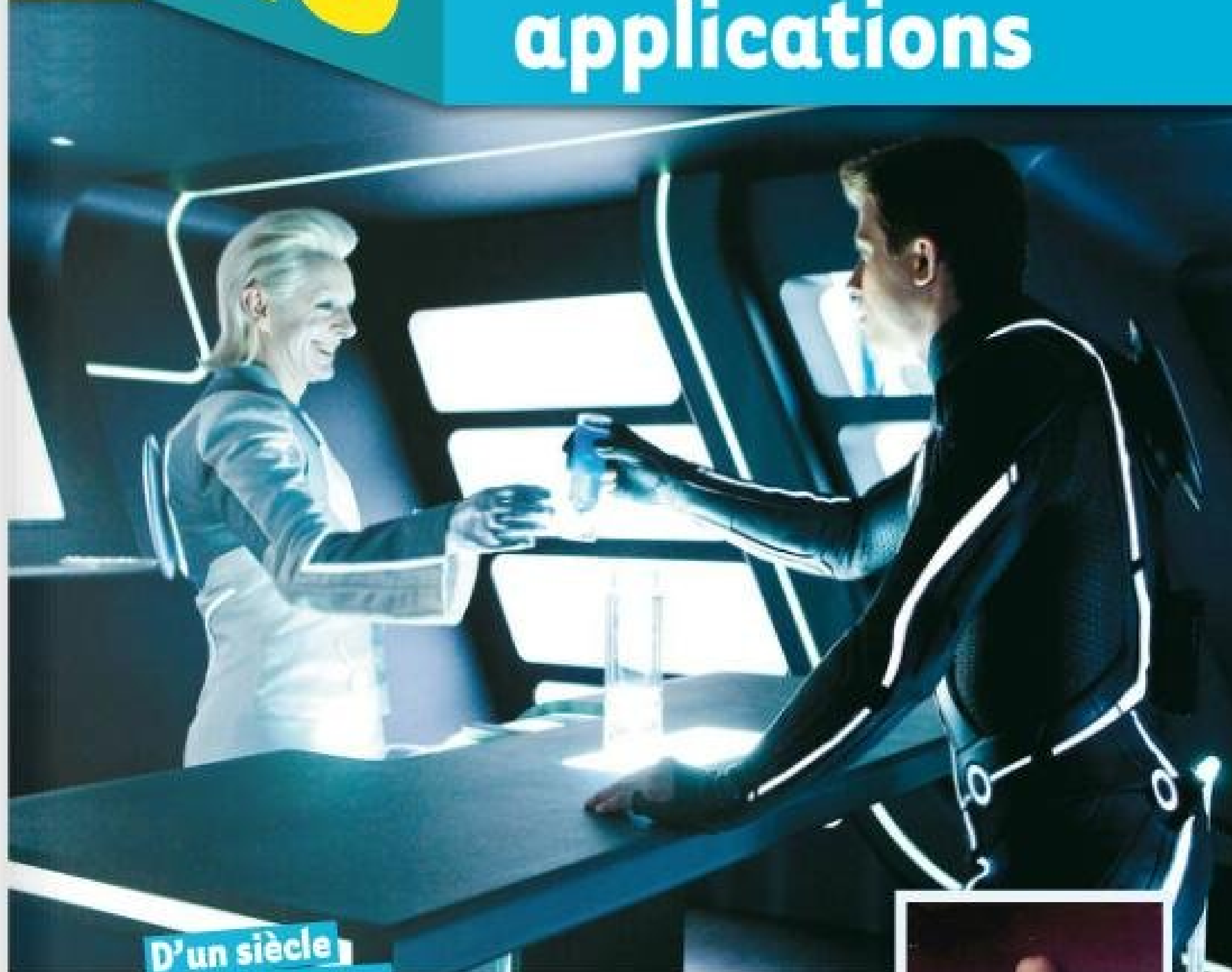
CHAPITRE 10

Produit scalaire : applications

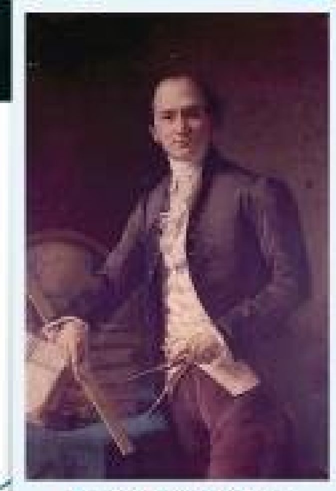


D'un siècle à un autre

Le tournage des films en relief est délicat, les erreurs de positionnement des caméras sont fatales.

Pour ajuster très précisément les décors fictifs et les acteurs réels qui cohabitent dans le film en relief *Tron : l'héritage* (Disney, 2010), il a fallu procéder à de nombreux relevés de points au télémètre laser pour localiser tous les volumes.

La définition et le repérage des images de synthèse sont intimement liés aux notions de vecteurs et de produit scalaire.



En savoir plus sur **Jean-Baptiste Delambre**

→ Chercheurs d'hier p. 253

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Distance AB

Dans un repère **orthonormé**, la distance AB entre deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ est telle que :

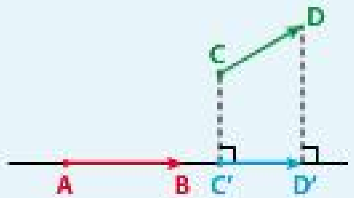
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

1 Dans un repère orthonormé, les points A et B ont pour coordonnées respectives $(-2\,;1)$ et $(3\,;6)$.
Calculez le rayon du cercle centré en A et passant par B.

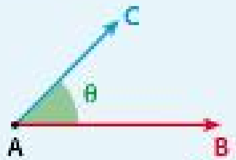
Produit scalaire

- Les points C et D se projettent orthogonalement en C′ et D′ sur la droite (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}.$$



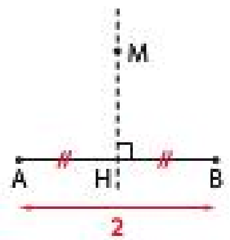
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\theta$.



- Dans un repère **orthonormé**, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$. Alors :

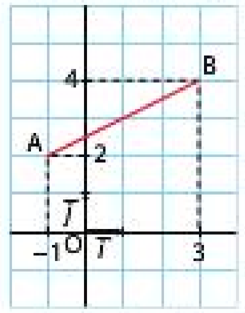
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

2 Démontrez que : « M est un point de la médiatrice de [AB] » équivaut à « $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$ ».



Aide
Voir le Vocabulaire de la logique, p. 346.

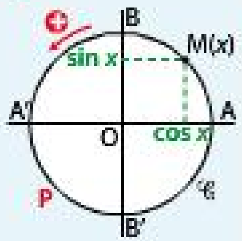
3 Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, à tout point $M(x\,;y)$ on associe le nombre $MA^2 - MB^2$.



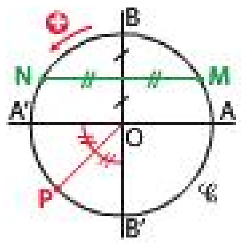
Démontrez que l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 1$ est une droite d dont on donnera une équation.

Cercle trigonométrique

x est un réel, M est le point du cercle trigonométrique associé à x.
Le point **M** a pour coordonnées $(\cos x\,;\sin x)$.



4 $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique. En tenant compte des renseignements portés sur la figure, donnez les coordonnées des points M, N et P dans le repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$?



Relation entre le cosinus et le sinus d'un nombre

Pour tout nombre x, $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.
On note plus simplement :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

5 **a)** On sait que $x \in [0\,;\pi]$ et $\cos x = -\dfrac{1}{4}$.
Calculez la valeur exacte de $\sin x$.

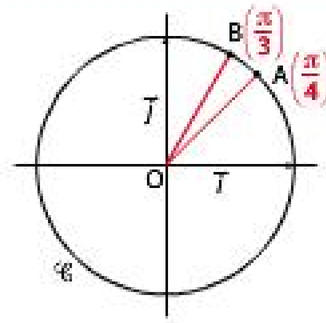
b) On sait que $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et $\sin x = \dfrac{3}{5}$.
Calculez la valeur exacte de $\cos x$.

Voir les corrigés p. 363

ACTIVITÉS

Activité 1 CALCULER COS $\dfrac{\pi}{12}$

1 $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.
A et B sont les points de $\mathscr{C}$ associés respectivement aux nombres $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.
Quelle est, en radians, la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?

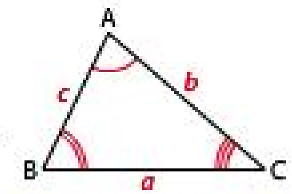


2 **a)** Quelles sont les coordonnées exactes de A et B ?
b) Déduisez-en que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3 **a)** Justifiez que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\dfrac{\pi}{12}$.
b) Déduisez-en la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$, puis vérifiez que $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Activité 2 CALCULER DANS UN TRIANGLE

ABC est un triangle. Selon l'usage, on pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et on note $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles du triangle de sommets respectifs A, B, C.
Dans le triangle ABC, on considère six éléments : a, b, c, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.
Lorsqu'on connaît certains d'entre eux, on peut calculer les éléments manquants.



1 Exemple 1

a) Construisez un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $\widehat{BAC} = 60°$.

b) Développez $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ et déduisez-en que $BC = 2\sqrt{7}$ cm.

On va calculer la mesure BC du côté « manquant ».

c) Développez $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2$ et déduisez-en que $\cos\widehat{B} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

On va calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

- Calculez la mesure de l'angle $\widehat{B}$, puis celle de l'angle $\widehat{C}$ à un degré près.

2 Exemple 2

a) Construisez un triangle ABC tel que $BC = 7$ cm, $BA = 6$ cm et $AC = 3$ cm.

b) Développez $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ et démontrez que $\cos\widehat{A} = -\dfrac{1}{9}$.

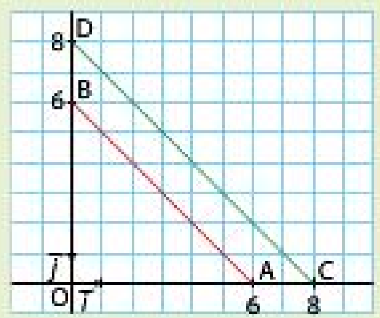
On va calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

- Déduisez-en la mesure de l'angle $\widehat{A}$ à un degré près.

Problème ouvert

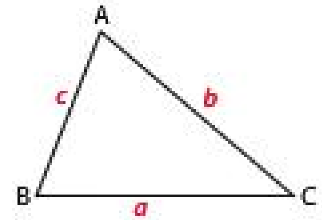
Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.
Démontrez qu'il existe quatre points M du segment [CD] pour lesquels le triangle AMB est rectangle.
Quelles sont les coordonnées de ces points ?



