

Second degré. Équations et inéquations



D'un siècle à un autre

Pendant toute la partie aérienne de son saut, le skieur n'est soumis qu'à son propre poids : il est en chute libre.

L'équation de son mouvement est de degré 2 et la courbe qu'il décrit est une parabole (chronophotographie ci-dessus).

La découverte de la trajectoire parabolique est attribuée à Galilée, mais les travaux d'al-Khwārizmī ont été déterminants pour la résolution des équations de degré 2.



En savoir plus sur
al-Khwārizmī

→ Chercheurs d'hier p. 35

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

► Identités remarquables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Pour tout nombre k positif : $(\sqrt{k})^2 = k$.

On en déduit la factorisation de certaines expressions. Ainsi :

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

1 Factorisez.

- a) $x^2 - 9$ b) $x^2 - 5$ c) $36x^2 - 25$
 d) $x^2 - \frac{3}{4}$ e) $(x + 1)^2 - 7$

2 Développez.

- a) $(x + 3)^2$ b) $(2x - 3)(4x + 5)$ c) $(x - \frac{4}{7})^2$

3 Justifiez que pour tout nombre x :

- a) $(x + 6)^2 - 10 = x^2 + 12x + 26$;
 b) $x^2 + 3x - \frac{19}{4} = (x + \frac{3}{2})^2 - 7$.

4 a) Prouvez que pour tout $x > \sqrt{3}$, $x^2 + 5 > 8$.

b) Prouvez que pour tout $x < -\sqrt{5}$, $x^2 - 1 > 4$.

5 Résolvez les équations suivantes.

- a) $(3x - 4)(-2x + 5) = 0$ b) $-3(x - 1)(x + 2) = 0$
 c) $x^2 = 8$ d) $x^2 = -9$
 e) $2x^2 + 3x = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$
 g) $(x + 3)^2 - 4 = 0$

6 Résolvez les inéquations suivantes.

- a) $x^2 > 5$
 b) $x^2 < 3$
 c) $x^2 \leq 8$
 d) $x^2 < -2$
 e) $x^2 - 9 < 0$
 f) $x^2 > -12$
 7 Vrai ou faux ?
 a) Si $x^2 \geq 1$, alors $x \geq 1$.
 b) Si $x^2 \leq 4$ et x négatif, alors $x < -2$.

► Comparaison

- Pour tous nombres a et b positifs : « $a < b$ » équivaut à « $a^2 < b^2$ ».
- Pour tous nombres a et b négatifs : « $a < b$ » équivaut à « $a^2 > b^2$ ».

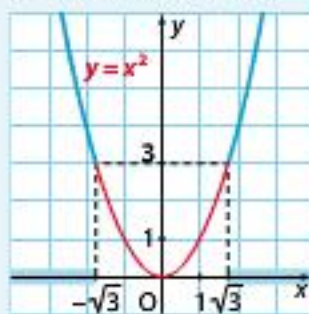
► Équations

1. « $A(x) \times B(x) = 0$ » équivaut à « $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ».
2. a est un nombre donné. L'équation $x^2 = a$:
 - ne possède aucune solution si $a < 0$;
 - possède une seule solution 0, si $a = 0$;
 - possède deux solutions, \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$, si $a > 0$.

► Inéquations liées à la fonction carré

• k est un nombre donné.
 Pour résoudre des inéquations du type $x^2 > k$ ou $x^2 < k$, on peut utiliser la parabole représentant la fonction carré.

- Ainsi pour résoudre $x^2 > 3$, on utilise la figure ci-contre. On lit l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses (en bleu) : $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.



Activité 1 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Vous avez déjà résolu des équations du second degré en utilisant une factorisation. Examinons des cas plus complexes.

1 Résolution de l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$

Notre premier objectif est d'essayer de factoriser le trinôme $x^2 + 2x - 8$.

- a) $x^2 + 2x$ est le début du développement d'un carré de la forme $(x + \alpha)^2$. Déterminez α .
- b) Déduisez-en une expression du trinôme de la forme $(x + \alpha)^2 + \beta$.
- c) Vérifiez que le nombre β est négatif et donc que le trinôme peut s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés. Factorisez alors le trinôme et résolvez l'équation.

2 Résolution de l'équation $2x^2 - 8x - 10 = 0$

On souhaite se ramener à une situation proche de la situation précédente. On observe que le coefficient 2 peut se mettre en facteur et que le trinôme peut s'écrire $2(x^2 - 4x - 5)$.

