A et B sont deux événements, alors :
  - **A ∩ B** est l'événement dont les issues sont à la fois dans A **et** dans B ;
  - **A ∪ B** est l'événement dont les issues sont dans A **ou** dans B.





3 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :
A : « la carte est une figure » ;
B : « la carte est rouge ».
a) Énoncez les événements suivants :
• $\overline{A}$ • $\overline{B}$ • $A \cap B$ • $A \cup B$ • $\overline{A} \cap \overline{B}$ • $A \cup \overline{B}$
b) Écrivez chacun des événements suivants en utilisant les événements A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ et les symboles ∩ ou ∪.
C : « La carte est une figure noire ».
D : « La carte n'est ni rouge ni une figure ».

4 On lance un dé cubique parfait et on note le numéro obtenu. On note A et B les événements suivants :
A : « le numéro est pair » ;
B : « le numéro est un multiple de 3 ».
Donnez la liste des issues de chacun des événements :
• A • B • $A \cap B$ • $A \cup B$ • $\overline{A} \cap \overline{B}$ • $\overline{A} \cup \overline{B}$

Calculs de probabilités

- La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui constituent A.
- Dans le cas de l'équiprobabilité :
  $$P(A) = \frac{\textbf{nombre d'issues favorables à A}}{\textbf{nombre d'issues possibles}}$$
- Pour tout événement A, $\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.
- Quels que soient les événements A et B :
  $$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$

Cas particulier. Si A et B sont incompatibles, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, alors :
$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}.$$

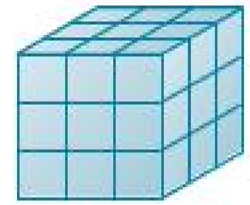
5 Dans une classe de 35 élèves, 17 élèves pratiquent le hand-ball (H), 14 le tennis (T) et 6 les deux sports. On interroge un élève de cette classe pris au hasard.
a) Quelle est la probabilité de l'événement $H \cup T$?
b) Quelle est la probabilité que l'élève ne pratique ni le hand-ball ni le tennis ?

6 Dans une salle d'attente, deux distributeurs de boissons sont installés. On s'intéresse aux événements :
A : « le distributeur 1 fonctionne » ;
B : « le distributeur 2 fonctionne ».
Il a été établi que P(A) = 0,8 et que P(B) = 0,6. De plus, les deux distributeurs ne sont jamais en panne simultanément.
a) Justifiez que $P(A \cup B) = 1$.
b) Comment se note l'événement : « les deux distributeurs fonctionnent en même temps » ? Quelle est sa probabilité ?

Voir les corrigés p. 363

Activité 1 JEU DE CUBES

Une pièce de bois cubique est peinte, puis découpée en petits cubes identiques (voir figure ci-contre) qu'on place dans un sac. On tire au hasard un cube du sac.



1 Combien y a-t-il de tirages possibles ? Sont-ils équiprobables ?

2 On s'intéresse au nombre N de faces peintes sur le cube tiré.
a) Quelles sont les valeurs possibles pour N ?
b) Calculez la probabilité, notée P(N = 3), qu'un cube tiré ait trois faces peintes.
c) Faites de même avec les autres valeurs de N et complétez le tableau.

Valeurs de N				
P(N = k)				

Activité 2 SIMULATION DU LANCER DE DEUX DÉS

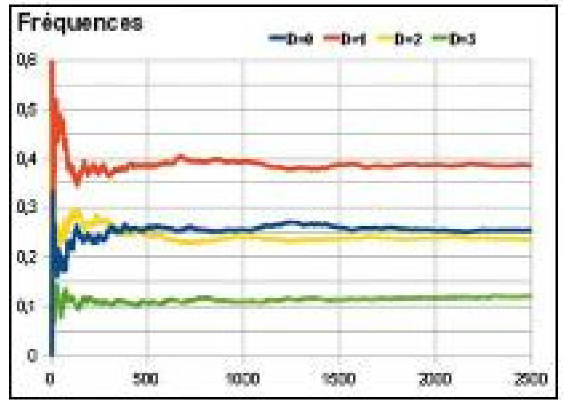
TICE

1 On lance deux dés tétraédriques parfaits numérotés de 1 à 4 (voir la photographie p. 294). On lit au sommet de chacun d'eux les numéros sortis d_1 et d_2 (entre 1 et 4), puis on calcule la valeur absolue de leur différence. On pose $D = |d_1 - d_2|$.
Quels sont les résultats possibles pour D ?

2 On va simuler n fois ($n \leqslant 2500$) cette expérience.
a) Ouvrez une feuille de calcul puis complétez les cellules A2, B2, C2 et D2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N° du lancer	Dé 1	Dé 2	$D=\|d_1-d_2\|$	D=0	D=1	D=2	D=3
2								

b) Affichez la fréquence de réalisation de chaque événement du type « D = k » au cours de ces n lancers.
outil 10 outil 11
c) Copiez la ligne 2 jusqu'à la ligne 2501.
d) Représentez les fréquences des événements « D = k » en fonction de n.
e) La « **loi des grands nombres** » dit que :
« La fréquence estimée au cours de n répétitions se rapproche avec toujours plus de certitude de la probabilité de l'événement, au fur et à mesure que n devient grand ».
Estimez alors les probabilités P(D = k).

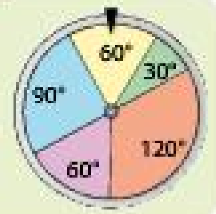


3 L'expérience peut se représenter par un tableau à double entrée où les cases correspondent aux issues possibles, toutes équiprobables. Faites ce tableau et placez-y les valeurs de D. Déduisez-en la probabilité de chaque événement « D = k ».

Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

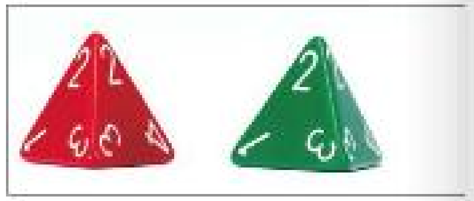
Voici le schéma de la « roue de la fortune » proposé dans une foire. Le joueur mise 15 €. Si le rouge sort, il perd sa mise ; si c'est le violet, le forain rembourse 5 € ; si c'est le jaune, le remboursement s'élève à 10 € ; si c'est le bleu, le joueur reçoit 21 €. Quant au secteur vert, qui attribue le plus gros gain au joueur, le forain hésite sur le montant que recevra le joueur. Aidez le forain dans sa stratégie.



1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Définition d'une variable aléatoire

Exemple. Un jeu de hasard se déroule selon le protocole suivant. Le joueur débourse 2 €, puis lance deux dés tétraédriques parfaits. Il lit les numéros sortis (entre 1 et 4) au sommet de chacun des dés. S'il obtient un « double », le joueur récupère sa mise et reçoit une somme, en euros, égale au total des points marqués ; sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.



Animation

On s'intéresse au gain (algébrique), noté X, du joueur.

- On considère **l'expérience aléatoire : lancer les deux dés**. L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples d'entiers $(x ; y)$ avec $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$.

Les dés étant équilibrés, les issues obtenues sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{16}$.

- Pour évaluer le gain X du joueur, on peut utiliser un tableau à double entrée où le gain algébrique est indiqué dans la case associée à l'issue correspondante.

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4
1	2	−2	−2	−2
2	−2	4	−2	−2
3	−2	−2	6	−2
4	−2	−2	−2	8

À chaque issue est associé un gain :

$(1;1) \mapsto 2 \quad (1;2) \mapsto -2 \quad (1;3) \mapsto -2 \ldots (4;3) \mapsto -2 \quad (4;4) \mapsto 8$

- On dit alors que l'on a défini **la variable aléatoire X** qui donne le gain du joueur.

Remarque. X est une **fonction**. À chaque issue, elle associe le nombre qui est le gain du joueur.

Définition 1 E est l'univers associé à une expérience aléatoire.
Définir une **variable aléatoire X** sur E, c'est associer à chaque issue de E un nombre x.

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Reprenons l'exemple. Cherchons la probabilité de « gagner 2 € », événement noté « X = 2 ». Cet événement est réalisé pour la seule issue (1;1), avec la probabilité de $\frac{1}{16}$.

On écrit alors $P(X = 2) = \frac{1}{16}$. De même : $P(X = 4) = P(X = 6) = P(X = 8) = \frac{1}{16}$.

L'événement « X = −2 » est constitué des 12 issues $(x ; y)$ telles que $x \neq y$. En raison de l'équiprobabilité, $P(X = -2) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

On en déduit le tableau suivant, où la somme des probabilités est égale à 1.

Gain x_i	−2	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Ce tableau représente **la loi de probabilité** de X.

Définition 2 X est une variable aléatoire sur un univers E muni d'une loi de probabilité P. On note x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ les différentes valeurs prises par X.
Définir la **loi de probabilité de X** consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement « $X = x_i$ ».

Remarque. $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = 1$.

2 Paramètres d'une variable aléatoire

2.1 Espérance, variance, écart-type

En statistique, on a dressé le tableau des fréquences d'un caractère. En probabilité, la loi d'une variable aléatoire conduit à un tableau analogue. D'où les définitions qui suivent.

Définition 3 X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée par le tableau suivant :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_k
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

- **L'espérance mathématique de X**, notée **E(X)**, est la moyenne des x_i :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k = \sum_{i=1}^{k} p_ix_i.$$

- **La variance de X**, notée **V(X)**, est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - E(X))$:

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_k(x_k - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i - E(X))^2 \quad (1).$$

Voir chapitre 11, page 269.

La variance est aussi la moyenne des carrés des valeurs moins le carré de l'espérance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_ix_i^2 - [E(X)]^2 \quad (2).$$

- **L'écart-type de X**, noté **σ(X)**, est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple. Reprenons la loi de la variable aléatoire X de l'exemple du paragraphe 1.2.

Les valeurs de E(X) et σ(X) sont données directement par la calculatrice. Voir page 302.

- **Espérance :** $E(X) = \frac{3}{4} \times (-2) + \frac{1}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{16} \times 6 + \frac{1}{16} \times 8 = -0{,}25$ €.