1 Avec le produit scalaire : calculer des longueurs et des angles

1.1 Le théorème de Pythagore « généralisé »



ABC est un triangle quelconque.
Selon l'usage, on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.
Les angles de sommets respectifs A, B et C sont notés $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Théorème 1 ABC est un triangle quelconque. Avec les notations usuelles :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Démonstration

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\widehat{A}$, d'où le résultat :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

On démontre de même que :
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

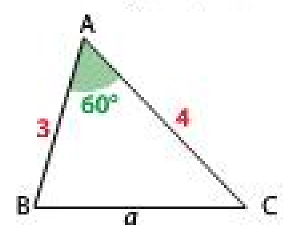
Remarque

« ABC est un triangle rectangle en A » équivaut à « $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ » donc à « $bc\cos\widehat{A} = 0$ », donc finalement à « $a^2 = b^2 + c^2$ ».

D'où le nom de théorème de Pythagore « généralisé » donné à ce théorème.

Intérêt de ce théorème

Si les mesures a, b, c des trois côtés sont connues, on peut calculer les mesures des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

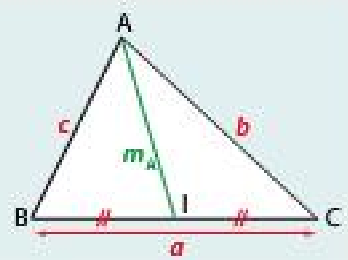


Par exemple, dans la figure ci-contre :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos 60°$,
soit $BC^2 = 9 + 16 - 24 \times \frac{1}{2}$,
donc $BC^2 = 25 - 12 = 13$, d'où $BC = \sqrt{13}$.
De même, $\cos\widehat{B} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, soit $\cos\widehat{B} = \dfrac{9 + 13 - 16}{2 \times 3 \times \sqrt{13}} = \dfrac{6}{6 \times \sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.
Ainsi $\widehat{B} \approx 74°$ (mesure arrondie à un degré près).

1.2 Le théorème de la médiane

Théorème 2 ABC est un triangle, I est le milieu de [BC].
$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et la mesure de la médiane issue de A est notée m_A.

$$b^2 + c^2 = 2m_A^2 + \frac{a^2}{2}.$$



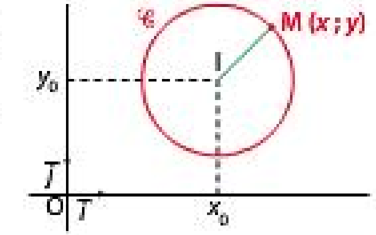
• Exercice résolu B → p. 246

Démonstration

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$
donc $AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 - 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$.
Il en résulte que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2$.
Or $IB = \frac{a}{2}$ et $AI = m_A$ d'où le résultat $c^2 + b^2 = 2m_A^2 + \frac{a^2}{2}$.

2 Cercle et produit scalaire

2.1 Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon



Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, 𝒞 est le cercle de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r.
Par définition : « $M(x ; y)$ est un point de 𝒞 » équivaut à « $IM^2 = r^2$ ».
Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x - x_0 ; y - y_0)$ donc :
$$IM^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$
Ainsi : $M \in 𝒞 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Alors :

Une équation du cercle 𝒞 de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r est :
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Exemple

L'équation $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 12$ est du type $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ avec $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ et $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
C'est donc une équation du cercle de centre $I(-1 ; 2)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

2.2 Équation d'un cercle défini par son diamètre [AB]

Théorème 3 Le cercle 𝒞 de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

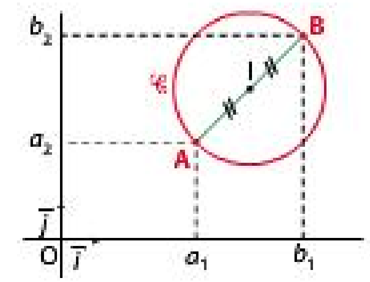
Autrement dit
« M est un point de 𝒞 » équivaut à « $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ ».

LOGIQUE
Vocabulaire de la logique
→ p. 346

Démonstration

On utilise un raisonnement par disjonction des cas.
- Si M = A ou M = B alors $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.
- Si $M \neq A$ et $M \neq B$ alors le triangle AMB est rectangle en M, ce qui équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ non nuls sont orthogonaux, ce qui équivaut à $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

Équation du cercle 𝒞



Le théorème 3 permet de déterminer une équation du cercle 𝒞.
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les points A et B ont pour coordonnées respectives $(a_1 ; a_2)$ et $(b_1 ; b_2)$.
𝒞 est le cercle de diamètre [AB].
« $M(x ; y)$ appartient à 𝒞 » équivaut à « $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ ».
Or $\overrightarrow{MA}$ a pour coordonnées $(a_1 - x ; a_2 - y)$ et $\overrightarrow{MB}$ a pour coordonnées $(b_1 - x ; b_2 - y)$, donc
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (a_1 - x)(b_1 - x) + (a_2 - y)(b_2 - y)$$
$$= x^2 + y^2 - (a_1 + b_1)x - (a_2 + b_2)y + a_1b_1 + a_2b_2$$
Le cercle 𝒞 a donc pour équation :
$$x^2 + y^2 - (a_1 + b_1)x - (a_2 + b_2)y + a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

Cette équation est de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Attention

Tout cercle a une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement celle d'un cercle. → *exercice résolu D, page 248*

3 Trigonométrie

3.1 Les formules d'addition

Théorème 4 Quels que soient les nombres a et b :

(1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

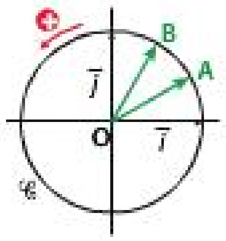
(2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (4) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

• Exercice 89 → p. 260

Démonstration

(1) $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. A et B sont deux points de $\mathscr{C}$ tels que :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a \text{ et } (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b.$$



Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont donc pour coordonnées respectives $(\cos a ; \sin a)$ et $(\cos b ; \sin b)$.

D'après la relation de Chasles : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB})$,

donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OA})$, soit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = b - a$.

Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(b - a) = \cos(b - a) = \cos(a - b)$.

D'où le résultat : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

• Les trois autres relations se déduisent de la précédente.

(2) En écrivant $a + b = a - (-b)$, on obtient :

$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$

$= \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

On utilise $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

(4) $\sin(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

On utilise $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$.

(3) De même, $\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$

$= \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

3.2 Les formules de duplication

En remplaçant b par a dans les formules donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$, on obtient pour tout nombre a :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Or $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, donc :

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \quad \text{ou} \quad \cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a.$$

Il en résulte que :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{ou} \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$$

On en déduit que :

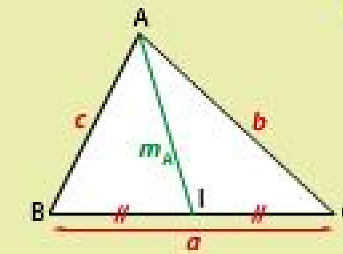
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

OBJECTIF 1 Appliquer le produit scalaire au calcul de longueurs et d'angles

ABC est un triangle, I est le milieu de [BC].
On pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et la mesure de la médiane issue de A est notée m_A.

• **Théorème 1.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$.

• **Théorème 2.** $b^2 + c^2 = 2m_A^2 + \frac{a^2}{2}$.



EXERCICE RÉSOLU A Utiliser le théorème de Pythagore « généralisé »

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

1. Calculez AC.

2. Calculez, à un degré près, la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Méthode

1. On connaît deux côtés et la mesure de l'angle « compris » entre ces côtés.
On applique le théorème 1.

• On conclut.

2. On connaît désormais la mesure des trois côtés du triangle ABC.
La formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ permet de calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

• On conclut.

Solution

1. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos 60°$
soit
$AC^2 = 9 + 64 - 48 \times \frac{1}{2} = 49$.

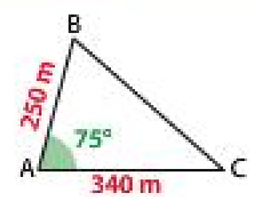
• D'où : $AC = 7$.

2. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.
soit $64 = 9 + 49 - 42 \cos \widehat{A}$, d'où
$\cos \widehat{BAC} = \frac{9 + 49 - 64}{42} = \frac{-6}{42} = -\frac{1}{7}$.

• $\widehat{BAC}$ a pour mesure 98° à un degré près.

Mise en pratique

1

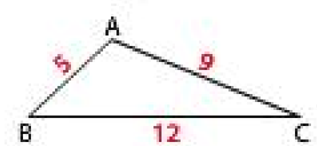


ABC est un triangle. À partir des renseignements portés sur la figure, calculez :

a) la longueur BC, arrondie au décimètre près ;

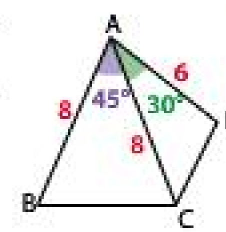
b) les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$, arrondies au dixième de degré.

2 ABC est un triangle.

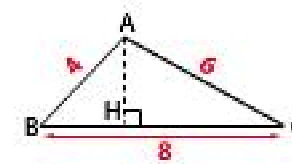


Quelles sont, à un degré près, les mesures des angles du triangle ABC ?

3 Quelle est la valeur exacte du périmètre du quadrilatère ABCD représenté ci-contre ?



4 ABC est un triangle.
H est le pied de la hauteur issue de A.



1. a) Démontrez que $\cos \widehat{ABC} = \frac{11}{16}$.

b) Déduisez-en $\sin \widehat{ABC}$.

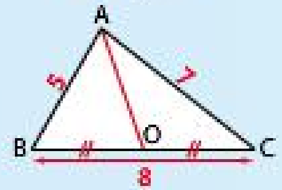
2. a) Démontrez que $AH = \frac{3\sqrt{15}}{4}$.

b) Déduisez-en la valeur exacte de l'aire du triangle ABC.

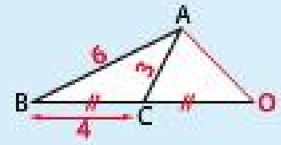
EXERCICE RÉSOLU B Utiliser le théorème de la médiane

Pour chacune des deux figures ci-dessous, calculez la valeur exacte de AO.

a) Figure 1



b) Figure 2



Méthode

a) **Figure 1**. On applique le théorème de la médiane dans le triangle BAC.

• On conclut.

b) **Figure 2**. Là encore, on peut appliquer le théorème de la médiane, mais cette fois dans le triangle BAO.

• On conclut.