- a) En utilisant la méthode vue précédemment, vérifiez que le trinôme peut s'écrire $2[(x - 2)^2 - 3^2]$.
- b) Factorisez alors le trinôme et résolvez l'équation.

3 Résolution de l'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$

- a) En utilisant la même méthode, justifiez que : $x^2 + 4x + 5 = 0$ équivaut à $(x + 2)^2 + 1 = 0$.
- b) Expliquez pourquoi cette équation n'a pas de solution.

Activité 2 FONCTION TRINÔME ET PARABOLE

TICE

1 Dans GeoGebra, créez trois curseurs :

- a , dans l'intervalle $[-10; 10]$ avec un incrément égal à 0,2 ;
- α et β , dans l'intervalle $[-30; 30]$ avec un incrément égal à 0,5.

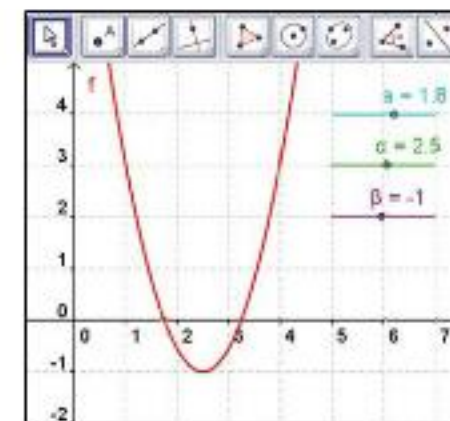
2 Dans la fenêtre de saisie, tapez $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Quelle est la nature de la courbe lorsque a est non nul ?

3 Faites alors varier les trois curseurs et observez le comportement de la représentation graphique de f .

Que pouvez-vous conjecturer sur le lien entre :

- a) la valeur de a et l'allure de la courbe ?
- b) la valeur de α et la position du sommet de la courbe ?
- c) la valeur de β et la position du sommet de la courbe ?
- d) les valeurs de a et de β et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?



outil 1

outil 3

Problème ouvert Refaites cet exercice après le chapitre ... Est-il plus facile ?

Les mesures des côtés d'un triangle sont 3, 4 et 6. Est-il possible d'ajouter une même longueur à chacun de ses côtés pour obtenir un triangle rectangle ?

→ Voir les corrigés p. 363

1 Fonction trinôme du second degré

1.1 Rappels

Définition 1 On appelle fonction trinôme du second degré, toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres connus, et $a \neq 0$.

Représentation graphique. Sens de variation

- La courbe représentative d'une fonction trinôme est une parabole.
- Pour le sens de variation, on admet les résultats suivants. Vous trouverez dans le chapitre 4 les outils pour les démontrer.

Cas $a > 0$		Cas $a < 0$	
x	$-\infty \quad -\frac{b}{2a} \quad +\infty$	x	$-\infty \quad -\frac{b}{2a} \quad +\infty$
$f(x)$	$\swarrow \quad m \quad \searrow$	$f(x)$	$\swarrow \quad M \quad \searrow$

1.2 Forme canonique

En classe de Seconde, vous avez rencontré diverses écritures d'un même polynôme du second degré. Par exemple :

$$\bullet 2x^2 - 4x - 6 \quad \bullet 2(x+1)(x-3) \quad \bullet 2(x-1)^2 - 8$$

Nous verrons page 28 l'exploitation de la forme la plus adéquate en vue de la résolution d'un problème. On s'intéresse ici à la troisième forme, dite canonique.

Théorème 1 Tout trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) s'écrit sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Cette forme est appelée **forme canonique**.

Démonstration. Puisque $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$.

Entre parenthèses, on reconnaît le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En effet :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{On en déduit que } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Il en résulte que } f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{aligned}$$

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, on obtient $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

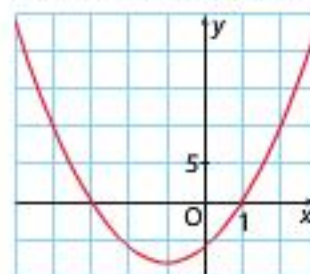
Remarque. Le sommet de la parabole représentative de la fonction trinôme f a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.