L'espérance peut s'interpréter en disant que si on joue un très grand nombre de fois, le **gain moyen** qu'on peut « espérer » est de −0,25 €. → Exercice TICE 19, page 303

Lorsque E(X) = 0, le jeu est dit **équitable** ; ici E(X) < 0 donc le jeu est défavorable au joueur.

- **Variance :** $V(X) = \frac{3}{4} \times (-1{,}75)^2 + \frac{1}{16} \times 2{,}25^2 + \frac{1}{16} \times 4{,}25^2 + \frac{1}{16} \times 6{,}25^2 + \frac{1}{16} \times 8{,}25^2 = 10{,}4375$.
- **Écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ donc $\sigma(X) \approx 3{,}23$ €.

2.2 Formules sur l'espérance et la variance

X est une variable aléatoire définie sur un univers E. X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Pour tous nombres a et b, on définit une nouvelle variable aléatoire, en associant à chaque issue donnant la valeur x_i, le nombre $ax_i + b$; on note cette variable aléatoire $aX + b$.

Théorème 1 X est une variable aléatoire d'espérance E(X) et de variance V(X).
Pour tous nombres a et b : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX) = a^2V(X)$.

• Exercice 57, ROC → p. 311

Démonstration.

- $E(aX + b) = p_1(ax_1 + b) + p_2(ax_2 + b) + \ldots + p_k(ax_k + b)$.

$E(aX + b) = ap_1x_1 + p_1b + ap_2x_2 + p_2b + \ldots + ap_kx_k + p_kb$.

$E(aX + b) = a(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k) + (p_1 + p_2 + \ldots + p_k)b$.

Or $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k$ et $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ donc $E(aX + b) = aE(X) + b$.

- D'après la formule (2) de calcul de la variance : $V(aX) = p_1(ax_1)^2 + p_2(ax_2)^2 + \ldots + p_k(ax_k)^2 - [E(aX)]^2$.

$V(aX) = p_1a^2x_1^2 + p_2a^2x_2^2 + \ldots + p_ka^2x_k^2 - [aE(X)]^2 = a^2(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_kx_k^2) - a^2[E(X)]^2$.

$V(aX) = a^2(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_kx_k^2 - [E(X)]^2)$ donc $V(aX) = a^2V(X)$.

Application

Compléments numériques

OBJECTIF 1 Définir la loi d'une variable aléatoire

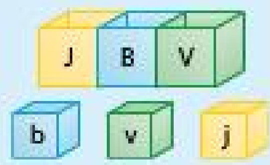
X est une variable aléatoire définie sur l'univers associé à une expérience aléatoire.
Définir la loi de probabilité de X revient à dresser le tableau suivant.

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

- $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les valeurs prises par X.
- $p_i = P(X = x_i)$ et $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

EXERCICE RÉSOLU A Dresser le tableau de la loi de probabilité de X

Un jouet est constitué d'une boîte formée de trois cases peintes en jaune, bleu et vert, et de trois cubes ayant ces mêmes couleurs. L'enfant place au hasard un cube par case. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de coïncidences de couleurs. Quelle est la loi de probabilité de X ?

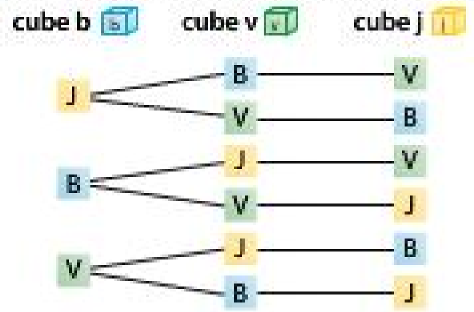


Méthode

- On définit d'abord l'univers associé à l'expérience.
Un arbre permet de représenter toutes les issues en associant à chaque cube la case où on le place.

Solution

- On dénombre les issues à l'aide d'un arbre.



Méthode

- On s'assure que les événements élémentaires sont équiprobables.
- On donne les valeurs x_i prises par X.
- On calcule la probabilité de chaque événement du type « $X = x_i$ ».
- On conclut.
Pensez à vérifier que $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = 1$.

Solution

- Les cubes sont placés au hasard, donc les six issues sont équiprobables.
- X prend les valeurs 0, 1, 3.
- « X = 0 » signifie « aucune coïncidence ».
Cet événement est constitué des seules issues JBV et VJB donc $P(X = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
De même, $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(X = 3) = \frac{1}{6}$.
- D'où la loi de X.

x_i	0	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Mise en pratique

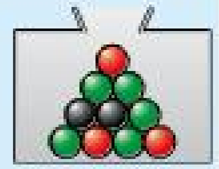
1 On lance deux dés cubiques parfaits portant les numéros 1 à 6. À chaque lancer on associe la somme S des numéros obtenus. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire S ?

2 On lance quatre fois une pièce de monnaie équilibrée. N est la variable aléatoire donnant le nombre de « Face » obtenu.
Déterminez la loi de probabilité de N.

3 Un mobile se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC.
À chaque sommet, il choisit sa direction au hasard.
Parti de A, il effectue quatre déplacements.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de passages en A, départ non compris.
Déterminez la loi de probabilité de X.

EXERCICE RÉSOLU B Calculer les paramètres d'une variable aléatoire

Une urne contient dix boules : cinq vertes, trois rouges et deux noires. Un joueur tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. S'il obtient deux boules vertes, il gagne 4 €. Sinon, il perd 2 € pour deux boules rouges, 5 € pour deux boules noires et 1 € pour deux boules de couleurs différentes.
On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.



1. Définissez la loi de probabilité de G.

2. Calculez l'espérance et l'écart-type de G. Ce jeu est-il équitable ?

Méthode

1. • On décrit l'univers associé à ce modèle de tirage. Les choix à chaque tirage sont trop nombreux pour que l'on dessine un arbre.
On utilise alors le système des cases.
- On vérifie l'équiprobabilité des événements élémentaires.
- On détermine les valeurs prises par G.
- On dénombre les issues qui réalisent l'événement « X = 4 ».
- On calcule P(X = 4).
- On détermine de même les probabilités des autres événements.
- On définit la loi de probabilité de G.

2. On calcule l'espérance et l'écart-type.
$E(G) = \sum_{i=1}^{k} p_i g_i$; $V(G) = \sum_{i=1}^{k} p_i g_i^2 - [E(G)]^2$.
- On conclut.

Solution

1. • Une issue est un couple de deux boules.

1^{re} boule	2^e boule
10 choix	10 choix

Donc l'univers contient $10 \times 10 = 100$ issues.
Les boules sont tirées au hasard, donc les 100 issues sont équiprobables.
- G prend les valeurs 4, –2, –5 et –1.
- P(X = 4) correspond à la probabilité de l'événement V : « 2 boules vertes ».
Donc V contient $5 \times 5 = 5^2$ issues favorables.
- D'où $P(X = 4) = \frac{5^2}{100} = 0{,}25$.
- De même, $P(X = -2) = \frac{3^2}{100} = 0{,}09$ et $P(X = -5) = \frac{2^2}{100} = 0{,}04$.
Les issues favorables à l'événement « deux boules de couleurs différentes » sont celles qui n'ont pas encore été comptabilisées.
D'où $P(X = -1) = \frac{100 - (5^2 + 3^2 + 2^2)}{100} = 0{,}62$.
- D'où la loi de probabilité de G :

Gain g_i	–5	–2	–1	4
$p_i = P(G = g_i)$	0,04	0,09	0,62	0,25

2. $E(G) = 0{,}04(-5) + 0{,}09(-2) + 0{,}62(-1) + 0{,}25 \times 4$
$E(G) = 0$.
$V(G) = 0{,}04(-5)^2 + 0{,}09(-2)^2 + 0{,}62(-1)^2 + 0{,}25(4)^2$
$V(G) = 5{,}98$ d'où $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} \approx 2{,}45$ €.
- $E(G) = 0$ donc le jeu est équitable.

Mise en pratique

4 Reprendre l'exercice résolu **B**, mais avec un tirage successif de deux boules sans remise.
La règle du jeu est la même.

5 On lance deux dés cubiques parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
M est la variable aléatoire qui donne le plus grand des numéros sortis.
Calculez l'espérance et l'écart-type de M.

6 Aymeric a oublié le code du cadenas de son ordinateur. Ce code est constitué de quatre chiffres entre 0 et 9. Il ne se souvient que du premier : 2. Il essaie au hasard une combinaison commençant par 2. X désigne la variable aléatoire indiquant le nombre de chiffres bien placés (premier chiffre compris).

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

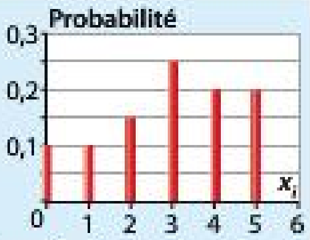
2. Calculez E(X) et V(X).

OBJECTIF 2 Interpréter l'espérance mathématique

X est une variable aléatoire définie sur l'univers associé à une expérience aléatoire.
- Pour tous nombres a et b, $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX) = a^2V(X)$.
- Lors de la répétition, un grand nombre de fois, de l'expérience dans les mêmes conditions, la moyenne des valeurs obtenues pour X se rapproche de l'espérance mathématique de X.

EXERCICE RÉSOLU C Étudier une variable aléatoire du type $aX + b$

Un professionnel vend des fauteuils. Sa commission est de 200 € par fauteuil vendu, et ses frais sont de 280 € par jour. Une étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui indique le nombre x de fauteuils vendus par jour suit la loi représentée par le diagramme.



On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.

1. Quelle relation lie X et Y ?

2. a) Quelle est la probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée ?

b) Quel gain moyen journalier peut-il espérer si la conjoncture reste la même ?

Méthode

1. On exprime le gain algébrique, égal à :
montant des commissions – frais.

2. a) On interprète un déficit comme un gain algébrique négatif.