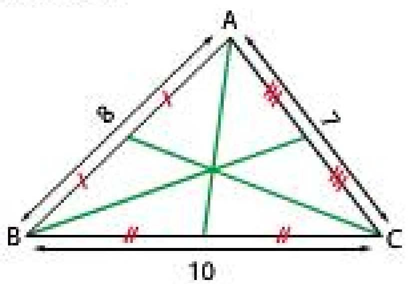
Solution

a) $AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + \frac{BC^2}{2}$,
soit $25 + 49 = 2AO^2 + 32$.
Donc $2AO^2 = 25 + 49 - 32 = 42$.
• $AO^2 = 21$ d'où $AO = \sqrt{21}$.

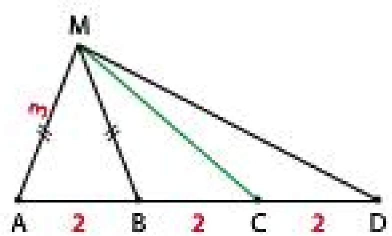
b) $AB^2 + AO^2 = 2AC^2 + \frac{BO^2}{2}$.
Or $BO = 8$, donc :
$36 + AO^2 = 18 + 32$, soit :
$AO^2 = 14$.
• D'où $AO = \sqrt{14}$.

Mise en pratique

5 Calculez, à 0,01 près, la mesure des médianes du triangle ABC.



6 A, B, C et D sont quatre points alignés tels que $AB = BC = CD = 2$.

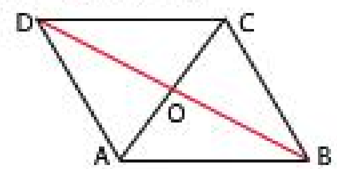


Le triangle AMB est isocèle en A avec $MA = 3$.

1. Démontrez que $MC = \sqrt{17}$.

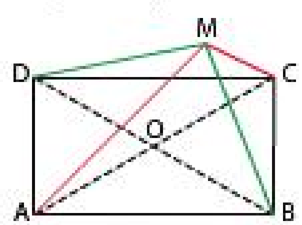
2. Déduisez-en MD.

7 ABCD est un parallélogramme de centre O. $AB = 15$, $BC = 13$ et $AC = 14$.



Démontrez que : $DB = 4\sqrt{37}$.

8 ABCD est un rectangle de centre O. M est un point quelconque.



Démontrez que : $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

9 A et B sont deux points tels que $AB = 4$. O est le milieu de [AB] et M un point tel que :
$$MA^2 + MB^2 = 10.$$

1. Démontrez que $MO^2 = 1$.

2. A et B étant donnés, dessinez la « ligne » à laquelle appartiennent les points M tels que :
$$MA^2 + MB^2 = 10.$$

OBJECTIF 2 Déterminer et reconnaître une équation d'un cercle

• Dans un repère orthonormé, le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r a pour équation :
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$
• Pour savoir si une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est celle d'un cercle, on cherche à écrire cette équation sous la forme :
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$
Alors, $I(x_0 ; y_0)$ est le centre et r est le rayon.

• **Théorème 3.** $\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre [AB]. « M est un point de $\mathscr{C}$ » équivaut à « $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ».

EXERCICE RÉSOLU C Déterminer une équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(2 ; 1) et B(–4 ; 3).
Trouvez une équation :

a) du cercle $\mathscr{C}_1$ de centre A passant par B ; **b)** du cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre [AB].

Méthode

a) On connaît les coordonnées du centre A de $\mathscr{C}_1$. Il reste à trouver le rayon r, c'est-à-dire à calculer AB. Une équation de $\mathscr{C}_1$ est :
$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

b) On utilise le théorème 3.

Note

On peut aussi se ramener au cas précédent en calculant les coordonnées de I, milieu de [AB], qui est le centre du cercle $\mathscr{C}_2$ de rayon $\frac{AB}{2} = \sqrt{10}$.

Solution

a) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (–6 ; 2).
Donc $AB^2 = 36 + 4 = 40$ et $AB = 2\sqrt{10}$.
Donc $\mathscr{C}_1$ a pour équation :
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 40$.

b) « Le point $M(x ; y)$ appartient à $\mathscr{C}_2$ » équivaut à « $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ».
Or $\overrightarrow{MA}(2 - x ; 1 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(-4 - x ; 3 - y)$,
donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (2 - x)(-4 - x) + (1 - y)(3 - y)$.
Une équation du cercle $\mathscr{C}_2$ est donc :
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0.$$

Mise en pratique

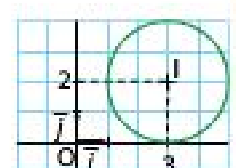
Pour les exercices 10 à 14
Les coordonnées et les équations sont relatives à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

10 Trouvez une équation du cercle :

a) $\mathscr{C}_1$ de centre A(1 ; –3) et de rayon 2 ;

b) $\mathscr{C}_2$ de centre B(–1 ; 1) passant par C(3 ; 2).

11 **1.** Trouvez une équation du cercle de centre I(3 ; 2) tangent à l'axe des abscisses.



2. De même, trouvez une équation du cercle de centre J(–2 ; 4) tangent à l'axe des ordonnées.

12 Trouvez une équation du cercle :

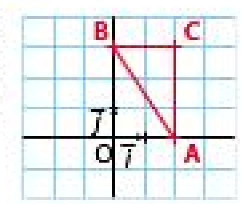
a) de diamètre [OA], avec A(0 ; 2) ;

b) de diamètre [BC], avec B(2 ; 1) et C(–4 ; –1) ;

c) circonscrit au triangle OMN, avec M(–3 ; 2) et N(4 ; 6).

Aide Quelle est la nature de OMN ?

13 On donne les points A(2 ; 0), B(0 ; 3) et C(2 ; 3). Trouvez une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.



14 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I(–2 ; 3). Son rayon est $\sqrt{10}$.

1. Trouvez une équation de $\mathscr{C}$.

2. $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en A et B et l'axe des ordonnées en C et D. Calculez les coordonnées des points A, B, C et D.

EXERCICE RÉSOLU D Reconnaître une équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les équations suivantes :

a) $x^2+y^2-2x+y-5=0$; **b)** $x^2+y^2-2x+4y+5=0$; **c)** $2x^2+2y^2-4x-6y+7=0$.

Pour chacune de ces équations, dites si c'est une équation d'un cercle. Si oui, précisez le rayon et les coordonnées du centre de ce cercle.

Méthode	Solution
a) On cherche à écrire l'équation sous la forme : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.	**a)** $x^2+y^2-2x+y-5=0$ s'écrit : $x^2-2x+y^2+y-5=0$.
• On met x^2-2x et y^2+y sous la forme canonique.	• Or $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $y^2+y=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. Donc $x^2+y^2-2x+y-5=0$ s'écrit : $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.
• On conclut.	• $x^2+y^2-2x+y-5=0$ est une équation du cercle de centre $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.
b) On applique la méthode du **a)**.	**b)** $x^2+y^2-2x+4y+5=0$ s'écrit : $\underbrace{x^2-2x}_{(x-1)^2-1}+\underbrace{y^2+4y}_{(y+2)^2-4}+5=0$. $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+5=0$, soit : $(x-1)^2+(y+2)^2=0$.
• On conclut.	• Ce « cercle » est réduit au seul point $I(1;-2)$. On obtient un « cercle-point ».
c) On simplifie l'expression pour revenir à la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$. • On conclut.	**c)** On divise par 2 : $x^2+y^2-2x-3y+\frac{7}{2}=0$ soit $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$. La somme de deux carrés ne pouvant pas être négative, cette équation n'est pas une équation d'un cercle.

Mise en pratique

Pour les exercices 15 à 19

Les coordonnées et les équations sont relatives à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

15 Dans chacun des cas suivants, démontrez que l'équation proposée est celle d'un cercle. Précisez les coordonnées du centre et le rayon.

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$;

b) $x^2+y^2-3x-4y+4=0$;

c) $3x^2+3y^2-7x-8y=0$;

d) $(x-1)(x-3)+(y+2)(y-1)=0$.

16 Justifiez qu'aucune des équations suivantes n'est une équation d'un cercle.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2+4=0$;

b) $x^2+y^2-2x-4y+7=0$.

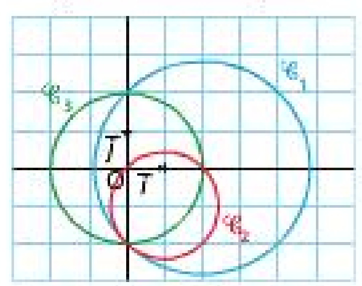
17 **1.** Expliquez pourquoi l'équation :

$$x^2+y^2-2x-2y-8=0$$

est une équation d'un cercle $\mathscr{C}$.

2. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ?

18 Chacune des trois équations ci-après est une équation d'un des trois cercles de la figure. Associez chaque cercle à son équation.



a) $x^2+y^2-4=0$ **b)** $x^2+y^2-2x+2y=0$

c) $x^2+y^2-4x-4=0$.

19 **1.** Expliquez pourquoi l'équation $x^2+y^2-4x-3y+5=0$ est celle d'un cercle $\mathscr{C}$.

2. On donne les points $A(1;1)$ et $B(3;2)$. Vérifiez que $[AB]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$.

OBJECTIF 3 Utiliser les formules d'addition

Quels que soient les nombres a et b :

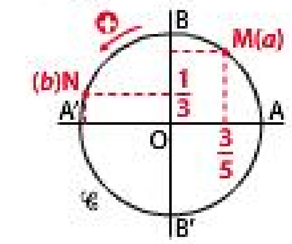
- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$;
- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$;
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$;
- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$.

EXERCICE RÉSOLU E Utiliser les formules d'addition

a et b sont deux nombres.

• a appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos a=\frac{3}{5}$. • b appartient à $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et $\sin b=\frac{1}{3}$.

1. Calculez $\sin a$ et $\cos b$. **2.** Déduisez-en $\cos(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

Méthode	Solution
1. • On place sur un cercle trigonométrique les points M et N repérés par $\cos a$ et $\cos b$.	**1.** On fait une figure. 
• On vérifie, avec la figure, le signe de $\sin a$ et de $\cos b$.	• On constate que $\sin a>0$ et $\cos b<0$.
• La formule $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ permet de calculer $\sin^2 a$ et $\cos^2 b$.	• $\sin^2 a=1-\cos^2 a=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$. Or $\sin a>0$, donc $\sin a=\frac{4}{5}$. • $\cos^2 b=1-\sin^2 b=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$. Or $\cos b<0$, donc $\cos b=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$.
2. • On applique la formule donnant $\cos(a+b)$.	**2.** $\cos(a+b)=\frac{3}{5}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{-6\sqrt{2}-4}{15}$.
• On applique la formule donnant $\sin(a-b)$.	• $\sin(a-b)=\frac{4}{5}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{-8\sqrt{2}-3}{15}$.