2 Équation du second degré

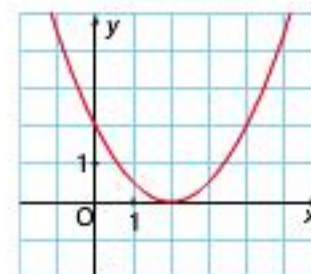
Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$), c'est trouver (s'il en existe) tous les nombres qui vérifient cette égalité. Un tel nombre est dit **solution** de l'équation et **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

2.1 Approche graphique

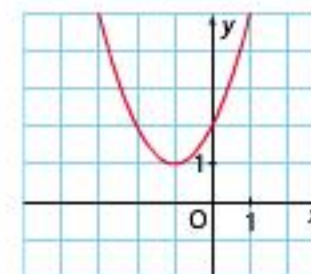
On se limite ici au cas $a > 0$.



$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$



$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$$



$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

La représentation graphique d'une fonction trinôme f permet de conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Dans ces trois exemples, par simple lecture, on conjecture respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.

2.2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$)

Théorème 2 Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$), dépend du signe du nombre Δ égal à $b^2 - 4ac$. Ce nombre Δ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
pas de solution	Une solution dite « double » : $x_0 = -\frac{b}{2a} = \alpha$	Deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et reprenons la forme canonique vue au paragraphe 1.2.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Cette forme $a[(x - \alpha)^2 + \gamma]$ est aussi appelée **forme canonique**.

- Si $\Delta < 0$, alors $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif. Il en est de même pour l'expression entre crochets.

$f(x)$ est le produit de deux facteurs non nuls : l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Ainsi, puisque $a \neq 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $x + \frac{b}{2a} = 0$. L'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule : $x = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ et $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Ainsi, puisque $a \neq 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ ou $\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$. L'équation

$f(x) = 0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

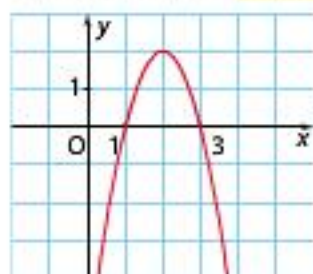
● **Forme factorisée.** Cette démonstration nous permet d'obtenir une factorisation de $f(x)$ lorsque $\Delta \geq 0$:

- si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

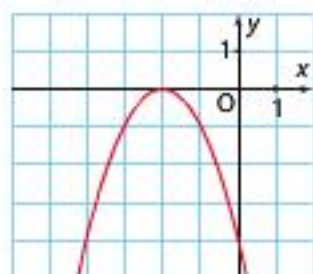
3 Signe du trinôme

3.1) Approche graphique

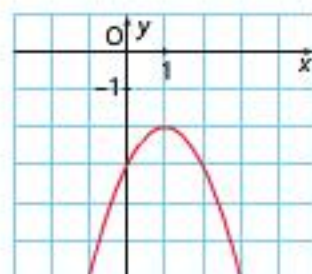
On se limite, ici, au cas $a < 0$.



$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$



$$f(x) = -x^2 - 4x - 4$$



$$f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

Ces représentations graphiques nous permettent de conjecturer que :

- les solutions de l'inéquation $-2x^2 + 8x - 6 \geq 0$ sont les nombres de l'intervalle $[1; 3]$;
- l'inéquation $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$ n'a qu'une solution : le nombre -2 ;
- le trinôme $-x^2 + 2x - 3$ est toujours strictement négatif.

3.2) Résolution algébrique

On sait étudier le signe d'un produit de facteurs (du premier degré). Or nous avons vu, dans la démonstration du théorème 2, les cas où la factorisation de $f(x)$ est possible.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
pas de factorisation	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Théorème 3 Signe du trinôme

$f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), est un trinôme du second degré.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$f(x)$ est du signe de a	$f(x)$ est du signe de a (et nul pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$)	$f(x)$ est du signe de a sauf lorsque x est entre les racines x_1 et x_2 , auquel cas $f(x)$ et a sont de signes contraires.

Démonstration.

Reprenons la forme du trinôme : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'expression entre crochets est strictement positive donc $f(x)$ est du signe de a .
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, l'expression entre parenthèses est strictement positive, donc $f(x)$ est du signe de a .
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$; $f(x)$ est un produit de trois facteurs. L'un est constant et les deux autres sont des binômes du premier degré dont on sait étudier le signe selon la valeur x .

En notant x_1 la plus petite des racines, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	signe de a		signe de a	
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+
$f(x)$	signe de a		signe de $(-a)$	

En résumé, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a , sauf pour les valeurs de x comprises entre les racines, lorsqu'il en possède.