- Lorsque deux événements A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

b) On calcule E(Y).
On utilise la formule : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Solution

1. Le gain journalier Y est tel que :
$$Y = 200X - 280.$$

2. a) Il s'agit de calculer $P(Y \leqslant 0)$.
« $Y \leqslant 0$ » signifie « $200X - 280 \leqslant 0$ » c'est-à-dire « $X \leqslant 1,4$ ». Cet événement est réalisé lorsque « $X = 0$ » ou « $X = 1$ ».

- Ces deux événements sont incompatibles donc $P(Y \leqslant 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2$.

b) Le gain moyen journalier est E(Y).
$E(Y) = E(200X - 280) = 200E(X) - 280$.
Or, à la calculatrice, $E(X) = 2,95$ donc $E(Y) = 310$. Ainsi le vendeur peut espérer gagner 310 euros en moyenne par jour.

Mise en pratique

7 Une salle de spectacles propose pour la saison une carte d'adhérent au prix de 100 €. Elle donne alors droit à un tarif unique de 15 € pour chacun de ses spectacles. Une étude statistique a montré que parmi les abonnés, 9 % ont assisté à quatre spectacles, 12 % à cinq, 36 % à six, 18 % à sept et le reste à huit spectacles.
On interroge au hasard un abonné sur le nombre de spectacles N auxquels il a assisté.

1. Donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire N, puis calculez E(N).

2. On note S la variable aléatoire indiquant la somme déboursée par un abonné par saison.

a) Quelle relation lie S et N ?

b) Sur quelle dépense moyenne par abonné peut compter le directeur de la salle ?

8 Un commerçant fait une promotion sur des appareils photo et des cartes mémoire. Une étude a permis d'établir que pour un client qui entre dans le magasin, les événements A : « il achète un appareil » et C : « il achète une carte » sont tels que :
$$P(A) = 0,2 ; P(C) = 0,34 \text{ et } P(A \cap C) = 0,14.$$
Le commerçant gagne 4 € par carte et 30 € par appareil. Il a dépensé 250 € d'affichage. On note X la somme que lui rapporte chaque client durant la semaine de promotion.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.

2. B est la variable aléatoire indiquant le bénéfice du commerçant pour 225 clients.

a) Quelle relation lie B et X ?

b) Quel bénéfice moyen peut-il espérer ?

Pour se tester

Exercices interactifs

9 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.
On considère une expérience aléatoire d'univers $E = \{e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n\}$ muni d'une loi de probabilité P.

a) Si à chaque issue on associe un nombre, on dit qu'on définit ……

b) Si X est une variable aléatoire sur E qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$, alors « $X = x_i$ » est ……

c) $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = \ldots\ldots$

d) $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)x_i = \ldots\ldots$

e) La variance de X est …… de l'écart-type de X.

10 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.
On lance deux dés parfaits. On choisit pour univers l'ensemble des couples de numéros, tous équiprobables. On note T le produit des numéros sortis.

a) T est une variable aléatoire qui prend 18 valeurs.

b) Les événements « $T = t_i$ » sont équiprobables.

c) $P(T \leqslant 10) < 0,5$.

d) $P(6 \leqslant T \leqslant 18) = 0,5$.

e) L'espérance mathématique de T est égale à $\frac{49}{4}$.

f) $E(4T - 48) = 1$.

11 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Dans un jeu de dominos, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.

Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu complet. S'il tire un double (n et n), il reçoit n euros ; sinon, il perd un euro. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

1. Le nombre de dominos est :
a) 24 b) 36 c) 28

2. La probabilité d'obtenir un double est :
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$

3. Les événements du type « $X = x_i$ » sont tels que :
a) $P(X = 6) = 6\,P(X = 1)$
b) $P(X = -1) = 0,5$
c) $21\,P(X = 0) = P(X = -1)$

4. Pour le joueur, le jeu est :
a) équitable b) défavorable c) favorable

12 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

Une entreprise fabrique des lentilles optiques. Des tests de conformité sur un lot de 500 lentilles ont permis de montrer que 18 ont un défaut de diamètre, 15 ont un défaut d'épaisseur et 472 n'ont aucun défaut.
On prélève au hasard une lentille du lot.
Les événements concernant la lentille sont notés :
- D : « défaut de diamètre » • E : « défaut d'épaisseur ».

X est la variable aléatoire qui à une lentille prélevée associe le nombre de défauts de conformité.
Utilisez un diagramme ensembliste pour répondre.

1. Les événements D et E sont tels que :
a) $P(\overline{D} \cap \overline{E}) = 0,944$ b) $P(D \cup E) = 0,056$
c) $P(D \cap \overline{E}) = 0,036$

2. La variable aléatoire X est telle que :
a) X prend deux valeurs b) $P(X = 2) = 0,01$
c) $P(X = 1) = 0,046$

3. La variable aléatoire X est telle que :
a) $E(500X - 33) = 0$ b) $\sigma(X) < 0,1$
c) $V(500X) = 500V(X)$

Voir les corrigés p. 366

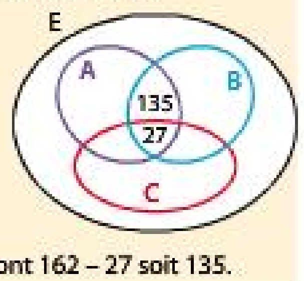
Apprendre à chercher

13 Sondage et variable aléatoire

Un sondage indique les connexions d'un échantillon de 1 350 internautes à trois sites notés A, B, C.
Parmi les sondés, 675 visitent le site A, 522 le site B, 540 le site C, 162 les sites A et B, 135 les sites A et C, 162 les sites B et C. Enfin, 27 visitent les trois sites.
On interroge au hasard un internaute de l'échantillon.
S est la variable aléatoire qui indique le nombre de sites visités parmi A, B et C.

Objectif Calculer l'espérance mathématique de S.

1. Interroger un internaute au hasard signifie que si l'on prend comme univers E l'ensemble des personnes de l'échantillon, les issues sont équiprobables.
Pour calculer la probabilité des événements A, B, C, un diagramme ensembliste est particulièrement adapté. Par exemple, 27 internautes visitent les trois sites A, B, C. Ceux qui visitent uniquement A et B sont 162 – 27 soit 135.



Reproduisez et complétez le diagramme.

2. Quel est le nombre d'internautes qui ne se connectent ni à A, ni à B, ni à C ?

3. a) Quelles sont les valeurs prises par S ?
b) Déterminez la loi de probabilité de S.
c) Déduisez-en la valeur de E(S) à 10^{-3} près.

14 Variable aléatoire et géométrie

Un sac contient six jetons, numérotés –3, –2, –1, 1, 2, 3.
On tire au hasard, successivement, avec remise, deux jetons de l'urne.
On note $(x ; y)$ l'issue ainsi obtenue. À chaque issue, on associe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, le point M de coordonnées $(x ; y)$.
Pour tout entier naturel r tel que $1 \leqslant r \leqslant 5$, on note D_r le disque de centre O et de rayon r.

Objectif Déterminer, suivant les valeurs de r, la probabilité que le point M appartienne à D_r.

1. La situation est ici de nature géométrique. La position du point M dépend de l'issue du tirage. Il peut être judicieux de répertorier les différentes issues possibles dans un tableau. On peut alors placer le point M dans le plan repéré.

a) Quel est le nombre d'issues possibles ? Y a-t-il équiprobabilité ?
b) Tracez les différents disques D_r $(1 \leqslant r \leqslant 5)$ et marquez les positions possibles du point M.
c) Vérifiez par un calcul que le point de coordonnées $(3 ; 1)$ est extérieur au disque D_3.

2. Il s'agit de repérer la position du point $M(x ; y)$ par rapport au disque D_r. Dire que M appartient à D_r signifie que $OM \leqslant r$. Or, OM et r sont positifs donc cette condition équivaut à $OM^2 \leqslant r^2$.
On introduit alors la variable aléatoire X qui à l'issue $(x ; y)$ associe la distance OM^2.

a) Exprimez X en fonction de x et y.
b) Quelles sont les valeurs prises par X ?
c) Déterminez la loi de probabilité de X puis concluez.

15 Recherche d'un jeu équitable

Une urne contient six boules blanches et n boules rouges (n est un nombre entier tel que $n \geqslant 2$).
Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 € et pour chaque boule rouge, il perd 3 €.

Objectif Déterminer n afin que le jeu soit équitable.

1. Une issue est ici un couple de boules distinctes. D'après le modèle (tirage au hasard sans remise), l'équiprobabilité de chacune des issues est assurée. La règle du jeu conduit à définir la variable aléatoire G qui à chaque issue associe le gain algébrique du joueur.

a) Exprimez, en fonction du nombre n, le nombre d'issues possibles.

Aide

On peut utiliser la méthode du remplissage des cases pour dénombrer les issues possibles.	1re boule	2^e boule
	... choix	... choix

b) Quelles sont les valeurs prises par G ?
c) Que signifie l'événement « G = –1 » ?
Déduisez-en que $P(G = -1) = \dfrac{12n}{(n + 6)(n + 5)}$.
d) Déterminez la loi de probabilité de G.

2. Dire que le jeu est équitable, signifie que l'espérance mathématique de G est nulle. Le problème est donc de déterminer l'entier n tel que $E(G) = 0$.

a) Prouvez que $E(G) = \dfrac{-6n^2 - 6n + 120}{(n + 6)(n + 5)}$.
b) Déduisez-en la valeur de n qui convient.

Narration de recherche

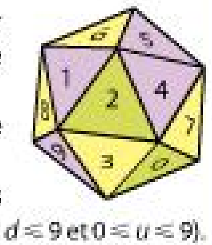
→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

16 Un test au hasard

Un test de compétence consiste à répondre à cinq questions. Pour chacune d'elles, deux réponses R_1 et R_2 sont proposées, dont une seule est exacte.
Chaque élève remplit une grille en notant 1 ou 2 dans la case associée à chacune des questions. Une réponse exacte rapporte deux points tandis qu'une réponse inexacte pénalise d'un point. Si le total est négatif, on attribue la note 0. Le test est réussi si la note dépasse 5.
Un élève choisit de répondre au hasard à chacune des cinq questions.
Sa stratégie est-elle payante s'il passe un grand nombre de tests de cette façon ?