Mise en pratique

20 **1.** Vérifiez que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

2. Calculez la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

21 **1.** Vérifiez que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$.

2. Calculez la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

22 Démontrez que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin x.$$

23 Exprimez chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

a) $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; **b)** $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

c) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

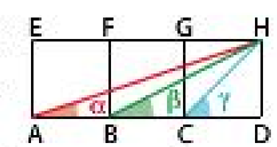
24 Réduisez les expressions suivantes :

a) $A(x)=\cos 7x\sin 6x-\sin 7x\cos 6x$;

b) $B(x)=\cos 3x\cos 2x+\sin 2x\sin 3x$;

c) $C(x)=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x$.

25 Trois carrés de côté 1 cm sont disposés comme l'indique la figure ci-contre.



1. a) Pourquoi $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$ et $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$?

b) Calculez $\cos\beta$ et $\sin\beta$.

2. a) En utilisant les résultats de la question **1**, calculez $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$.

b) Déduisez-en $\alpha+\beta=\gamma$.

OBJECTIF 4 Utiliser les formules de duplication

Pour tout nombre a :
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

EXERCICE RÉSOLU F

1. a) On donne $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculez $\cos 2x$.

b) On donne $\sin x = \frac{1}{4}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$. Calculez $\sin 2x$.

2. En utilisant $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculez $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ et déduisez-en $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Méthode

1. a) Connaissant $\cos x$, pour calculer $\cos 2x$ on applique la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

b) On connaît $\sin x$, il faut donc calculer $\cos x$.

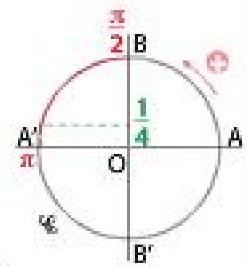
- On applique ensuite la formule $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
- On conclut.

2. On sait que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$.
Les formules $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ vont permettre de calculer $\cos x$ et $\sin x$ à partir de $\cos 2x$.

Solution

1. a) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ soit
$\cos 2x = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{3}{9} - 1 = -\frac{1}{3}$.

b) $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$
donc $\cos x < 0$.
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
donc $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.



- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
soit $\sin 2x = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$
donc $\sin 2x = -\frac{\sqrt{15}}{8}$.

2. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
donc $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.
Or $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
- De même, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
donc $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.
Or $\sin \frac{\pi}{12} > 0$ donc $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Mise en pratique

26 Calculez $\cos 2x$ dans chaque cas :
a) $\cos x = \frac{3}{5}$; **b)** $\sin x = \frac{2}{3}$.

27 On donne $\cos x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.
a) Calculez $\sin x$.
b) Déduisez-en $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

28 On donne $\sin x = -\frac{3}{4}$ et $x \in \left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$.
a) Calculez $\cos x$.
b) Déduisez-en $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

29 En utilisant $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calculez $\cos^2 \frac{\pi}{8}$ et déduisez-en $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

30 Démontrez les égalités suivantes :
a) $1 + \cos 2x + \cos x = \cos x\,(2\cos x + 1)$;
b) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$;
c) $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x$.

Pour se tester

Exercices interactifs

31 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) Dans un repère orthonormé un cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r a pour équation ......

b) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est ......

c) a et b sont deux nombres. Alors :
- $\cos(a + b) =$ ......
- $\cos 2a =$ ...... $=$ ......

d) a et b sont deux nombres. Alors :
- $\sin(a - b) =$ ......
- $\sin 2a =$ ......

32 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

a) L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ n'est pas une équation d'un cercle.

b) Il existe un unique point $M(x ; y)$ tel que :
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0.$$

c) L'équation $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ avec $c < 0$ est toujours une équation d'un cercle.

d) Pour tout nombre x :
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos x.$$

33 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. ABCD est un carré. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ est :
a) réduit aux seuls points A et C ;
b) la perpendiculaire en C à (AC) ;
c) le cercle circonscrit au carré ABCD.

2. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ est égal à :
a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; **b)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; **c)** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

3. Si $\cos\theta = \frac{1}{3}$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$, alors $\sin 2\theta$ est égal à :
a) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; **b)** $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$; **c)** $-\frac{8}{27}$.

4. ABC est un triangle. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont respectivement l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.
a) $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont un seul point commun.
b) $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ n'ont pas de point commun.
c) Le point H, pied de la hauteur issue de A, est commun aux deux cercles.

5. $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ est égal à :
a) $3\cos x$;
b) 0 ;
c) $\sqrt{3}\sin x$.

34 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. $a \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et $\cos a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, alors :
a) $2a \in [\pi ; 2\pi]$; **b)** $\cos 2a = \frac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** $\sin 2a = \frac{1}{2}$.

2. $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.
On donne les points A(0 ; 4) et B(6 ; 6). $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle OAB.
a) La droite d'équation $3x + y - 14 = 0$ est la médiatrice de [AB].
b) Le centre de $\mathscr{C}$ a pour coordonnées (4 ; 2).
c) $\mathscr{C}$ a pour équation : $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$.

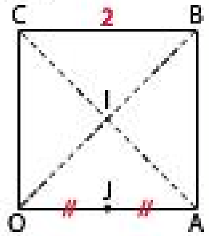
3. Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre O et de rayon 1, et $\mathscr{C}_2$ le cercle d'équation :
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0.$$
a) $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées en C et D d'ordonnées respectives $4 - \sqrt{7}$ et $4 + \sqrt{7}$.
b) $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont en commun le point A de coordonnées $\left(\frac{3}{5} ; \frac{4}{5}\right)$.
c) Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents extérieurement.

Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

35 Deux solutions pour un problème

OABC est un carré de côté 2 et de centre I. J est le milieu du segment [OA].



Objectif Trouver, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M tels que :
- $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA} = 4$;
- $MA^2 + MC^2 = 8$.

A. Avec un repère

1. On choisit le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j}$, et on note $(x ; y)$ les coordonnées d'un point M quelconque. Il reste à calculer $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA}$, MA^2 et MC^2 en fonction de x et y. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA} = 4$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MC^2 = 8$.

a) Calculez $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA}$ et $MA^2 + MC^2$ en fonction de x et y.

b) Justifiez les affirmations suivantes :
« M appartient à $\mathscr{E}$ » équivaut à « $x^2 + y^2 - 2x + 4 = 0$ ».
« M appartient à $\mathscr{F}$ » équivaut à « $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ».

c) Déduisez-en que $\mathscr{E}$ est un cercle passant par C et B. Précisez son centre et son rayon.
Déduisez-en que $\mathscr{F}$ est le cercle circonscrit au carré OABC.

B. Sans repère

La relation de Chasles et les règles de calcul du produit scalaire vont nous permettre de déterminer les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.

1. a) En écrivant $\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{MA}$ comme sommes de deux vecteurs, démontrez que :
$$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA} = MJ^2 - JO^2.$$

b) Déduisez-en que :
« M appartient à $\mathscr{E}$ » équivaut à « $JM^2 = 5$ ».

c) Concluez.

2. Le théorème de la médiane (voir le cours p. 242) permet d'exprimer $MA^2 + MC^2$ en fonction de MI^2 et AC^2.

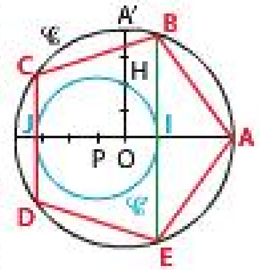
a) Démontrez que :
$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + 4.$$

b) Déduisez-en que :
« M appartient à $\mathscr{F}$ » équivaut à « $MI^2 = 2$ ».

c) Concluez.

36 Trigonométrie et pentagone régulier

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1. [OA] et [OA′] sont deux rayons de $\mathscr{C}$ perpendiculaires. Le point P est tel que :
$$4\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA}.$$
H est le milieu de [OA′]. $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre P passant par H. $\mathscr{C}'$ coupe (OA) en I et J, et les tangentes en I et J à $\mathscr{C}'$ coupent $\mathscr{C}$ en B, E, C et D.



Objectif Démontrer que ABCDE est un pentagone régulier.

1. Pour démontrer que ABCDE est un pentagone régulier, il suffit par exemple de démontrer que tous les angles au centre tels que $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, etc. sont égaux à $\frac{2\pi}{5}$.
Pour cela, on va être amené à calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.

a) Calculez PH.

b) Déduisez-en que $OI = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $OJ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

c) Pourquoi $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OA}$?
Déduisez-en que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

d) De la même manière, démontrez que :
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

2. Il reste à calculer les angles au centre. On pose $\widehat{AOB} = \alpha$, $\widehat{AOC} = \beta$ et $\widehat{COJ} = \gamma$. On va exprimer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$.

a) Démontrez que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\alpha$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \cos\beta$.

b) Déduisez-en que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

c) Démontrez que $\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

3. Il reste à calculer α, β, γ et à conclure. Pour cela, on cherche une relation entre α et β d'une part et entre α et γ d'autre part, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \beta < \pi$.

a) À l'aide des formules de duplication, démontrez que $\cos 2\alpha = \cos\beta$ et $\cos 2\gamma = \cos\alpha$.

b) Déduisez-en β et γ en fonction de α.

c) En tenant compte du fait que $\beta + \gamma = \pi$, démontrez que $5\alpha = 2\pi$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Concluez.

Narration de recherche

→ **L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.**

37 Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives :
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 10x - 10y + 24 = 0.$$
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x ; y)$ intérieurs à $\mathscr{C}_1$ et extérieurs à $\mathscr{C}_2$.
Pourquoi l'aire du domaine $\mathscr{E}$ est-elle un nombre entier ?

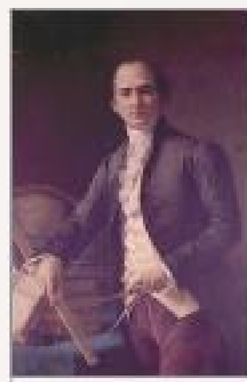
38 Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre C(2 ; 3) passant par O coupe les axes du repère en A et B.
M est le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 5 et d'abscisse négative.
Le point M se projette orthogonalement en I, J, K respectivement sur (OA), (OB) et (AB).
Démontrez que les points I, J, K sont alignés.

39 Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{H}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$. B est le point de $\mathscr{H}$ d'abscisse 4 et A un point de $\mathscr{H}$ d'abscisse a telle que $0 < a < 4$.
La droite d, perpendiculaire en A à (AB) recoupe $\mathscr{H}$ en C.
On note T la tangente en A à $\mathscr{H}$.
Démontrez que lorsque a décrit l'intervalle]0 ; 4[, la droite T reste perpendiculaire à (BC).