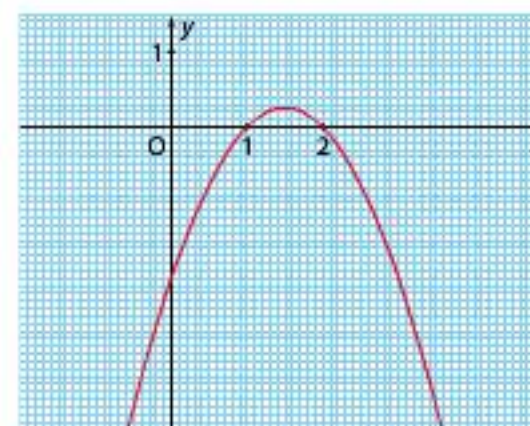
3.3) Application à la résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du second degré, on détermine le signe du trinôme associé.

● **Exemple.** Résolution de $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

Animation

Graphiquement, à l'aide de la représentation de la fonction trinôme $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, on peut conjecturer que les solutions de l'inéquation sont les nombres de l'intervalle $[1; 2]$.



Le calcul du discriminant conduit à $\Delta = 1$. Le trinôme a deux racines, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Le coefficient a est négatif ($a = -1$). Le trinôme est donc positif (du signe contraire de a) entre les racines.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$-x^2 + 3x - 2$	-	0	+	0

Ceci confirme que l'ensemble des solutions est l'intervalle fermé $[1; 2]$.

OBJECTIF 1 Utiliser les différentes formes d'un trinôme

Un trinôme du second degré peut s'écrire sous plusieurs formes.

- La forme réduite et développée : $ax^2 + bx + c$.
- La forme canonique : $a(x - \alpha)^2 + \beta$.
- La forme factorisée (si elle existe) : $a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $a(x - x_0)^2$.

EXERCICE RÉSOLU A Choisir une forme appropriée pour résoudre un problème

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$.

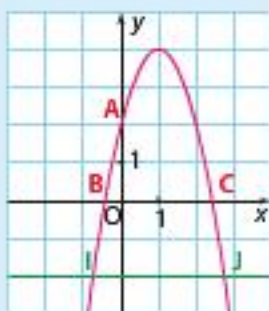
1. a) Déterminez la forme canonique de $f(x)$.

b) Déduisez-en une forme factorisée.

2. Choisissez la forme la plus appropriée de $f(x)$ pour répondre aux questions suivantes.

a) Calculez les coordonnées des points A, B et C.

b) Calculez les abscisses des points I et J.

**Méthode**

1. a) On met $a = -2$ en facteur.

• On considère $x^2 - 2x$ comme le début du développement d'un carré.

• On en déduit la forme canonique.

b) $(x - 1)^2 - 2$ est de la forme :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

2. a) On connaît l'abscisse de A, qui est zéro, donc l'ordonnée de A est $f(0)$.

• Les points B et C ont pour ordonnée zéro.

b) Les points I et J ont pour ordonnée -2.

• Graphiquement, on voit que la plus petite des deux solutions est l'abscisse du point I.

Solution

1. a) $f(x) = -2[x^2 - 2x - 1]$.

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1.$$

Donc $f(x) = -2[(x - 1)^2 - 2]$ (1).

b) $(x - 1)^2 - 2 = [(x - 1) - \sqrt{2}][(x - 1) + \sqrt{2}]$ donc :
 $f(x) = -2(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$ (2).

2. a) La forme développée donne $f(0) = 2$.

x_B et x_C sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. La forme factorisée (2) donne :

$$x_B = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_C = 1 + \sqrt{2} \text{ (car } x_B < x_C \text{)}.$$

b) x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = -2$. Soit avec la forme canonique (1) :

$$-2[(x - 1)^2 - 2] = -2$$

donc $(x - 1)^2 - 2 = 1$ ou $(x - 1)^2 - 3 = 0$.

Il en résulte que $x - 1 = -\sqrt{3}$ ou $x - 1 = \sqrt{3}$ soit :

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

Mise en pratique

1 Dans chacun des cas suivants, écrivez le trinôme $f(x)$ sous sa forme canonique.

a) $f(x) = x^2 + 6x$ b) $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$.

c) $f(x) = x^2 + x - 1$ d) $f(x) = 2x(x - 3)$.

2 f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 + 3x - 2.$$

1. Écrivez $f(x)$ sous sa forme canonique.

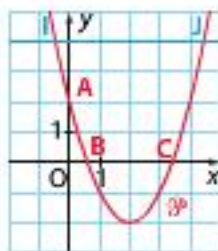
2. Déduisez-en que pour tout nombre x , $f(x) \geq -\frac{17}{4}$.

3 \mathcal{P} est la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

1. a) Quelle est la forme canonique de $f(x)$?

b) Déduisez-en une forme factorisée.