17 Un choix de nombre au hasard

Une expérience consiste à lancer deux fois un « dé de 20 » (dé en forme d'icosaèdre régulier).



Les faces opposées portent le même numéro, pris parmi 0, 1, 2, …, 9.
On note $(d ; u)$ l'issue associée à ces deux lancers (d et u entiers tels que $0 \leqslant d \leqslant 9$ et $0 \leqslant u \leqslant 9$).
On considère la variable aléatoire T qui à chaque issue associe le nombre $10d + u$.
Quelle est la particularité de la loi de probabilité de T ?
Déduisez-en une méthode pour simuler le choix d'un entier au hasard entre 0 et 99 (compris).

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine des probabilités et des statistiques.

Blaise Pascal
(1623-1662)

À la fois physicien, mathématicien, philosophe et théologien, il a marqué son siècle. Il a donné son nom à :
– l'unité de pression du système international ;
– un langage de programmation informatique ;
– un processus de calcul, le « triangle de Pascal » (ch. 13) ;
– un argument probabiliste de théologie, « le pari de Pascal ».
Il est considéré comme l'un des précurseurs de la théorie des probabilités. La solution du célèbre problème des « partis », qu'il rédige dans une lettre à Pierre de Fermat, est passée à la postérité.

Sur le Web http://villemin.gerard.free/wwwgvmm/probabil/pileface.htm
http://villemin.gerard.free.fr/Esprit/Pascal.htm

Utiliser sa calculatrice

→ Pour calculer l'espérance mathématique et l'écart-type d'une variable aléatoire

TP 18 Afficher les indicateurs d'une variable aléatoire

On reprend la variable aléatoire G définie à l'exercice résolu B.
Sa loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous.

Gain g_i	-5	-2	-1	4
$p_i = P(G = g_i)$	0,04	0,09	0,62	0,25

Affichez l'espérance mathématique et l'écart-type de G.

Avec une Casio

Sélectionnez le mode STAT.

- Entrez les valeurs prises par G dans List 1.
- Entrez les probabilités dans List 2.
- Sélectionnez la fonction CALC (F2).

Pour procéder au réglage, utilisez l'instruction SET (F6).

```
1VAR 2VAR REG        SET
```

Puis choisissez, en suivant les instructions, et en utilisant les touches de direction :
– les valeurs de X ;
– les probabilités.

```
1Var XList  :List1
1Var Freq   :List2
```

Validez par EXE .

- Pour l'affichage des paramètres : 1VAR (F1).

```
1-Variable
x̄    =0
Σx   =0
Σx²  =5.98
σx   =2.44540385
sx   =
n    =1            ↓
```

L'espérance est notée $\overline{x}$.

Écart-type

Avec une TI

Appuyez sur stats puis, dans le menu EDIT, sélectionnez l'option 1 : Editer (1).

- Entrez les valeurs prises par G dans L1.
- Entrez les probabilités dans L2.
- Pour afficher les paramètres, appuyez sur stats puis, dans le menu CALC, sélectionnez l'option 1 : Stats 1-Var.
- Procédez au réglage des listes L1 et L2.

```
EDIT CALC TESTS
1:Stats 1-Var
2:Stats 2-Var
```

```
Stats 1-Var L1,L
2
```

- Appuyez sur entrer .

```
Stats 1-Var
 x̄=0
 Σx=0
 Σx²=5.98
 Sx=
 σx=2.445403852
↓n=1
```

L'espérance est notée $\overline{x}$.

Écart-type

Utiliser un tableur

→ Pour simuler la loi d'une variable aléatoire

TP 19 Établir le lien entre espérance mathématique et moyenne

COMPÉTENCES

TICE
- Simuler des lancers successifs
- Dénombrer une plage de cellules
- Utiliser des instructions conditionnelles

Mathématiques
- Modéliser une expérience aléatoire
- Définir une variable aléatoire
- Calculer l'espérance mathématique

On dispose de trois dés tétraédriques parfaits : un bleu, un rouge et un vert. On lance ces trois dés et on s'intéresse au nombre de 4 obtenus.
Une issue est un nombre à trois chiffres, par exemple : 1 4 3. On fait l'hypothèse de l'équiprobabilité des issues.
On considère le jeu suivant : si on obtient trois fois le nombre 4, on gagne 36 € ; si on l'obtient deux fois, on gagne 2 € ; sinon, on perd 1 €.
L'objectif de ce TP est d'évaluer le gain moyen que l'on peut espérer sur une série de 2 500 lancers.

1. Simuler avec un tableur

outil 9

outil 10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Expérience n°	Dé bleu	Dé rouge	Dé vert	Sorties du 4	Gain		Moyenne des gains
2								
3								

a) Ouvrez une feuille de calcul et complétez les cellules A2 à D2 avec les formules adéquates.

b) En E2, dénombrez les apparitions du 4 dans la plage de cellule B2 : D2.

Aide Utilisez l'instruction =NB.SI().

c) En F2, faites afficher le gain correspondant à l'issue obtenue à l'expérience n° 1.
Saisissez l'instruction conditionnelle : =SI(E2=3;36;SI(E2=2;2;–1)).
Justifiez qu'elle décrit bien la règle du jeu.

d) Dans la colonne H, on désire afficher la moyenne des gains obtenue en fonction du nombre de lancers. Quelle formule devez-vous saisir ?

e) Sélectionnez la plage de cellules A2:H2, puis recopiez vers le bas jusqu'à la ligne 2 501.

outil 11

f) Sélectionnez les colonnes A et H, puis représentez le gain moyen en fonction du nombre n d'expériences.

Aide Type de diagramme XY, option Lignes seules.

2. Conjecturer

Simulez plusieurs fois cette expérience à l'aide de la touche F9 (Excel) ou des touches Ctrl ⇧ F9 (Calc).
Comment évolue la moyenne des gains en fonction du nombre de lancers ?
Quel gain moyen peut-on espérer au bout de 2 500 lancers ?

3. Démontrer

a) Quel est le nombre d'issues possibles lors d'une expérience ?

b) Dénombrez les issues favorables à la sortie de trois numéros 4 ; de deux numéros 4.

c) On appelle G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique en euros du joueur.
Dressez le tableau de la loi de probabilité de G, puis calculez E(G).

d) Quel lien faites-vous entre le résultat de la simulation et l'espérance mathématique de G ?

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

20 On lance une pièce équilibrée. À chaque issue, pile ou face, on associe respectivement 1 ou 0. On définit ainsi une variable aléatoire X.
Quelle est la valeur de E(X) ? de V(X) ?

21 On lance un dé cubique parfait. Si le numéro 6 sort, on gagne 10 €, sinon on perd 2 €. On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité de G ?

2. Ce jeu est-il équitable ?

22 La loi de probabilité (incomplète) d'une variable aléatoire X est indiquée dans le tableau suivant.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	…	$\frac{1}{16}$

1. Que vaut P(X = 3) ?

2. Quelle est la valeur de E(X) ? de V(X) ?

23 X est une variable aléatoire d'espérance 0,5. La moyenne des carrés des valeurs qu'elle prend est 0,34.
Quel est son écart-type ?

24 X est une variable aléatoire d'écart-type 7. La moyenne des carrés des valeurs qu'elle prend est 3 649.
Quelle est son espérance mathématique ?

25 Une variable aléatoire prend les cinq valeurs entières de −2 à 2. Les événements du type « X = k » sont équiprobables.
Quelle est l'espérance de X ? sa variance ?

26 On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
On gagne « a » euros lors de la sortie d'un double, sinon on perd « b » euros. Comment choisir a et b pour que le jeu soit équitable ?

PROBABILITÉS D'ÉVÉNEMENTS

27 Trois revues scientifiques A, B et C mises à la disposition des élèves de Première d'un lycée sont telles que :
- 52 % ont lu A, 43 % ont lu B, 37 % ont lu C ;
- 22 % ont lu A et B, 15 % ont lu A et C, 13 % ont lu B et C ;
- 8 % ont lu les trois revues.

On interroge un élève de Première pris au hasard.

1. Représentez la situation par un diagramme.

Aide Voir l'exercice 13, page 300.

2. Quelle est la probabilité :

a) qu'il ait lu seulement une revue ?

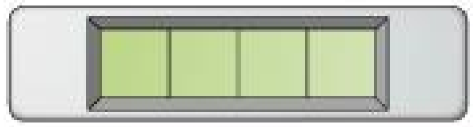
b) qu'il n'ait lu aucune des trois revues ?

28 Dans une classe de 35 élèves, le club théâtre (T) compte 10 élèves et la chorale (C) 12 élèves. Dix-huit élèves ne participent à aucune de ces activités.
On interroge au hasard un élève de cette classe.
Quelle est la probabilité que cet élève :

a) appartienne au club théâtre ou à la chorale ?

b) appartienne au club théâtre et à la chorale ?

29 Un processus aléatoire affiche l'un des nombres, −1 ou +1, dans les cases successives d'un écran.



1. Représentez la situation par un arbre où toutes les issues sont équiprobables.

2. Calculez la probabilité de chacun des événements :

a) la somme des nombres est nulle ;

b) le produit des nombres vaut 1 ;

c) la suite de nombres est alternée.

30 Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires, toutes indiscernables au toucher.

1. On tire successivement, au hasard, trois boules sans remise. Quelles sont les probabilités des événements :
- A : « le tirage ne contient aucune boule blanche » ;
- B : « le tirage contient une seule boule blanche » ;
- C : « le tirage contient deux boules blanches ».

2. a) Même question dans le cas d'un tirage avec remise.

b) A-t-on P(A) + P(B) + P(C) = 1 ? Pourquoi ?

31 On lance deux dés cubiques parfaits :
- un dé bleu dont quatre faces portent le numéro 1 et les autres le numéro 6 ;
- un dé rouge dont deux faces portent le numéro 1, une face le numéro 6 et les autres, le numéro 4.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne :

a) une somme égale à 2 ?

b) une somme égale à 7 ?