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

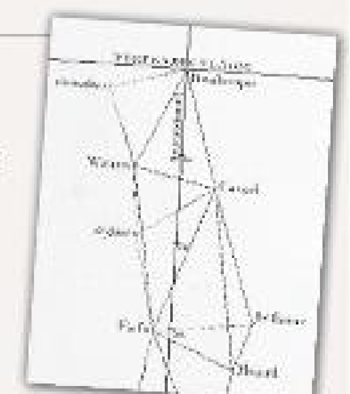
Chercheurs d'hier

→ **Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la géométrie.**



Jean-Baptiste Delambre
(1749-1822)

C'est au cours de l'été 1792, en pleine Terreur, que Delambre et Méchain ont entrepris de mesurer l'arc de méridien de Dunkerque à Barcelone afin de fixer la valeur du mètre.
La méthode utilisée est celle de la « triangulation ».



Un extrait des triangles de Dunkerque à Barcelone.

Sur le Web http://www.images.math.cnrs.fr/Geometrie-mesurer-la-terre-mesurer.html

Utiliser GeoGebra

→ Pour représenter une famille de cercles.
→ Pour découvrir des points fixes dans une configuration

TP 40 Étude d'une famille de cercles

COMPÉTENCES

TICE
- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique
- Utiliser un curseur
- Tester des conjectures

Mathématiques
- Trouver une équation de droite
- Trouver une équation de cercle
- Démontrer une conjecture

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(4 ; 0), B(0 ; 4) et C(4 ; 4).
À tout nombre m on associe les points M(4 + m ; 0) et N(0 ; 4 – m).
On note $\mathscr{C}_m$ le cercle de diamètre [MN] et de centre I.
On s'intéresse au comportement de I lorsque m décrit $\mathbb{R}$ et à la famille $\mathscr{C}$ des cercles $\mathscr{C}_m$.

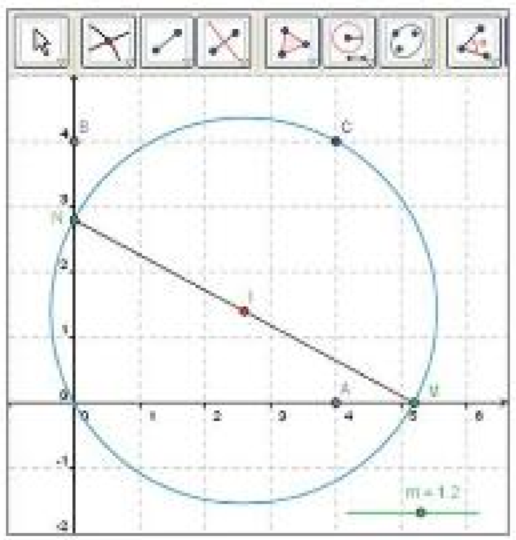
1. Expérimenter avec GeoGebra

a) Affichez la grille et créez les points A, B et C. outil 1

b) Créez un curseur pour le paramètre m.
Icône réglage : $-10 \leqslant m \leqslant 10$; incrément : 0,1. outil 3

c) Saisissez **M=(4+m,0)** et **N=(0,4–m)**.

d) Créez la droite (AB), le segment [MN], le point I et le cercle $\mathscr{C}_m$.



2. Conjecturer

a) Faites varier m à l'aide du curseur.
Sur quelle ligne semble se déplacer le point I ?

b) Quelle particularité semblent présenter les cercles $\mathscr{C}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

3. Démontrer

a) • Calculez les coordonnées de I en fonction de m.
• Trouvez une équation de la droite (AB). Vérifiez que I est un point de (AB).

b) • Démontrez que le cercle $\mathscr{C}_m$ a pour équation $x^2 + y^2 - (4+m)x - (4-m)y = 0$.
• Vérifiez que le cercle $\mathscr{C}_m$ passe par deux points fixes lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

Utiliser GeoGebra

→ Pour trouver l'équation d'un cercle passant par un point donné et tangent à une droite donnée

TP 41 Cercle passant par un point et tangent à une droite donnée

COMPÉTENCES

TICE
- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique
- Suivre un protocole de construction
- Émettre une conjecture

Mathématiques
- Utiliser les propriétés d'une tangente à un cercle.
- Tenir un raisonnement géométrique
- Trouver une équation d'une droite et une équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne le point A(–3 ; 1) et la droite d d'équation $3x - 4y - 12 = 0$.
La droite d coupe l'axe des abscisses en B.
L'objectif est de trouver une équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par A et tangent en B à la droite d.
On suppose que $\mathscr{C}$ existe et est unique.

1. Expérimenter avec GeoGebra outil 1

a) Créez la droite d, le point A puis le point B.

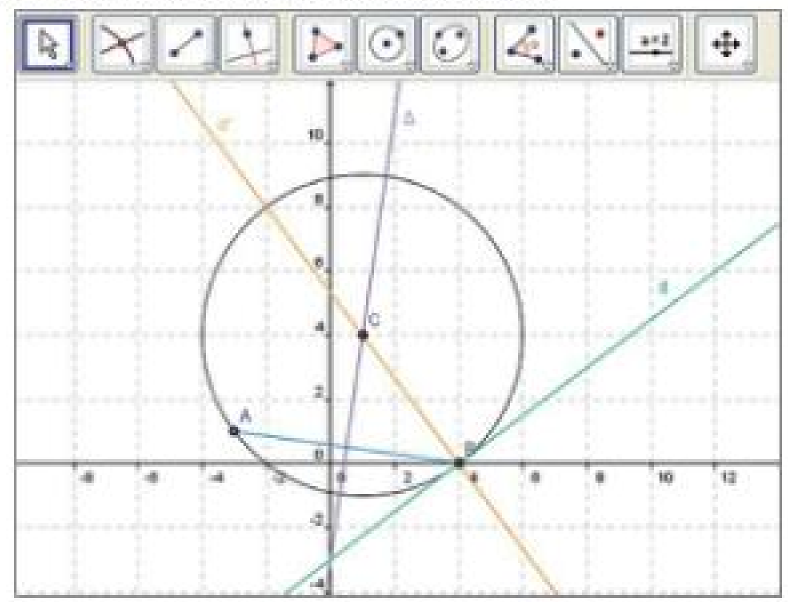
b) Créez le segment [AB], puis la médiatrice Δ de [AB].

c) Créez la droite d' perpendiculaire à d en B puis le point C, intersection des droites d' et Δ.

d) Créez le cercle $\mathscr{C}$ de centre C passant par A.

2. Conjecturer

Le cercle $\mathscr{C}$ semble-t-il répondre à l'objectif énoncé dans le texte ?



3. Démontrer

a) Démontrez que le cercle de centre C passant par A est tangent en B à d.

b) Trouvez une équation de Δ puis de d'.

c) Déduisez-en les coordonnées de C.

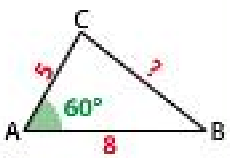
d) Trouvez une équation de $\mathscr{C}$.

Entraînement

Compléments numériques

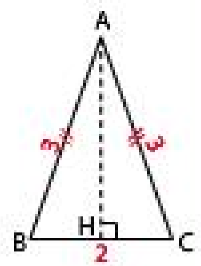
DE TÊTE

42 Calculez BC.



43 **1.** Calculez $\sin \frac{\widehat{A}}{2}$.

2. Déduisez-en $\cos \widehat{A}$.



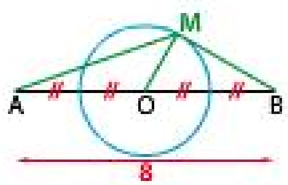
44 Simplifiez $\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$.

45 Le point A(2 ; 1) appartient-il au cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$?

46 Le cercle $\mathscr{C}$ de centre I(3 ; 4) et de rayon 5 a-t-il pour équation $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$?

47 Quelles sont les coordonnées du centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ d'équation $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 12$?

48 AB = 8. Le point O est le milieu de [AB]. M est un point du cercle de centre O et de rayon 2.
Calculez $MA^2 + MB^2$.

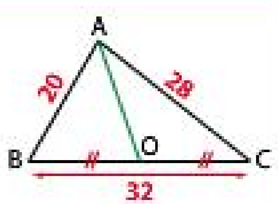


LONGUEURS ET ANGLES

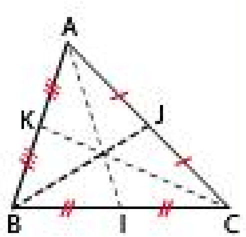
49 ABC est un triangle.
AB = 20 cm, BC = 32 cm et AC = 28 cm.

1. Calculez la mesure, arrondie au dixième de degré, des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

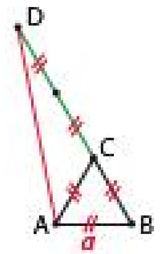
2. Démontrez que $AO = 4\sqrt{21}$.



50 ABC est un triangle.
On note :
AB = c, AC = b et BC = a ;
m_A = AI, m_B = BJ et m_C = CK.
Démontrez que :
$m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.



51 ABC est un triangle équilatéral de côté a et $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$.
Démontrez que : $AD = a\sqrt{7}$.



52 ABC est un triangle tel que :
BC = 15, AB = 13 et AC = 14.
H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

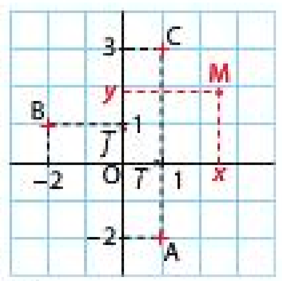
1. Calculez $\cos \widehat{BAC}$ et déduisez-en $\sin \widehat{BAC}$.

2. Démontrez que les longueurs BH, AH et HC sont des entiers naturels.

53 Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, le point M a pour coordonnées $(x ; y)$.

1. Calculez MA^2, MB^2 et MC^2 en fonction de x et y.

2. Démontrez que :
« $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 0$ » équivaut à « M est un point de la droite d'équation $y = 6x - \frac{5}{2}$ ».



54 ABC est un triangle tel que :
$AB = 10$, $AC = 2\sqrt{10}$ et $BC = 2\sqrt{5}$.
Peut-on affirmer que $\widehat{ACB} = \frac{3\pi}{4}$?

55 ABC est un triangle tel que :
$AB = 6$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12\sqrt{3}$.
L'unité choisie est le centimètre.

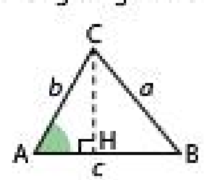
1. Trouvez, en radians, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

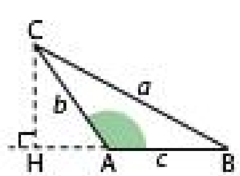
2. Calculez la longueur BC, arrondie au millimètre.