2. Calculez les coordonnées des points A, B, C, I et J.

**OBJECTIF 2** Résoudre une équation du second degré

Théorème 2. Le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$), dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution « double » : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

EXERCICE RÉSOLU B

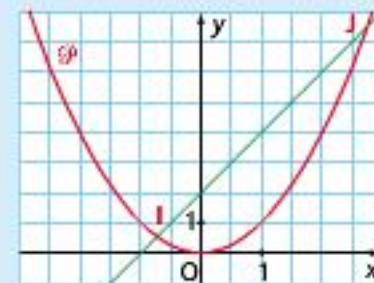
1. Résolvez les équations suivantes.

a) $x^2 - 3x = 0$ b) $2x^2 - 12x + 18 = 0$ c) $x^2 - 3x + 7 = 0$

2. Sur la figure ci-contre, on a tracé la parabole \mathcal{P} d'équation

$y = x^2$ et la droite d d'équation $y = 2x + 2$.

Quelles sont les coordonnées des points I et J?

**Méthode**

1. a) et b) Le calcul de Δ ne doit pas se faire de manière systématique. Il est inutile si, dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$ ou encore si l'on reconnaît une identité remarquable.

c) On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. On utilise les équations des courbes.

• Pour résoudre l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$, on calcule Δ .

• On conclut. En observant la figure, on en déduit que la plus petite solution est l'abscisse de I.

Solution

1. a) Après factorisation, l'équation s'écrit $x(x - 3) = 0$. D'où les solutions $x = 0$ et $x = 3$.

b) $2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$ donc l'équation a une seule solution $x = 3$.

c) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 9 - 28 = -19$.
 $\Delta < 0$, l'équation n'a donc pas de solution.

2. I et J appartiennent à la fois à \mathcal{P} et d donc leurs coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$.

L'équation a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \text{ et } x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}.$$

I a pour abscisse $1 - \sqrt{3}$ et pour ordonnée $2(1 - \sqrt{3}) + 2$, soit $4 - 2\sqrt{3}$. De même, J a pour abscisse $1 + \sqrt{3}$ et pour ordonnée $4 + 2\sqrt{3}$.

Mise en pratique

4 Résolvez les équations suivantes, sans calculer le discriminant.

a) $7x^2 + 8x = 0$ b) $6 - x^2 = 0$

c) $(x + 3)^2 = 25$ d) $x^2 - 10x + 25 = 0$

5 Résolvez les équations suivantes.

a) $x^2 - 5x + 2 = 0$ b) $-3t^2 - 8t + 2 = 0$

c) $-7t^2 + t - 1 = 0$ d) $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

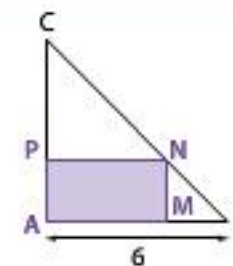
6 ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :

$$AB = AC = 6.$$

M est un point du segment [AB] tel que $BM = x$, avec $0 < x < 6$.

Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle AMNP

est-elle égale à $\frac{1}{3}$ aire (ABC) ?



OBJECTIF 3 Étudier le signe d'un trinôme. Résoudre une inéquation

Le trinôme $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), est du signe de a , sauf entre les racines lorsqu'il en possède.

EXERCICE RÉSOLU C Exploiter une factorisation

Résolvez chacune des inéquations du second degré suivantes.

a) $4x - 2x^2 < 0$

b) $(x+3)(x+1) \leq 2x+6$

Méthode

Pour ces inéquations du second degré, une factorisation s'obtient sans calcul de Δ .

a) On factorise $f(x)$ et on en déduit ses racines.

- On cherche le signe du coefficient de x^2 et on en déduit le signe de $f(x)$.
- On conclut.

b) On reconnaît un facteur commun : $(x+3)$. On factorise et on en déduit les racines.

- En développant mentalement le produit de facteurs, on trouve le signe du coefficient de x^2 .

- On conclut.

Mise en pratique

7 Résolvez les inéquations suivantes.

- a) $(1-2x)(3+5x) \geq 0$
 b) $(2x-3)(x+2) < 0$
 c) $-3x^2 - 5x < 0$

8 Résolvez les inéquations suivantes :

- a) $16 - (2x-1)^2 \leq 0$
 b) $(2x-1)(x+5) < 3x+15$
 c) $(x-7)^2 \leq (2x-1)^2$

Solution

a) Notons $f(x) = 4x - 2x^2$. Résoudre l'inéquation $4x - 2x^2 < 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est strictement négatif.