2. Les sommes possibles sont-elles équiprobables ?

32 Chaque jour, un représentant doit se rendre dans quatre villes A, B, C et D. Après ses visites, il revient à son point de départ.
Par exemple, ABDCA et DCABD sont des trajets possibles.

1. Quel est le nombre de trajets possibles ?

Aide Utilisez un arbre pour les dénombrer.

2. Le représentant choisit son trajet au hasard.
Quelles sont les probabilités des événements suivants ?
- T : « La ville B est visitée avant la ville A ».
- U : « Les villes B et C se suivent dans cet ordre ».
- V : « Les villes B, A et C se suivent dans cet ordre ».

33 Marie a écrit chacune des lettres de son prénom sur des cartons identiques qu'elle place dans un sac. Louis tire au hasard, un à un, chacun des cartons. Il obtient un anagramme du mot MARIE (par exemple : RMIAE).

1. Combien y a-t-il d'anagrammes possibles ?

2. Calculez la probabilité de chacun des événements :
- S : « l'anagramme obtenu est AIMER » ;
- V : « l'anagramme commence par une voyelle » ;
- C : « l'anagramme se termine par une consonne » ;
- T : « l'anagramme commence par une voyelle ou se termine par une consonne ».

34 Une urne contient cinq boules indiscernables numérotées de 1 à 5. On tire deux boules au hasard, l'une après l'autre et sans remise. Ainsi, une issue est un couple (a ; b) où a est le premier numéro sorti et b le second.

1. Combien y a-t-il d'issues ?

2. On considère les événements suivants :
- A : « La somme $a + b$ est 5 » ;
- B : « La valeur absolue de la différence $a - b$ est 1 ».

Calculez les probabilités suivantes.

a) P(A) b) P(B) c) P(A ∩ B) d) P(A ∪ B)

3. Calculez les probabilités suivantes.

a) $P(\overline{A})$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ d) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

35 Quatre amis se rendent dans un complexe de quatre salles de cinéma. Chacun choisit un film au hasard, indépendamment des autres.
On s'intéresse à leur répartition dans les salles. Les répartitions sont équiprobables.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

2. Calculez les probabilités des événements suivants.
- A : « Ils sont tous dans des salles différentes ».
- B : « Ils sont tous dans la même salle ».
- C : « Au moins deux d'entre eux sont dans la même salle ».

36 Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants des achats :
- 80 % des achats sont payés par chèque ;
- 70 % des achats sont d'un montant inférieur à 200 € et parmi eux, 20 % sont réglés en espèces ;
- 2 % des clients utilisent une carte de paiement qui ne permet pas de régler des achats supérieurs à 200 €.

1. Recopiez puis complétez le tableau ci-dessous.

Mode de paiement	Montant M		
	M ⩽ 200	M > 200	Total
Espèces			
Chèque			80 %
Carte de paiement			
Total	70 %		

2. Le directeur consulte au hasard la fiche d'un client. Calculez la probabilité des événements suivants :
- A : « L'achat dépasse 200 € » ;
- B : « L'achat dépasse 200 € et il est payé en espèces » ;
- C : « L'achat dépasse 200 € ou il est réglé en espèces ».

3. a) Le directeur consulte au hasard la fiche d'un client qui règle en espèces.
Quelle est la probabilité que le montant dépasse 200 € ?

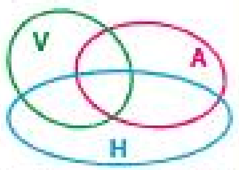
b) Le directeur consulte au hasard la fiche d'un client dont le montant des achats ne dépasse pas 200 €.
Quelle est la probabilité que ce montant soit réglé par chèque ?

37 Une compagnie d'assurance analyse les contrats souscrits par ses clients. Voici les résultats :

- 72 % ont souscrit une assurance Habitation ;
- 54 % ont souscrit une assurance Auto ;
- 30 % ont souscrit une assurance Vie ;
- 7 % ont souscrit les trois types d'assurance ;
- 25 % ont souscrit exactement une assurance Auto et une assurance Habitation ;
- 31 % ont souscrit uniquement une assurance Habitation ;
- 14 % ont souscrit uniquement une assurance Auto.

(Tous les clients ont souscrit au moins un contrat parmi les trois cités ci-dessus.)

1. Sur un diagramme analogue au diagramme ci-contre, indiquez les différents pourcentages dans les zones qui conviennent.



2. La compagnie envoie un courrier à un assuré choisi au hasard. On appelle H l'événement : « l'assuré a souscrit une assurance Habitation », V : « l'assuré a souscrit une assurance Vie » et A : « l'assuré a souscrit une assurance Auto ». Identifiez, sur le diagramme, les événements suivants, et calculez leur probabilité.

a) $A \cap V \cap H$; $A \cap V$; $A \cup H$.

b) $\overline{H} \cap A$; $\overline{H} \cap \overline{V}$.

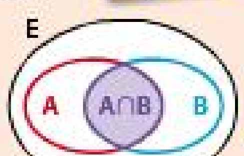
c) $\overline{A \cup H}$; $\overline{A \cup V}$.

3. Décrivez, à l'aide des lettres A, V et H, les événements suivants, puis calculez leur probabilité.

- E : « L'assuré n'a pas souscrit d'assurance Vie, mais il a souscrit une assurance Habitation et une assurance Auto ».
- F : « L'assuré a souscrit uniquement une assurance Auto ».
- G : « L'assuré a souscrit exclusivement une assurance Auto et une assurance Vie ».

38 **Négation d'une proposition** LOGIQUE

Voici la représentation de deux événements A et B et de leur intersection, $A \cap B$, dans un univers E.



Pour toute issue e dans E, on sait que :

« $e \in A \cap B$ » $\Leftrightarrow$ « $e \in A$ » et « $e \in B$ ».

1. a) Écrivez l'équivalence obtenue en prenant la négation de chacune des propositions ci-dessus.

b) Que pouvez-vous en déduire concernant les événements $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$?

2. De même, traduisez l'appartenance d'une issue e à l'événement $A \cup B$.

Par un raisonnement analogue à celui de la question **1.**, démontrez que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

39 Un sac contient quatre jetons indiscernables portant les lettres : A ; L ; E ; A. On tire successivement, sans remise, deux jetons du sac.

1. Quel est le nombre d'issues ?

2. Combien de tirages ne comportent aucun A ?

3. Combien de tirages comportent deux A ?

4. On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de A obtenus.

a) Quelle est la loi de probabilité de N ?

b) Quelle est l'espérance mathématique de N ?

40 Reprendre l'exercice précédent dans le cas d'un tirage avec remise.

41 Dans une enveloppe, on place cinq jetons indiscernables portant les numéros −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2. On tire au hasard un jeton. À chaque jeton, on associe le carré du numéro tiré.

On définit ainsi une variable aléatoire C.

1. Quelle est la loi de probabilité de C ?

2. Calculez l'espérance et la variance de C.

42 Une association sportive organise une loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2 000.

Parmi tous les billets :

– un billet rapporte un lot de 1 500 € ;

– deux billets rapportent chacun un lot de 150 € ;

– cinq billets rapportent chacun un lot de 100 €.

Le prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.

À chaque billet, on associe le gain algébrique G qu'il procure à l'acheteur.

1. a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par G ?

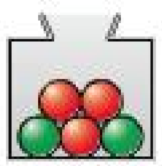
b) Calculez la probabilité $P(G = -2)$.

2. Dressez le tableau de la loi de probabilité de G.

3. Calculez l'espérance de G. Qu'en concluez-vous ?

43 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

On extrait, l'une après l'autre, sans remise, deux boules de l'urne.



À chaque issue, on associe le nombre de boules vertes obtenues. On définit ainsi une variable aléatoire X.

1. a) Calculez $P(X = 0)$.

b) Déterminez la loi de probabilité de X.

2. Calculez E(X). Interprétez ce résultat.

44 La production journalière de tiges filetées d'un atelier de mécanique est indiquée dans le tableau ci-dessous où ℓ désigne la longueur et d désigne le diamètre, exprimés en millimètres.

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

On choisit au hasard une tige pour effectuer un test de conformité. L est la variable aléatoire qui indique la longueur de la tige et D, celle qui indique son diamètre.

1. Donnez la loi de probabilité de D.

2. Donnez la loi de probabilité de L.

3. La tige est usinée de nouveau (événement noté U) si l'événement « $L > 85{,}5$ et $D > 16$ » est réalisé.

La tige est envoyée au rebut (événement noté R) si l'événement « $D > 15{,}9$ ou $L > 84{,}5$ » n'est pas réalisé.

Calculez P(U) et P(R).

45 Un dispositif électronique commande l'allumage des fusées lors d'un feu d'artifice. Il envoie un code qui est un nombre aléatoire de six chiffres ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1.

Exemple de code : | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

N est la variable aléatoire qui indique le nombre de 1.

1. Dressez le tableau de la loi de probabilité de N.

2. Calculez l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire N.

46 Un club de randonnée propose à ses adhérents une sortie payante suivant les tarifs indiqués ci-après.

Catégorie	A (adultes)	J (jeunes)	E (enfants)
Sortie	20 €	13 €	7 €
Repas	12 €	7 €	4 €

Le club a inscrit 87 participants pour cette sortie dont 58 adultes et 12 enfants.

La moitié des adultes, un quart des enfants et dix jeunes ont apporté leur propre pique-nique.

On choisit un participant au hasard.

On note X la variable aléatoire qui indique le prix payé au club par un participant.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. a) Dressez le tableau de la loi de probabilité de X.

b) Sur quel tarif moyen par adhérent peut compter ce club s'il renouvelle un grand nombre de fois ce type de sortie dans les mêmes conditions ?

47 **Utiliser un tableau de probabilités**

Patrick, patron d'un chalutier, fait une sortie sur sa zone de pêche. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons.

On note B et S les événements suivants :

- B : « Il y a un banc de poissons sur sa zone » ;
- S : « Le sonar détecte la présence de poissons ».

Une étude statistique sur les sorties dans cette zone et sur la fiabilité du sonar a permis d'établir que :

$P(B) = 0{,}7$; $P(S) = 0{,}575$; $P(B \cap S) = 0{,}56$.