POUR ALLER PLUS LOIN

56 **Aire d'un triangle**

Dans cet exercice, on se propose d'exprimer l'aire d'un triangle en fonction de deux côtés et de l'angle formé par ces côtés.
On envisage pour cela deux cas de figures selon que $\widehat{A}$ est un angle aigu ou obtus.





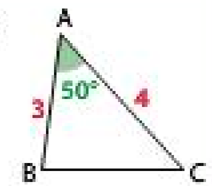
1. Démontrez, pour les deux cas de figures, que $CH = b \sin \widehat{A}$.

2. Déduisez-en que :
$\text{aire (ABC)} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$.

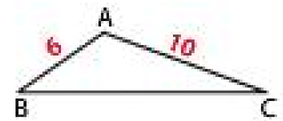
Remarque
On démontre de même que $\text{aire (ABC)} = \frac{1}{2} ca \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$.

Avec les formules établies dans l'exercice 56, et qui dépassent le cadre du programme, vous pouvez résoudre les exercices 57 et 58.

57 Calculez l'aire et le périmètre du triangle ABC.



58 ABC est un triangle tel que $\widehat{BAC}$ est un angle obtus.
Son aire est 18 cm².
AB = 6 cm et AC = 10 cm.

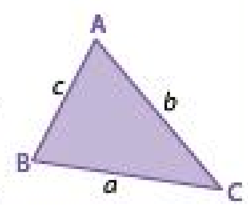


1. Calculez $\sin \widehat{BAC}$ puis $\cos \widehat{BAC}$.

2. Déduisez-en la longueur BC arrondie au millimètre.

59 **Relation entre les côtés et les angles d'un triangle**

ABC est un triangle.
AB = c, AC = b et BC = a.
On sait exprimer l'aire S du triangle de trois manières :
$2S = bc \sin \widehat{A} = ac \sin \widehat{B} = ab \sin \widehat{C}$.
On sait que les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ appartiennent à l'intervalle $]0 ; \pi[$.
Donc $\sin \widehat{A} \neq 0$, $\sin \widehat{B} \neq 0$ et $\sin \widehat{C} \neq 0$.
Démontrez que : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$.

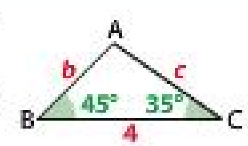


Avec la formule démontrée dans l'exercice 59, et qui dépasse le cadre du programme, vous pouvez résoudre les exercices 60 à 62.

60 ABC est le triangle représenté ci-contre.

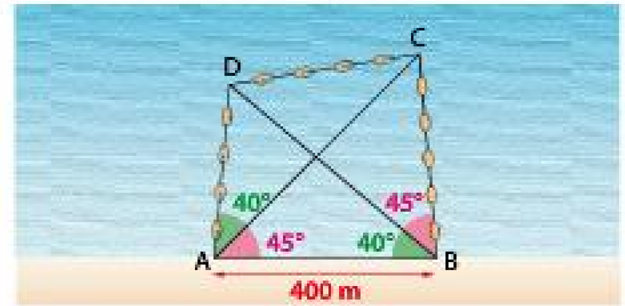
1. Calculez la mesure de l'angle $\widehat{A}$.

2. Déduisez-en b et c.



61 Un bassin piscicole implanté sur une côte a la forme d'un quadrilatère comme l'indique la figure ci-après.
AD + DC + CB est la longueur de filet nécessaire pour clore ce bassin. On la note ℓ.

1. a) En utilisant les renseignements portés sur la figure, calculez, en degrés, la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$.



b) Déduisez-en les longueurs AD et DB (arrondies au décimètre près).

2. a) De la même manière, en utilisant pour le triangle ABC les renseignements de la figure, calculez BC.

b) Déduisez-en DC.

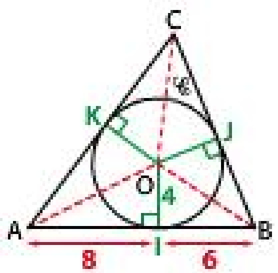
c) Déduisez-en la longueur ℓ de filet nécessaire pour clore le bassin (longueur arrondie au mètre près).

62 **Triangle et cercle inscrit**

Comme l'indique la figure ci-contre, ABC est un triangle et le cercle $\mathscr{C}$ est inscrit dans le triangle ABC.

1. a) Calculez :
$\sin \frac{\widehat{A}}{2}$ et $\cos \frac{\widehat{A}}{2}$.

b) Déduisez-en que :
$\sin \widehat{A} = \frac{4}{5}$ et $\cos \widehat{A} = \frac{3}{5}$.



2. De la même manière, calculez $\cos \widehat{B}$ et $\sin \widehat{B}$.

3. a) Démontrez que :
$\cos \widehat{C} = -\cos(\widehat{A} + \widehat{B})$ et $\sin \widehat{C} = \sin(\widehat{A} + \widehat{B})$.

b) Déduisez-en $\cos \widehat{C}$ et $\sin \widehat{C}$.

c) Calculez alors les valeurs exactes de CA et CB.

CERCLE ET PRODUIT SCALAIRE

Dans ces exercices, les coordonnées et les équations sont relatives à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

63 Trouvez une équation du cercle :

a) de centre A(1 ; –2) et de rayon 5 ;

b) de centre A(–1 ; 2) passant par B(3 ; 4) ;

c) de centre A(1 ; –4) et tangent à l'axe des abscisses.

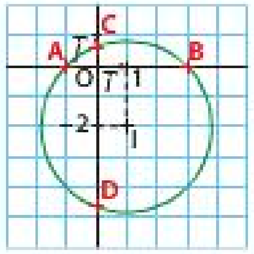
64 Dans chacun des cas suivants, démontrez que l'équation proposée est celle d'un cercle dont vous précisérez les coordonnées du centre et le rayon.

a) $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$;

b) $(x - 2)(x + 5) + (y - 1)(y - 4) = 0$;

c) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 1 = 0$.

65 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{2}$. Il coupe l'axe des abscisses en A et B, et l'axe des ordonnées en C et D.



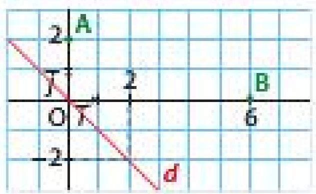
1. Trouvez une équation de $\mathscr{C}$.

2. a) Trouvez les coordonnées de A, B, C et D.

b) Vérifiez que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$.

66 On donne les points I(4 ; −1) et A(1 ; 5).
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre I passant par A.
Démontrez que la droite d d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ est tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

67 **1.** Reproduisez la figure ci-dessous.
Puis construisez le cercle $\mathscr{C}$ dont le centre appartient à d, et qui passe par A et B.



2. Trouvez une équation du cercle $\mathscr{C}$.

68 On donne le point A(1 ; 2) et la droite d d'équation $x + 2y = 0$.
Démontrez que le cercle de centre A passant par O est tangent à d.

69 $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ et d est la droite d'équation $x + 3y - 6 = 0$.

1. Faites une figure.

2. Vérifiez que les points A(3 ; 1) et B(1 ; −5) appartiennent à $\mathscr{C}$.

3. a) La droite d est-elle tangente à $\mathscr{C}$ au point A ?

b) La tangente à $\mathscr{C}$ en B est-elle parallèle à d ?

70 **Cercle passant par trois points**
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(5 ; 1), B(−3 ; 1) et C(0 ; 6).
Le but de l'exercice est de trouver une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

1. Placez les points dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et construisez $\mathscr{C}$.
On note I le centre de $\mathscr{C}$.

2. a) Trouvez une équation de la médiatrice de [AB], puis une équation de la médiatrice de [AC].

b) Déduisez-en les coordonnées de I.

3. Trouvez alors une équation du cercle $\mathscr{C}$.

71 **Cercle passant par trois points (suite)**
Les données sont celles de l'exercice **70**.
On se propose de trouver une équation de $\mathscr{C}$ d'une autre manière.
On sait que le cercle $\mathscr{C}$ a une équation de la forme :
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$
Donc trouver une équation de $\mathscr{C}$ revient à calculer a, b et c.

1. En écrivant que A, B, C sont trois points de $\mathscr{C}$, démontrez que :
$$\begin{cases} 5a + b + c = -26 & (1) \\ -3a + b + c = -10 & (2) \\ 6b + c = -36 & (3) \end{cases}$$

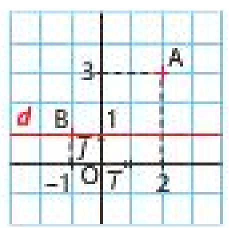
2. a) À l'aide de (1) et (2), trouvez a.

b) Déduisez-en b et c avec (2) et (3).

3. a) Trouvez alors une équation de $\mathscr{C}$.

b) Vérifiez que A, B, C sont bien trois points de $\mathscr{C}$. Précisez les coordonnées de son centre et son rayon.

72 On se propose de construire le cercle $\mathscr{C}$ passant par A et tangent en B à d, s'il existe, puis d'en trouver une équation.



1. a) Si le cercle $\mathscr{C}$ existe, pourquoi son centre I appartient-il à la médiatrice de [AB] ?

b) Pourquoi I appartient-il à la droite Δ perpendiculaire en B à d ?

c) Déduisez-en l'existence d'un point I unique et du cercle $\mathscr{C}$.

2. a) Trouvez une équation de la médiatrice de [AB].

b) Déduisez-en les coordonnées de I et une équation de $\mathscr{C}$.

73 On donne le point A(0 ; 3) et la droite d d'équation $y = x - 1$. La droite d coupe l'axe des ordonnées en B.

1. Construisez le cercle $\mathscr{C}$ de centre A tangent en H à la droite d. Justifiez votre construction.

2. a) Trouvez les coordonnées de H.

b) Déduisez-en AH et une équation de $\mathscr{C}$.

74 On donne les points A(−1 ; 4) et B(5 ; 2). M est un point de coordonnées $(x ; y)$.

1. Calculez en fonction de x et y le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

2. Démontrez que la ligne décrite par M lorsque $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 15$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

75 **Orthocentre d'un triangle et cercle**
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 + x - 4y - 12 = 0$.

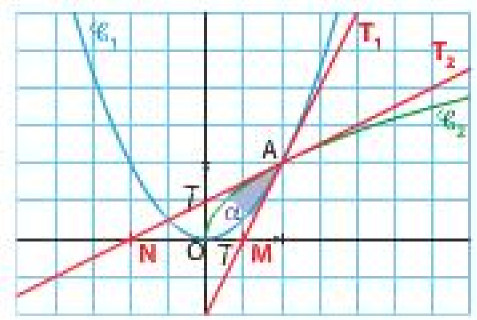
1. Construisez le cercle $\mathscr{C}$.