$f(x) = 2x(2-x)$, produit nul pour 0 et 2. Le coefficient de x^2 est négatif ($a = -2$). On résume le signe de $f(x)$ ainsi :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	-

L'inéquation $4x - 2x^2 < 0$ a pour ensemble des solutions $S =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.

b) L'inéquation est équivalente à :
 $(x+3)(x+1) - (2x+6) \leq 0$ (1).
 Notons $f(x) = (x+3)(x+1) - (2x+6)$. Résoudre l'inéquation (1) revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est négatif ou nul.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)(x+1) - (2x+6) \\ &= (x+3)(x+1) - 2(x+3) \\ &= (x+3)(x+1-2) = (x+3)(x-1), \end{aligned}$$

produit nul pour -3 et 1.

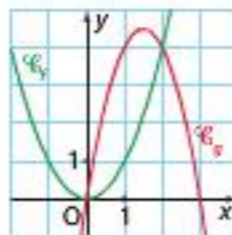
Le coefficient de x^2 est positif, ($a = 1$). On en déduit le signe de $f(x)$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

L'ensemble des solutions est $S = [-3; 1]$.

9 \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = x^2$ et $g(x) = 6x - 2x^2$.

- Conjecturez graphiquement l'ensemble des réels x pour lesquels \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f .
- Résolvez le problème par le calcul.



EXERCICE RÉSOLU D Signe d'un trinôme et résolution d'une inéquation

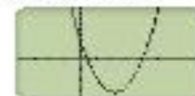
Animation

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 9x + 4$.

- Conjecturez le signe de $f(x)$ puis étudiez ce signe.
- Résolvez l'inéquation $f(x) < 0$.

Méthode

1. On peut utiliser la calculatrice pour tracer la parabole représentant la fonction et conjecturer la réponse.



- On détermine le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- On connaît le signe du coefficient de x^2 donc on peut dresser le tableau du signe de $f(x)$.

- On conclut.

2. Pour connaître l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$, on exploite le tableau donnant le signe de $f(x)$.

Solution

1. On conjecture que $f(x) < 0$ pour $x \in]x_1; x_2[$ où x_1 et x_2 sont les racines de $f(x)$.

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 81 - 32 = 49$.
 $\Delta > 0$, donc le trinôme $f(x)$ a deux racines :
 $x_1 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{9+7}{4} = 4$.

Le coefficient de x^2 est positif ($a = 2$) donc :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	-	0

$f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]4; +\infty[$.

$f(x) \leq 0$ pour $x \in [\frac{1}{2}; 4]$.

2. D'après le tableau, $f(x) < 0$ signifie que $\frac{1}{2} < x < 4$. Donc $f(x) < 0$ équivaut à $x \in]\frac{1}{2}; 4[$.
 L'ensemble des solutions est :

$$S =]\frac{1}{2}; 4[$$

Mise en pratique

10 Dans chacun des cas suivants, dressez le tableau du signe du trinôme.

- a) $x^2 + x - 2$ b) $-x^2 + 2x - 3$
 c) $100t^2 - 60t + 9$ d) $-2x^2 + 5x - 3$

11 Résolvez les inéquations suivantes.

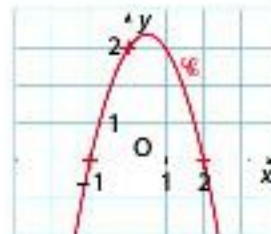
- a) $x^2 + x - 20 \leq 0$ b) $x^2 - x + 1 < 0$
 c) $x^2 + 7x + 12 \geq 0$ d) $7x^2 - 5x + 1 > 0$

12 Sur la figure, on a tracé la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ et la droite d d'équation $y = x + 2$.

Quel est l'ensemble des nombres x pour lesquels la parabole \mathcal{P} est en dessous de la droite d ?



13 \mathcal{C} est la représentation graphique d'une fonction trinôme définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.



1. Quel est le signe de a ? Quel est le signe du discriminant?

2. Résolvez graphiquement $f(x) \geq 0$.

3. Expliquez pourquoi $f(x) = -\frac{3}{2}(x+1)(x-2)$.

14 1. Résolvez l'inéquation $x^2 - 40x + 384 \leq 0$.

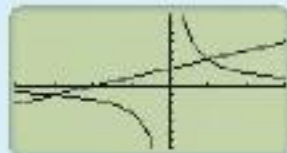
Application

Une pelouse de forme rectangulaire a pour périmètre 80 m. Quelles sont les dimensions possibles de cette pelouse pour que sa superficie soit supérieure ou égale à 384 m²?