1. a) Dans le tableau de probabilités ci-contre :

	S	$\overline{S}$	
B	0,56		0,7
$\overline{B}$			
	0,575		1

– la probabilité de B est indiquée en bout de ligne ;

– la probabilité de S est indiquée en bas de colonne ;

– à l'intersection de la ligne de B et de la colonne de S, on indique la probabilité de $B \cap S$.

Pour chaque ligne et chaque colonne, la case blanche est la somme des cases mauves.

Complétez le tableau.

b) Énoncez l'événement $\overline{B} \cap S$ et donnez sa probabilité.

2. Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve dans l'une des situations ci-dessous.

- **Situation 1 :** un banc est présent et le sonar le détecte. Le filet est lancé et la pêche est fructueuse. Dans ce cas, le gain estimé est de 2 000 €.
- **Situation 2 :** il n'y a pas de banc de poissons, mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas, on estime la perte à 400 €.
- **Situation 3 :** le sonar ne détecte rien. Le bateau rentre à quai et on estime la perte à 150 €.

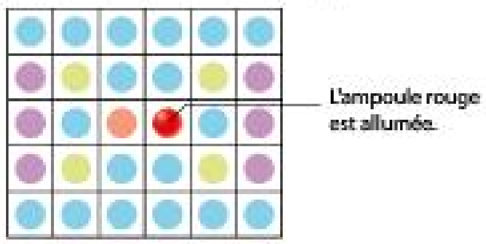
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique pour une sortie en mer.

a) Donnez la loi de probabilité de X.

b) Patrick effectue de nombreuses sorties.
Quel gain moyen par sortie peut-il espérer ?

UTILISATION DES PARAMÈTRES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

48 Un jeu de hasard est constitué d'un dispositif allumant de façon aléatoire une case, et une seule, d'un tableau lumineux dont les ampoules sont rouges (R), vertes (V), bleues (B) ou violettes (V).



L'exploitant donne au client un jeton, servant à actionner le mécanisme, dont il peut fixer à sa guise la valeur a en euros.
Le joueur gagne 80 € si le rouge clignote, 50 € si c'est le vert, rien du tout s'il s'agit du violet et perd 10 fois la valeur du jeton si c'est le bleu.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros du joueur pour une partie.

1. Trouvez la loi de probabilité de X.

2. a) Calculez a pour que le jeu soit équitable.

b) Comment l'exploitant a-t-il intérêt à fixer la valeur a du jeton ?

49 Un club de natation propose à ses adhérents trois types d'activités : la compétition (C), le loisir (L) et l'aquagym (A). Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule de ces activités. Voici la répartition des adhérents suivant l'activité choisie :

- L : 30 % • A : 20 % • C : 50 %

L'adhésion à la section L ou à la section A coûte 60 € tandis que l'adhésion à la section C revient à 100 € pour l'année. En outre, le club organise chaque année une journée de rencontre, notée R, pour laquelle une participation de x euros ($0 < x < 40$) par participant est demandée.
Un tiers des adhérents de L, un quart de ceux de A et la moitié de ceux de C participent à cette journée.

1. Complétez le tableau de répartition des adhérents en inscrivant les pourcentages qui conviennent.

	L	A	C	
R		5 %		
$\overline{R}$				
		20 %		100 %

Aide Pour le remplissage du tableau, voir l'exercice 47.

2. On interroge au hasard un membre du club.
On appelle S la variable aléatoire qui à chaque adhérent associe le montant annuel à verser au club (cotisation plus participation éventuelle à la rencontre).

a) Quelles sont les valeurs prises par S ?

b) Indiquez la loi de probabilité de S.

c) Calculez, en fonction de x, l'espérance E(S).

d) À quel prix le directeur du club doit-il fixer la participation à la journée de rencontre s'il veut que le coût moyen par adhérent ne dépasse pas 90 euros ?

50 Une marque de téléphone portable propose deux options sur ses appareils, le GPS (noté G) et le Wifi (noté W). Sur l'ensemble de sa gamme, 40 % des téléphones possèdent l'option G, 70 %, l'option W et 24 %, les deux à la fois. On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque. On suppose que tous les appareils ont la même probabilité d'être choisis.

1. a) Calculez $P(G \cup W)$.

b) Déduisez-en la probabilité qu'un téléphone n'ait aucune des deux options.

2. Pour le fabricant, le coût de revient par téléphone de l'option G est de 12 euros et celle de l'option W, de 6 €.
On note X la variable aléatoire qui indique ce coût par appareil.

a) Déterminez la loi de probabilité de X.

b) Calculez E(X).

c) Déduisez-en une estimation du coût de revient total de l'équipement de 200 000 appareils dans les mêmes conditions.

51 À la roulette
Au jeu de la roulette, les 37 issues 0, 1, 2, …, 36 sont équiprobables.

On se propose de comparer trois stratégies de jeu.

- **Stratégie 1 :** un joueur mise 10 € sur « rouge ». Si un numéro rouge sort, il reçoit le double de sa mise ; sinon, il perd sa mise.
- **Stratégie 2 :** il mise 10 € sur un numéro. S'il sort, il reçoit 36 fois sa mise ; sinon, il perd sa mise.
- **Stratégie 3 :** il mise 10 € sur l'événement $\boxed{P^{12}}$ qui correspond à la sortie de l'un des numéros 1, 2, …, 12. Si cet événement est réalisé, il reçoit le triple de sa mise ; sinon, il perd sa mise.

1. Pour chacune des stratégies :

a) donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur ;

b) calculez l'espérance mathématique et la variance.

2. Comparez les espérances et les variances. Quelle interprétation faites-vous concernant le gain moyen et la possibilité de « gagner une grosse somme » ?

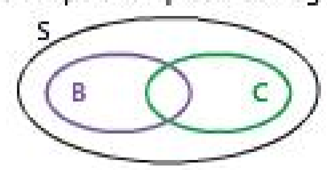
52 Une boutique de vêtements démarqués a reçu un lot important, noté S, de chemisiers en coton.
La responsable constate que ces chemisiers peuvent présenter deux types de défaut :

- 4 % des chemisiers ont un défaut de coloris ;
- 3 % des chemisiers ont un bouton manquant.

Cependant, 95 % des chemisiers sont sans défaut. Une cliente prend au hasard un chemisier dans le lot. On considère les événements suivants :

- B : « le chemisier a un bouton manquant » ;
- C : « le chemisier a un défaut de coloris ».

1. a) Reproduisez puis complétez ce diagramme.



b) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap C$?

2. Le prix de vente d'un chemisier sans défaut est de 40 €. La boutique fait une remise de 20 % si le chemisier a un seul défaut et une remise de 50 % s'il a les deux défauts. V est la variable aléatoire qui indique le prix de vente, en euros, d'un chemisier.

a) Dressez le tableau de la loi de probabilité de V.

b) Calculez E(V).

3. La commerçante a engagé une somme de 540 € pour la promotion.
Quel chiffre d'affaires, promotion déduite, peut-elle espérer réaliser sur la vente de 250 chemisiers ?

53 Un magasin dans une station de sports d'hiver loue des skis de piste (S_p), des snowboards (S_n) et des skis de randonnée (S_r).

Voici la répartition de son matériel :

- S_p : 48 % • S_n : 24 % • S_r : 28 %

Après une journée de location, les skis sont contrôlés et éventuellement réparés. Il a été constaté que :

- 28 % du matériel est du type S_p et en parfait état ;
- 14 % est du type S_n et en parfait état ;
- 8 % est du type S_r et doit être réparé.

Le matériel est répertorié dans un fichier informatique. On ouvre au hasard une des fiches. On note R l'événement : « le matériel nécessite réparation ».

1. Calculez les probabilités :

- $P(R \cap S_p)$ • $P(R \cap S_n)$ • $P(R \cap S_r)$

Aide Utilisez un tableau (voir l'exercice 49).

2. Voici la répartition des frais moyens de réparation :

- type S_p : 22 € • type S_n : 26 € • type S_r : 15 €.

On note X la variable aléatoire qui indique le coût de réparation après une journée de location.

a) Déterminez la loi de probabilité de X.

b) Le matériel est loué 30 € par jour.
Quelle somme moyenne peut espérer gagner le magasin par paire de skis ou snowboard loués ?

54 Une extension de garantie
Une entreprise vend des ordinateurs sur Internet. Ces appareils sont tous garantis un an gratuitement. Elle propose, en option, une extension de garantie payante de deux ans supplémentaires.

1. Une étude faite sur un échantillon de 1 000 ordinateurs vendus par cette entreprise montre que :

- 12 ordinateurs ont été réparés au cours de la deuxième année (événement R_2) ;

- 25 ordinateurs ont été réparés au cours de la troisième année (événement R_3), dont 4 qui avaient déjà été réparés l'année précédente.

Quel est le nombre d'ordinateurs appartenant à :

- $R_2 \cap R_3$? - $R_2 \cap \overline{R_3}$? - $\overline{R_2} \cap R_3$? - $\overline{R_2} \cap \overline{R_3}$?

On admet par la suite que cette répartition modélise ce qui se produit pour l'ensemble des ordinateurs.

2. Selon les chiffres de l'entreprise, si un ordinateur vendu sans extension de garantie tombe en panne, le coût moyen de réparation est de :

- 150 € si la panne a lieu la deuxième année ;
- 200 € si la panne a lieu la troisième année.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque ordinateur vendu sans extension de garantie par cette entreprise, associe le coût moyen de réparation (en €), pour l'acheteur, au cours des trois premières années.

a) Déterminez la loi de probabilité de X.

b) Calculez E(X).

c) L'entreprise propose l'extension de garantie payante de deux ans supplémentaires au tarif de 30 €. L'acheteur a-t-il intérêt à prendre l'extension de garantie ?

55 Deux façons de ranger son classeur

Un classeur contient huit fiches a_1, a_2, …, a_8 rangées dans l'ordre alphabétique. On veut insérer dans ce classeur une neuvième fiche, notée x, en respectant l'ordre alphabétique. Neuf cas sont alors possibles : avant a_1, entre a_1 et a_2, …, entre a_7 et a_8, après a_8.