2. $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en A et B, et l'axe des ordonnées en C et D (l'ordonnée de D est négative).

a) Calculez les coordonnées des points A, B, C et D.

b) On note H le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses.
Démontrez que H est l'orthocentre du triangle ABC.

76 **Angle de deux tangentes**
Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont pour équations respectives $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.
Les tangentes T_1 et T_2 en leur point commun A coupent l'axe des abscisses respectivement en M et N.



1. a) Trouvez une équation de T_1 et T_2.

b) Déduisez-en les coordonnées de M et N.

2. Trouvez, arrondie à un degré près, une mesure α de l'angle $\widehat{MAN}$.

77 **Intersection d'une droite et d'un cercle**
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ et la droite d d'équation $y = 2x - 2$.

1. Construisez le cercle $\mathscr{C}$ et la droite d.

2. On note M et N les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et d.
Le but de la question est de trouver les coordonnées de M et celles de N.

a) Démontrez que les coordonnées de M et de N sont solutions du système :
$$(S)\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0. \end{cases}$$

b) Démontrez que le système (S) équivaut au système :
$$(S')\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 5x^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

c) Déduisez-en les coordonnées de M et celles de N.

78 **1.** Tracez la droite d d'équation $x + 3y - 10 = 0$ et le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

2. Calculez les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et d.

Aide Voir l'exercice 77.

79 **Intersection d'une droite et d'un cercle**
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A(2 ; 3) et de rayon 4.
La droite d a pour équation $y = 2x + 3$.

1. Tracez le cercle $\mathscr{C}$ et la droite d.

2. a) Trouvez une équation de $\mathscr{C}$.

b) Quels sont les coordonnées des points M et N d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite d ?

80 On donne les points A(−1 ; 2) et B(3 ; 4), M est un point de coordonnées $(x ; y)$.

1. Calculez, en fonction de x et y, $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}$.

2. Prouvez que les points M tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ sont situés sur un cercle dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre.

81 **Un ensemble sans utiliser un repère**
ABC est un triangle rectangle en A. I est le milieu de [AB].
Le but de l'exercice est de trouver la ligne $\mathscr{L}$ décrite par les points M tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC} = 0$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

2. a) Démontrez que :
« M ∈ $\mathscr{L}$ » équivaut à « $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$ ».

b) Déduisez-en $\mathscr{L}$.

82 A et B sont deux points tels que AB = 6 cm et I est le milieu de [AB].
On se propose de trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 24$.

1. Justifiez chacune des égalités suivantes :
- $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$;
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

2. a) Déduisez de la question précédente que :
« M ∈ $\mathscr{E}$ » équivaut à « $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 12$ ».

b) On note H le projeté orthogonal de M sur (AB).
Démontrez que $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}$.

c) Déduisez-en que IH = 2 puis déterminez l'ensemble $\mathscr{E}$.

83 **Pythagore généralisé** ALGORITHMIQUE

ABC est un triangle.
a, b et c sont les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB].
Précisez les objectifs de l'algorithme ci-dessous.

Note
La variable notée ACB est la mesure en radians de l'angle $\widehat{ACB}$, l'instruction pow(a,2) correspond à a^2 et sqrt x à $\sqrt{x}$.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  ACB EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE ACB
  c PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(a,2)
         +pow(b,2)-2*a*b*cos(ACB))
  p PREND_LA_VALEUR a+b+c
  AFFICHER c
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

84 **Implication directe et réciproque** LOGIQUE

Pour chacune des implications suivantes :

a) dites si elle est vraie ;

b) formulez l'implication réciproque ;

c) dites si cette implication réciproque est vraie.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. ABC est un triangle.
Si $\widehat{BAC}$ est un angle obtus, alors $BC^2 > AB^2 + AC^2$.

2. Si on connaît les trois côtés d'un triangle, alors on peut calculer les trois angles.

LES FORMULES D'ADDITION ET DE DUPLICATION

85 Calculez $\cos 2x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = -\frac{1}{4}$.

86 Calculez $\cos 2x$ et $\sin 2x$ dans chacun des cas suivants :

a) $x \in [-\pi ; 0]$ et $\cos x = -\frac{4}{5}$;

b) $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et $\sin x = \frac{1}{3}$.

87 Réduisez chacune des expressions suivantes :
- $A(x) = \sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x$.
- $B(x) = \cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x$.

88 Exprimez chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

a) $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$;

b) $2 \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

89 Démontrez les égalités suivantes :

a) $\sin(a + x)\cos(a - x) + \sin(a - x)\cos(a + x) = \sin 2a$;

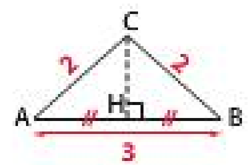
b) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

90 x est un nombre de l'intervalle $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Réduisez l'expression suivante :
$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x.$$

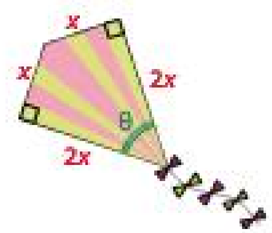
2. Déduisez-en que :
$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2.$$

91 **1.** En tenant compte des renseignements portés sur la figure ci-contre, calculez $\sin\frac{\widehat{C}}{2}$.



2. Déduisez-en que $\cos \widehat{C} = -\frac{1}{8}$ puis calculez une mesure de l'angle $\widehat{C}$ à un degré près.

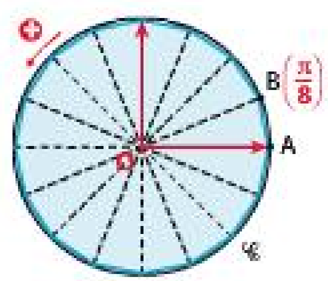
92 Un cerf-volant a la forme ci-dessous.



1. Calculez $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$.

2. Déduisez-en que $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

93 $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O.
On a dessiné un polygone régulier de 16 côtés inscrit dans $\mathscr{C}$.



1. Pourquoi le nombre $\frac{\pi}{8}$ est-il associé au point B de $\mathscr{C}$?

2. a) Reproduisez la figure et placez-y les points C, D et E respectivement associés aux nombres $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$.

b) Exprimez les coordonnées de ces points en fonction de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

3. En tenant compte des résultats précédents, démontrez que :
$$\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8} = 2.$$

94 a et b sont deux nombres de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos a = \frac{4}{5}$ et $\cos b = \frac{1}{3}$.

1. Calculez la valeur exacte de $\sin a$ et de $\sin b$.

2. Calculez $\cos(2a + b)$ et $\sin(2a + b)$.

AVEC LES TICE

95 **Tangentes à un cercle parallèles à une droite donnée**

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ et d est la droite d'équation $4x + 3y = 0$.
Le but de l'exercice est de trouver une équation des tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à d.

1. Construire avec GeoGebra

a) Construisez le cercle $\mathscr{C}$ d'équation :
$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$
puis la droite d'équation $4x + 3y = 0$.

b) Créez le point A, centre du cercle $\mathscr{C}$.

c) Créez la droite Δ passant par A et perpendiculaire à d.

d) Créez les points B et C, intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.

e) Créez les tangentes au cercle $\mathscr{C}$ en B et C.
Pourquoi, en exécutant ce programme, avons-nous répondu au problème posé ?

2. Résoudre le problème

En exécutant le programme, on trouve les équations des tangentes dans la fenêtre Algèbre.

a) Trouvez les coordonnées de A puis une équation de Δ.

b) Trouvez les coordonnées de B et C (voir la méthode, exercice 77, page 259).

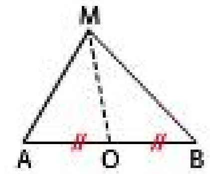
c) Déduisez-en des équations des tangentes en B et C.

ROC Restitution organisée de connaissances

96 **Prérequis :**
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}.$$
Pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2.$$

1. Démonstration

Démontrez que $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$.



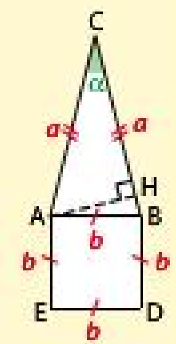
2. Application

Démontrez que si ABCD est un parallélogramme alors :
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Prendre toutes les initiatives

97 Dans un repère orthonormé, la droite d a pour équation $2x + y + 6 = 0$. Trouvez une équation du cercle $\mathscr{C}$ centré sur d et passant par les points A(−2 ; 3) et B(4 ; 1).

98 Le carré ABDE et le triangle ABC de la figure ci-contre ont la même aire.



1. a) Démontrez que $2b^2 = a^2 \sin\alpha$.

b) Déduisez-en que :
$$\sin\alpha = 4(1 - \cos\alpha).$$

2. Démontrez que $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$.

99 Démontrez qu'il est impossible de trouver un triangle ABC tel que :
$$AB^2 + AC^2 < \frac{BC^2}{2}.$$

Approfondissement

Compléments numériques

100 Intersection de deux cercles

1. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracez les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives :

$x^2+y^2+6x-2y+1=0$ et $x^2+y^2+4x+2y+3=0$.

2. Démontrez que le système :

$$(S)\begin{cases}x^2+y^2+6x-2y+1=0\\x^2+y^2+4x+2y+3=0\end{cases}$$

est équivalent au système :

$$(S')\begin{cases}x=2y+1\\x^2+y^2+6x-2y+1=0.\end{cases}$$

3. Résolvez (S') par substitution et déduisez-en les coordonnées des points M et N, intersections de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

101 Intersection de deux cercles

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I(–3 ; –3) et de rayon 5, et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [AB] tel que A a pour coordonnées (–2 ; 0) et B(1 ; 4).

1. Trouvez une équation de $\mathscr{C}$ et une de $\mathscr{C}'$.

2. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de ces deux cercles ?

102 Tangentes à un cercle menées d'un point

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2+y^2+6x+6y-7=0$ et de centre I.

Le point B a pour coordonnées (2 ; 7).

Le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre [IB] coupe $\mathscr{C}$ en M et N.

1. Faites une figure.

2. a) Trouvez une équation de $\mathscr{C}_1$.

b) Déduisez-en les coordonnées de M et N.

3. On trace les droites (BM) et (BN).

a) Pourquoi ces droites sont-elles tangentes à $\mathscr{C}$?

b) Trouvez une équation de chacune de ces droites.

103 Une famille de cercles TICE

Au nombre m, on associe, s'il existe, le cercle $\mathscr{C}_m$ d'équation $x^2+y^2-4mx-2y+5=0$.