EXERCICE RÉSOLU E Résoudre une équation et une inéquation où l'inconnue figure au dénominateur

Sur la vue d'écran ci-contre apparaissent (en partie) les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{x} \quad (x \neq 0).$$



Déterminez par le calcul :

- les abscisses des points communs aux deux courbes ;
- les valeurs de x pour lesquelles la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g .

Méthode

a) On traduit algébriquement le problème.

On transpose dans le premier membre et on réduit au même dénominateur.

Aide

Pour résoudre une équation où l'inconnue figure au dénominateur, on peut se ramener à $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, qui équivaut à $A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$.

On conclut.

b) On traduit algébriquement le problème.

On se ramène à une inéquation du type : $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, c'est-à-dire à une inéquation dont le second membre est zéro.

On dresse un tableau de signes.

On conclut.

Solution

a) Les abscisses des points communs aux deux courbes sont les solutions de l'équation $x + 2 = \frac{3}{x}$, avec $x \neq 0$. x est un nombre non nul.

$$x + 2 - \frac{3}{x} = 0 \text{ équivaut à } \frac{x(x+2) - 3}{x} = 0$$

$$\text{soit encore à } \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = 0.$$

Notons $A(x) = x^2 + 2x - 3$. Le discriminant de $A(x)$ est 16 d'où les solutions :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = -3.$$

$B(x) = x$ donc $B(x) \neq 0$ (car $x \neq 0$).

Les abscisses cherchées sont donc -3 et 1 .

b) Dire que \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g équivaut à dire que $f(x) \geq g(x)$, $x \neq 0$, soit $x + 2 \geq \frac{3}{x}$, $x \neq 0$.

D'après les résultats de la question a),

l'inéquation s'écrit : $\frac{x^2 + 2x - 3}{x} \geq 0$.

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$	
$A(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$B(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$A(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$B(x)$						

L'ensemble des solutions est :

$$S = [-3; 0[\cup [1; +\infty[.$$

Mise en pratique

Pour les exercices 15 à 17

a) Déterminez les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g .

b) Étudiez leur position relative.

15 $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

16 $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

17 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ($x \neq 1; x \neq 2$).

Pour les exercices 18 à 21

Résolvez l'inéquation proposée.

18 $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 9} \leq 0$.

19 $\frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} \leq 1$.

20 $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x} \leq -2$.

21 $\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{2x-5}{x-1}$.

22 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes. f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

- Le nombre $b^2 - 4ac$ s'appelle
- La courbe représentative de f est une
- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède une seule solution si Δ est
- Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est une du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\Delta < 0$, le signe de $f(x)$ est le même que celui de

23 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse.

- 2 et -3 sont les racines du trinôme $-5x^2 + 13x - 6$.
- Le trinôme $ax^2 + x - a$ ($a \neq 0$) possède toujours deux racines distinctes.
- La parabole d'équation $y = 10x^2 - x - 0,2$ est située entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.
- La forme canonique du trinôme $-2x^2 + 2x - 5$ est $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$.

24 QCM Une seule réponse exacte

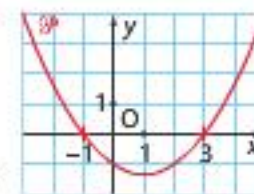
Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

- $]-\infty; 2] \cup [5; +\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation :
 - $(x-2)(x-5) > 0$
 - $-x^2 + 7x - 10 > 0$
 - $(x-2)(x-5) \geq 0$
- L'ensemble des solutions de $6x^2 + x - 2 < 0$ est :
 - $\left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right]$
 - $\left] -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right[$
 - $\left] -\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right[$
- a est un réel ($a > 0$). Le trinôme $ax^2 - 6x - 6$:
 - a deux racines distinctes.
 - a pour forme canonique $a\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6 + \frac{9}{a}\right]$.
 - a pour racine $-\frac{1}{2}$ si $a = 10$.
- L'équation $5x^2 - 6x + \frac{9}{5} = 0$:
 - n'a pas de solution.
 - a une solution.
 - a deux solutions.