On adopte les notations suivantes :

- $x < a_1$ si la fiche x est avant la fiche a_1 ;
- $a_i < x < a_{i+1}$ si la fiche x est entre a_i et a_{i+1} ;
- $x > a_8$ si la fiche x est après la fiche a_8.

On se propose d'étudier deux méthodes de rangement.

1. Méthode A

- On compare x à a_1 : si $x < a_1$, on place x en tête.
- Sinon, on compare x à a_2 : si $a_1 < x < a_2$, on place x entre a_1 et a_2.
- Sinon, on compare x à a_3, et ainsi de suite.

X est la variable aléatoire donnant le nombre d'opérations nécessaires pour ranger la fiche x à sa place.

Déterminez la loi de X puis calculez E(X).

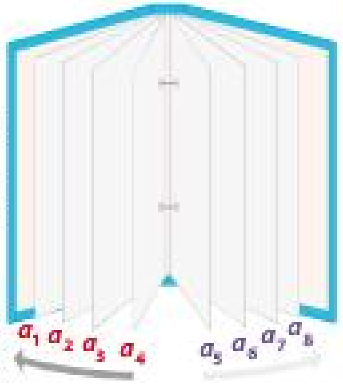
2. Méthode B

- On ouvre le fichier en son milieu.

On compare x à a_4 et a_5 : si $a_4 < x < a_5$, on place x.

- Sinon on connaît la partie où doit se ranger x.

On ouvre ce « demi-fichier » en son milieu et on poursuit le processus.



Y est la variable aléatoire donnant le nombre d'opérations nécessaires pour ranger la fiche x à sa place.

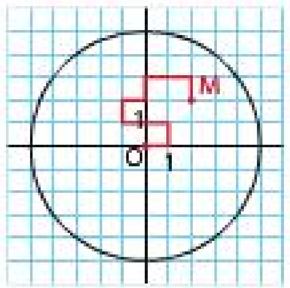
a) Vérifiez que Y prend les valeurs 1, 2 et 3.

b) Déterminez la loi de Y puis calculez E(Y).

3. Comparez les espérances mathématiques de X et Y. Qu'en déduisez-vous quant à ces deux méthodes ?

56 Une promenade aléatoire

Un point M peut se déplacer sur un quadrillage, d'un pas (c'est-à-dire d'un carreau), dans l'une des quatre directions. Les déplacements possibles se font au hasard (ils sont équiprobables). Au départ, M est en O.



M se déplace jusqu'à ce qu'il sorte du disque de centre O et de rayon 5 pour la première fois. On appelle alors N la variable aléatoire qui indique le nombre de pas effectués.

On se propose d'utiliser un algorithme pour calculer des valeurs prises par N, puis pour estimer les probabilités des événements suivants.

- « N ⩽ 15 » - « 15 < N ⩽ 30 » - « N > 30 »

Protocole

On code par 0 un déplacement d'un pas vers la droite ; par 1 un déplacement vers la gauche ; par 2 un déplacement vers le haut ; par 3 un déplacement vers le bas.

Exemple. Le trajet représenté se code 0211202003.

Chaque déplacement se traduit par une relation sur les coordonnées $(x ; y)$ du point M.

Code	Déplacement	Relation
0	1 pas vers la droite	x devient $x + 1$
1	1 pas vers la gauche	x devient $x - 1$
2	1 pas vers le haut	y devient $y + 1$
3	1 pas vers le bas	y devient $y - 1$

1. Complétez l'algorithme.

```
Variables
x,y,N,Z
Algorithme
x ← 0 : y ← 0 : N ← 0
Tant que ...... faire
   N ← N+1
   Z ← nombre entier au hasard entre 0 et 3
   Si Z = 0 alors x ← x + 1
   FinSi
   Si Z = 1 alors ......
   FinSi
   Si Z = 2 alors ......
   FinSi
   Si Z = 3 alors ......
   FinSi
FinTant
Afficher N
```

Aide

Dire que $M(x ; y)$ appartient au disque de centre O et de rayon 5 signifie que $OM \leqslant 5$. Cette condition équivaut à $OM^2 \leqslant 5^2$ soit $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

2. Programmez cet algorithme sur votre calculatrice. Organisez-vous en classe pour obtenir une série de 1 000 valeurs. Déduisez-en les fréquences expérimentales f_{exp}, sur l'échantillon de taille 1 000, des événements :

- « N ⩽ 15 » - « 15 < N ⩽ 30 » - « N > 30 »

3. Déterminez pour chaque événement l'intervalle de confiance au seuil de 95 % de leur probabilité. Commentez vos résultats.

Rappel

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est $\left[f_{exp} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{exp} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où n est la taille de l'échantillon sous les conditions $n \geqslant 25$ et $0{,}2 \leqslant f_{exp} \leqslant 0{,}8$.

ROC Restitution organisée de connaissances

57 Prérequis

X est une variable aléatoire définie sur un univers E muni d'une loi de probabilité P. E prend k valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$. On note p_i la probabilité de l'événement « $X = x_i$ ».

Alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - [E(X)]^2.$$

A. Démonstration

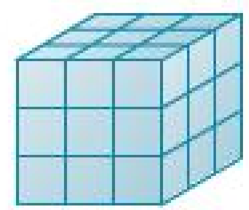
On considère la nouvelle variable aléatoire Y qui à chaque issue donnant la valeur x_i associe le nombre y_i défini par $y_i = 6 - x_i$.

Démontrez que : $E(Y) = 6 - E(X)$ et $V(Y) = V(X)$.

B. Application

Une pièce de bois est peinte puis découpée en petits cubes de même arête qu'on place dans un sac. (Voir l'activité 1, p. 293.)

On tire au hasard un cube du sac.



1. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de faces peintes du cube obtenu.

a) Déterminez la loi de X.

b) Calculez E(X) et V(X).

2. On définit une nouvelle variable aléatoire Y en associant à chaque cube tiré, son nombre de faces non peintes.

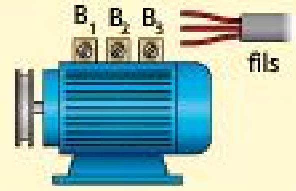
a) Quelle relation lie Y et X ?

b) Déduisez-en l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y.

Prendre toutes les initiatives

58 Le bon régime

Un moteur électrique possédant trois bornes B_1, B_2 et B_3, doit être alimenté en électricité par trois fils, chaque fil étant relié à une borne identifiée.



Si les trois fils sont correctement branchés, le moteur tourne à 1 000 tours par minute ; si un seul fil est branché à la bonne borne, le moteur tourne à 500 tours par minute ; sinon, le moteur ne tourne pas. On a perdu le schéma de montage et on fait le branchement au hasard.

Quelle est la loi de probabilité de la vitesse de ce moteur ?

59 La meilleure stratégie

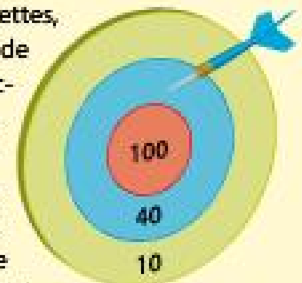
Dans une urne sont placées dix boules indiscernables, cinq blanches et cinq noires. Une expérience consiste à tirer, successivement et au hasard, deux boules de l'urne. On s'intéresse à l'événement : « obtenir au moins une boule blanche ».

- **Stratégie 1 :** on tire les deux boules avec remise.
- **Stratégie 2 :** on tire les deux boules sans remise.

Quelle est la stratégie qui donne les meilleures chances de réalisation de cet événement ?

60 Une moyenne de points

Dans un jeu de fléchettes, la cible est constituée de disques de rayons respectifs 5, 10 et 15 centimètres. Un joueur atteint toujours la cible, et on admet que la probabilité qu'il atteigne une zone de cette cible est proportionnelle à l'aire de cette zone. Ce joueur s'entraîne tous les jours. Quel nombre moyen de points peut-il espérer obtenir lors d'une séance d'entraînement ?



61 Quel jeu choisir ?

On lance deux dés équilibrés. On considère les jeux suivants.

- **Jeu 1 :** on gagne 8 € s'il sort au moins un 5 ou un 6 ; sinon, on perd 10 €.
- **Jeu 2 :** on gagne 350 € si le double 6 sort ; sinon, on perd 10 €.

Auquel de ces jeux préférez-vous jouer ? Justifiez.

Approfondissement

Compléments numériques

62 Au cirque

Sept chevaux pénètrent successivement sur la piste. Parmi eux, trois sont blancs, les autres sont bais. L'ordre d'apparition des chevaux est choisi au hasard.

1. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'entrée du premier cheval blanc.
Définissez la loi de probabilité de X.

2. Sur un grand nombre de représentations, en moyenne, quel est le rang d'apparition du premier cheval blanc ?

63 Composition d'une urne pour un jeu équitable

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire avec remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5 €, et pour chaque boule noire tirée, il perd 10 €.
On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.

1. Définissez, en fonction de n, la loi de probabilité de G.

2. a) Exprimez, en fonction de n, l'espérance E(G).

b) Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

64 Au stand de tir

Quatre cibles numérotées 1, 2, 3, 4 défilent sur une zone de tir. Quatre tireurs A, B, C, D choisissent alors une cible au hasard et tirent simultanément, sans échec.
On se propose de déterminer, en moyenne, le nombre de cibles intactes.
Le résultat d'une expérience est noté par un quadruplet $(x\,;\,y\,;\,z\,;\,t)$ de nombres pris parmi 1, 2, 3 ou 4. Ces nombres indiquent les cibles choisies par les quatre tireurs. Tous ces résultats sont équiprobables.
On appelle X la variable aléatoire qui indique le nombre de cibles intactes.

1. Prouvez que $P(X = 2) = \dfrac{21}{64}$.

2. a) Définissez la loi de probabilité de X.

b) Calculez E(X) puis concluez.