On s'intéresse, lorsqu'il existe, au centre A de $\mathscr{C}_m$.

1. Expérimenter avec GeoGebra

a) Créez un curseur pour le paramètre m.

Réglages : $-10 \leqslant m \leqslant 10$; incrément : 0,1.

b) Saisissez l'équation de $\mathscr{C}$ puis utilisez l'icône pour créer le centre A.

c) Faites varier m avec le curseur.

Le cercle $\mathscr{C}_m$ semble-t-il toujours exister ? Que se passe-t-il pour $m=1$? pour $m=-1$?

d) Activez la trace de A et faites varier m.

Sur quelle ligne semble se déplacer A ?

2. Démontrer

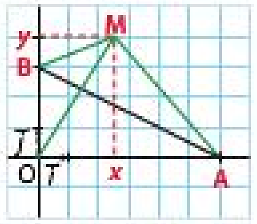
a) Justifiez qu'une équation de $\mathscr{C}$ s'écrit :

$$(x-2m)^2+(y-1)^2=4(m^2-1).$$

b) Démontrez que le cercle $\mathscr{C}_m$ de rayon non nul existe si et seulement si $m<-1$ ou $m>1$.

c) Pourquoi le centre A appartient-il à deux demi-droites (que l'on précisera) ?

104 Un ensemble de points



Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, les points A et B ont pour coordonnées respectives (6 ; 0) et (0 ; 3).

On cherche l'ensemble $\mathscr{L}_k$ des points M(x ; y) tels que $MA^2+MB^2+MO^2=k$, k étant un nombre donné.

1. Démontrez l'affirmation suivante :

« M est un point de $\mathscr{L}_k$ » équivaut à

« $x^2+y^2-4x-2y+15-\dfrac{k}{3}=0$ ».

2. a) Démontrez que $\mathscr{L}_k$ est un cercle de rayon non nul si et seulement si $k>30$.

b) Que peut-on dire de $\mathscr{L}_k$ si $k<30$?

c) Construisez $\mathscr{L}_k$ lorsque $k=42$.

105

a et b sont deux nombres de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tels que $\sin a=\dfrac{1}{2}$ et $\sin b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. Calculez $\cos a$ et vérifiez que $\cos b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. a) Calculez $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

b) Déduisez-en $a+b$ puis b.

106

1. Démontrez que $(\cos a+\sin a)^2=1+\sin 2a$ puis que $(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a)=\cos 2a$.

2. Déduisez-en que pour tout $a\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$:

$$\frac{1+\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}.$$

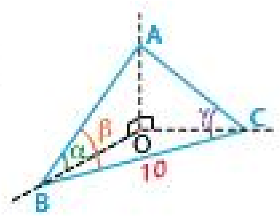
3. Application

Démontrez que : $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}}{\cos\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}}=\sqrt{3}$.

107 Avec un tétraèdre

OABC est un tétraèdre tel que AOB et AOC sont des triangles rectangles.

$BC=10$, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ et $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$.

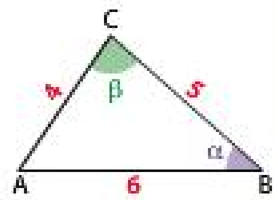


1. Démontrez que : $AB=10(\sqrt{3}-1)$.

2. a) Déduisez-en OA.

b) Calculez l'aire du triangle ABC.

108 Un triangle particulier



1. En tenant compte des renseignements portés sur cette figure, démontrez que :

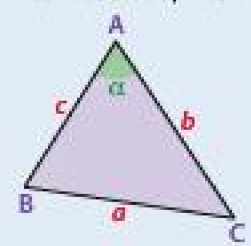
$$\cos\beta=\cos 2\alpha.$$

2. Quelles sont, à un degré près, les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$?

3. Quelle est la valeur exacte de l'aire du triangle ABC ?

109 Calculer des angles ALGORITHMIQUE

L'objectif de cet algorithme (écrit avec Algobox) est de déterminer les mesures des angles d'un triangle dont on connaît les mesures a, b et c des côtés.



Les variables x et xd sont les mesures de l'angle « alpha » (de sommet A) respectivement en radians et en degrés.

1. Complétez l'algorithme.

2. Vérifiez l'exactitude de vos propositions en déterminant les mesures des angles d'un triangle dont les côtés ont pour mesures (en cm) : $a=8$; $b=7$; $c=5$.

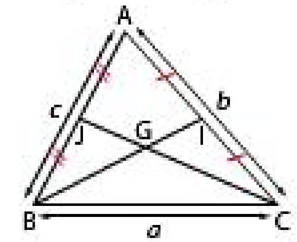
Aide

- pow(b,2) est la notation utilisée pour le calcul de b^2.
- Math.PI est la notation utilisée pour le nombre π.
- round(x) arrondit la variable x à l'entier le plus proche.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  cos_alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
  xd EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  cos_alpha PREND_LA_VALEUR ...............
  x PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (cos(x) >=cos_alpha et x<= Math.PI) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x PREND_LA_VALEUR x + 0.01
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "à 0,01 rad près, alpha = "
  AFFICHER x
  xd PREND_LA_VALEUR round(x*.................)
  AFFICHER "à 1 degré près, alpha = "
  AFFICHER xd
FIN_ALGORITHME
```

110 Des médianes perpendiculaires

ABC est un triangle. G est son centre de gravité. I et J sont les milieux respectifs des segments [AC] et [AB].



1. a) Démontrez que :

$$BI^2=\frac{1}{2}\left[a^2+c^2-\frac{b^2}{2}\right].$$

b) Calculez de même CJ^2.

c) Déduisez-en BG^2 et CG^2 en fonction de a, b, c.

2. Démontrez l'équivalence suivante :

« Les médianes (BI) et (CJ) sont perpendiculaires » équivaut à « $b^2+c^2=5a^2$ ».

Prendre toutes les initiatives

111

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les cercles d'équations respectives :

$x^2+y^2+4x-3y+4=0$ et $x^2+y^2-6y+8=0$.

Démontrez que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents entre eux et tangents au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre O et de rayon 4.

112

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la droite d a pour équation $x\sin\theta+y\cos\theta-\sin 2\theta=0$ avec $\theta\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

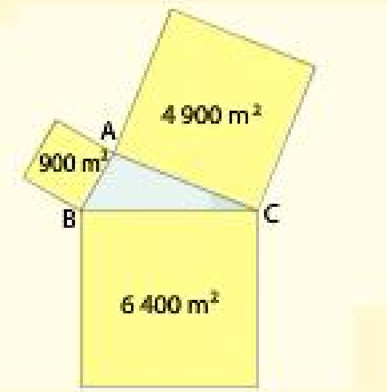
La droite d coupe les axes du repère en M et N.

Démontrez que la distance MN est constante et que le milieu I de [MN] se déplace sur un quart de cercle lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

113

Une réserve d'eau ayant la forme d'un triangle ABC est entourée de trois terrains de « forme carrée » et d'aires respectives 900 m², 6 400 m² et 4 900 m².

Quelle est la superficie de cette réserve, qui sert à irriguer ces trois terrains ?



Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les** ***coups de pouce*** **page 381.**

A D'un cercle à son équation [1]

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points suivants :

- $A(-1\,;2)$;
- $B(4\,;4)$;
- $C(6\,;-1)$.

Trouvez une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

B Orthocentre et cercle circonscrit

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(0\,;3)$ et $B(4\,;5)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle AOB.

1. Trouvez une équation du cercle $\mathscr{C}$. [2]

2. a) La droite d'équation $x = 4$ coupe $\mathscr{C}$ en B et D. Quelles sont les coordonnées de D ? [3]

b) Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en O et C. Quelles sont les coordonnées de C ? [4]

3. H est le symétrique de D par rapport à (OC). Démontrez que H est l'orthocentre du triangle OBC. [5]

C Avec les angles associés

1. Pourquoi $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5}$? [6]

2. Démontrez que :

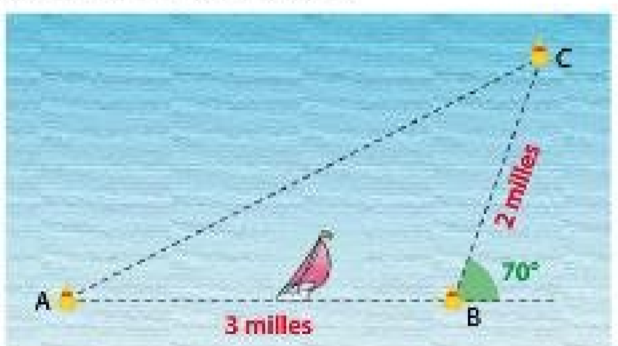
$$\sin^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{10} + \sin^2\frac{7\pi}{10} + \sin^2\frac{4\pi}{5} = 2.$$ [7]

3. Démontrez que :

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$ [8]

D Le triangle olympique [9]

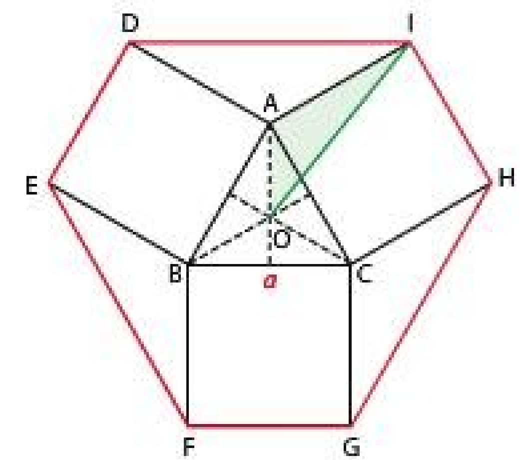
Une compétition nautique se déroule selon un parcours type appelé triangle olympique.



Partant de A, les voiliers contournent la bouée en B, puis la bouée en C, avant le retour en A. On a porté sur la figure les distances en milles « marins » ou « milles nautiques ». Calculez la distance AC, arrondie au dixième de mille.

E D'un polygone régulier à l'autre

ABC est un triangle équilatéral de côté a et de centre O. On a construit un carré sur chaque côté du triangle comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Calculez OI. [10]

2. Démontrez que l'hexagone DEFGHI est inscrit dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de a. [11]

3. Reprenez les questions en remplaçant le triangle équilatéral par un hexagone régulier de côté a.

F Le cercle des neufs points

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(6\,;0)$, $B(0\,;6)$ et $C(-3\,;0)$.

On note H l'orthocentre du triangle ABC.

D, E, F sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

$\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle DEF.

1. Vérifiez que $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}y = 0.$$ [12]

2. Les points M, O et N sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [HA], [HB] et [HC].

Vérifiez que M, O, N, I, J, K sont des points de $\mathscr{C}$. [13]