65 Un problème d'éditeur

Une revue est proposée sous deux versions :
– une version papier ;
– une version numérique consultable sur Internet.
L'éditeur a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. Le centre d'appel contacte au hasard une personne de cette liste.
On considère les événements suivants :
- I : « La personne s'abonne à l'édition imprimée » ;
- N : « La personne s'abonne à l'édition numérique ».

Une étude a montré que la probabilité que la personne :
– s'abonne à l'édition imprimée est de 0,2 ;
– s'abonne à l'édition numérique est de 0,16 :
– ne s'abonne à aucune des deux versions est de 0,72.
Pour chacune des personnes contactées, l'éditeur verse au centre d'appel :
- 2 €, si la personne ne s'abonne pas ;
- 10 €, si elle s'abonne à la seule édition numérique ;
- 15 €, si elle s'abonne à la seule édition imprimée ;
- 20 €, si elle s'abonne aux deux éditions.

On note X la variable aléatoire qui indique la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.

2. Donnez une estimation de la somme perçue par le centre d'appel s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels.

66 Une espérance maximale

Une urne contient n jetons indiscernables dont sept sont verts et les autres rouges. On y prélève, successivement et sans remise, deux jetons.

1. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
Calculez les probabilités des événements suivants :
- A : « Les deux jetons sont verts » ;
- B : « Les deux jetons sont de la même couleur » ;
- C : « Le premier jeton est vert et le second est rouge » ;
- D : « Les deux jetons ont des couleurs différentes ».

2. Dans le cas général, n est un entier naturel tel que $n \geqslant 9$. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de couleurs obtenues lors du tirage.

a) Définissez, en fonction de n, la loi de probabilité de X.

b) Vérifiez que l'espérance de X est telle que :

$$E(X) = \frac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)}.$$

c) Déterminez n afin que cette espérance soit maximale.

67 Simulation TICE

On se propose de simuler 400 fois l'expérience de l'exercice 64 « Au stand de tir » et de calculer la moyenne du nombre de cibles intactes.

1. Expérimenter

a) Créez une page de calcul dans un tableur, suivant le modèle ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Tir n°				
2					
3	Tireur	Cible visée			
4	A				
5	B				
6	C				
7	D				
8					
9	Cibles	Nombre d'impacts			
10	1				
11	2				
12	3				
13	4				
14					
15	Intactes				
16					
17	Moyenne				
18					

b) Numérotez les séances de tir de 1 à 400 (plage B1:OK1).

c) Sur la plage B4:B7, on affiche le tir aléatoire sur une cible numérotée de 1 à 4. Complétez chaque cellule par la formule adéquate. Copiez alors vers la droite le contenu de la plage B4:B7 jusqu'en OK4:OK7.

d) Sur la plage B10:B13, on affiche le nombre d'impacts par cibles, ce qui correspond au nombre de tireurs ayant choisi la cible.
Saisissez en B10 : =NB.SI(B$4:B$7;$A10).
Que signifie cette instruction ?
Copiez-la vers le bas jusqu'en B13, puis vers la droite jusqu'à la plage OK10:OK13.

e) Sur la ligne 15, on affiche pour chaque série de tirs le nombre de cibles non touchées.
Quelle instruction doit-on saisir dans la cellule B15 ?
Copiez cette formule vers la droite jusqu'en OK15.

f) On affiche en B17 la moyenne des cibles intactes après cette simulation de 400 séances de tir.

2. Comparer

Faites de nouvelles simulations (F9 ou Ctrl + ⇧ + F9).
Comparez le résultat avec l'espérance mathématique obtenue dans l'exercice 64.

3. Prolongement. Simulez dans les mêmes conditions une séance avec dix tireurs et dix cibles. On obtient ainsi une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X, que vous ne savez pas obtenir simplement par le calcul. Interprétez l'estimation de cette expérience.

68 Somme de deux variables aléatoires

$E = \{e_1\,;\,e_2\,;\,\dots\,;\,e_k\}$ est l'univers associé à une expérience aléatoire. X et Y sont deux variables aléatoires définies sur E : X associe à chaque issue e_i le nombre x_i et Y le nombre y_i. (Les valeurs x_i (ou y_i) ne sont pas nécessairement toutes différentes.)
On définit la variable aléatoire « somme », notée X + Y, en associant à chaque issue e_i le nombre $x_i + y_i$.
On note p_i la probabilité de chaque issue e_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

1. Justifiez que $E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$.

2. Démontrez que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

3. Application

Un processus aléatoire affiche l'un des chiffres 1, 2, 3, 4 dans les cases successives d'un écran.
On se propose de trouver l'espérance mathématique de la variable aléatoire X donnant le nombre de chiffres non utilisés dans l'écriture du nombre de l'écran.
On définit les variables aléatoires M_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ par M_i prend la valeur 1 si le chiffre i manque, 0 sinon.
Par exemple : M_2 vaut 1 si le chiffre 2 manque, 0 sinon.

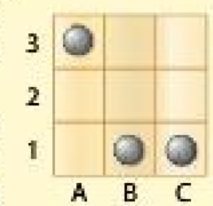
a) Justifiez que $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = X$.

b) Calculez l'espérance mathématique de M_1.
Indiquez alors les espérances de M_2, M_3 et M_4.

c) Utilisez le résultat du **2.** pour en déduire E(X).

Prendre toutes les initiatives

69 Un problème d'alignement



On place successivement, au hasard, trois jetons sur des cases différentes de cette grille.
On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante :
- X prend la valeur 20 si les jetons sont en ligne ou en colonne ;
- X prend la valeur α si les jetons sont alignés en diagonale ;
- X prend la valeur –2 si les jetons ne sont pas alignés.

Pour quelle valeur de α l'espérance de X vaut-elle 0 ?

70 Arrêt au feu

Sur son trajet habituel domicile-lieu de travail, une automobiliste rencontre deux feux tricolores.
On a pu évaluer qu'elle a :
- une chance sur trois d'être arrêtée au premier feu ;
- cinq chances sur douze d'être arrêtée au second feu ;
- une chance sur trois de passer les deux feux sans s'arrêter.

La durée du trajet si les feux sont au vert est de 9 minutes. Chaque arrêt à un feu la pénalise de 1,5 minute.
Quelle est la durée moyenne du trajet ?

Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.**

A Visites au CDI

La fréquentation mensuelle du CDI d'un lycée suivant le niveau des élèves est indiqué ci-dessous.

Niveau	Seconde			Première			
Nombre de visites	0	1	2	0	1	2	3
Effectif	56	140	84	10	60	70	60

Niveau	Terminale			
Nombre de visites	0	1	2	3
Effectif	18	70	38	54

On interroge un élève choisi au hasard et on note :

A : « l'élève est en Première » ;
B : « l'élève vient une fois par mois au CDI » ;
C : « l'élève vient au moins deux fois par mois au CDI ».

1. Calculez les probabilités indiquées.
a) $P(A \cap B)$ **b)** $P(A \cup B)$ **c)** $P(C)$

2. On note V la variable aléatoire qui indique le nombre de visites mensuelles au CDI.
a) Dressez le tableau de la loi de probabilité de V.
b) En moyenne, quel est le nombre de visites que fait un élève au CDI durant un mois ?

B Au café théâtre

Un café-théâtre propose chaque soir un spectacle. Pour attirer les spectateurs, le gérant organise un jeu à l'entrée. Chaque personne lance un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
- S'il obtient 6, l'entrée est gratuite ;
- s'il obtient 1, l'entrée est demi-tarif ;
- sinon, le client paie plein tarif, soit 20 €.

1. Quel est, en moyenne, le prix que peut espérer payer un client durant la campagne de promotion ?

2. Avant la promotion, le prix unique était 20 € et le gérant avait en moyenne 80 clients par jour. Depuis la promotion, la clientèle a augmenté de 40 %.
Le gérant peut-il espérer de meilleures recettes ?

C Un jeu équitable

Une urne contient n jetons ($n \geqslant 5$) indiscernables : deux verts, un bleu, les autres jetons sont rouges. Un jeu consiste à extraire au hasard, l'un après l'autre et sans remise, deux jetons de l'urne.
À chaque tirage, on gagne 10 € pour un jeton vert, 4 € pour un jeton bleu mais on perd 3 € pour un jeton rouge.
Quelle doit être la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable ?

D Des petits bateaux

Une entreprise fabrique des maquettes radiocommandées d'un modèle de porte-avions. Ces maquettes peuvent présenter deux types de défauts :
– un défaut E dans le circuit électrique ;
– un défaut M de nature mécanique.
Les contrôles de qualité sur des échantillons de la production, ont permis d'établir que :
- 90 % des maquettes sont sans défaut ;
- 8 % ont le défaut M ;
- 7 % ont le défaut E.

Le coût de fabrication d'une maquette est de 600 €.
La garantie permet de faire des réparations au frais du fabricant selon les tarifs suivants :
- 100 € pour réparer le seul défaut M ;
- 130 € pour réparer le seul défaut E ;
- 210 € pour réparer les deux défauts M et E.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque maquette choisie au hasard dans la production, associe son prix de revient (coût de fabrication + frais de réparation).

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. On admet que toutes les maquettes sont vendues.
Le fabricant veut réaliser un bénéfice moyen par maquette de 85 €.
Quel doit être le prix de vente d'une maquette ?

E En promotion

Au rayon « image et son » d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur DVD sont en promotion pendant une semaine.
Une personne se présente au rayon. Des études statistiques permettent d'estimer que la probabilité :
- qu'elle achète le téléviseur (T) est 0,60 ;
- qu'elle achète le lecteur DVD (L) est 0,46 ;
- qu'elle n'achète ni l'un ni l'autre est 0,36.

Avant la promotion, le téléviseur coûtait 600 € et le lecteur DVD, 240 €. Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15 % pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25 % pour l'achat des deux appareils.
On note D la variable aléatoire qui indique la dépense effective (en €) de cette personne.

1. Quelle est la loi de probabilité de D ?

2. La responsable du rayon prévoit qu'il se présentera dans la semaine 120 personnes intéressées.
Quel chiffre d'affaires (en €) peut-elle espérer réaliser durant cette semaine ?