25 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

- f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -10x^2 + 5x - 1$.
 - Pour tout nombre x , $f(x) \leq -0,375$.
 - Le discriminant Δ est négatif.
 - Le sommet de la parabole représentative de f a pour abscisse $\frac{1}{4}$.
 - La forme canonique de $f(x)$ est $-10(x + 0,25)^2 - 65$.
- f est la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).
 - Si $ac < 0$, alors le trinôme $f(x)$ a deux racines.
 - Si $b = 0$, le trinôme $f(x)$ a deux racines opposées.
 - Si $a + b + c = 0$, alors $x = 1$ est solution de l'équation $f(x) = 0$.
- \mathcal{P} est la courbe représentative d'une fonction f .
 - $f(x)$ est de la forme : $a(x^2 - 2x - 3)$ avec $a > 0$.
 - La valeur minimale de $f(x)$ est $-4a$.
 - Si le point $A(0; -1)$ est un point de la parabole, alors $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{3}$.
- Le trinôme $-3x^2 + x - 1$ est strictement négatif pour :
 - tout nombre x .
 - aucun nombre x .
 - tout nombre de l'intervalle $]-5; 4[$.



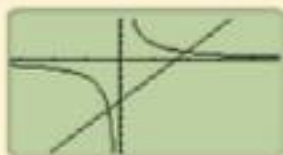
Apprendre à chercher

26 Position relative de deux courbes

Dans un repère $(O; I, J)$, d est la droite d'équation $y = 3x - 5$ et \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$, ($x \neq 0$).

Objectif Étudier suivant les valeurs de x la position relative de \mathcal{H} et d .

1. Une représentation graphique de \mathcal{H} et de d , éventuellement à l'aide de la calculatrice, permet de conjecturer la réponse.



Quelle conjecture faites-vous concernant la position relative de ces deux courbes ?

2. Dire que d est au-dessus de \mathcal{H} équivaut à dire que $3x - 5 \geq \frac{2}{x}$. On est donc amené à résoudre cette inéquation sur \mathbb{R} privé de zéro.

Démontrez que pour tout nombre $x \neq 0$:

$$3x - 5 \geq \frac{2}{x} \text{ équivaut à } \frac{3x^2 - 5x - 2}{x} \geq 0.$$

3. Pour étudier le signe d'un quotient, on dresse un tableau où sont indiqués le signe du numérateur et du dénominateur.

a) Quel est le signe du trinôme $3x^2 - 5x - 2$?

b) Recopiez le tableau et complétez-le.

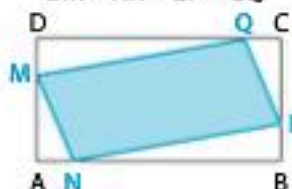
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$3x^2 - 5x - 2$			
x			
$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x}$			

c) Concluez.

27 Une aire minimale

ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$ et $AD = 4$. M est un point de [AD] tel que $DM = x$, avec $0 \leq x \leq 4$. On construit les points N, P et Q tels que :

$$DM = AN = BP = CQ$$



Objectif Trouver les valeurs de x pour lesquelles l'aire \mathcal{A} du quadrilatère MNPQ est minimale.

1. Il faut exprimer \mathcal{A} en fonction de x .

L'aire \mathcal{A} est égale à l'aire de ABCD privée de la somme des aires des domaines non coloriés.

Démontrez que $\mathcal{A} = 2x^2 - 12x + 32$.

2. On est donc amené à s'intéresser à la fonction f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 32$.

a) Donnez la forme canonique de $f(x)$.

b) Déduisez-en que pour tout x de $[0; 4]$, $f(x) \geq 14$.

c) Pour quelle valeur de x , $f(x) = 14$?

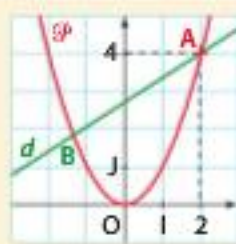
d) Concluez.

28 Droite tangente à une parabole

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, \mathcal{P} est la parabole d'équation $y = x^2$. A est le point de \mathcal{P} d'abscisse 2. d est une droite quelconque passant par A, non parallèle à l'axe des ordonnées.

Objectif Trouver, parmi les droites d , une droite passant par A qui coupe \mathcal{P} en un seul point. On dit dans ce cas que d est tangente à la parabole \mathcal{P} .

1. Une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = mx + p$. Or d passe par A donc, en traduisant le fait que A appartient à d , on écrit une relation entre les coefficients m et p .



Démontrez que d a pour équation $y = mx + 4 - 2m$.

2. En général, d recoupe \mathcal{P} en un second point B. Ainsi A et B ont des coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 4 - 2m \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - mx + 2m - 4 = 0 \end{cases}$$

Dire que « d et \mathcal{P} ont un seul point commun » revient à dire que « l'équation $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ a une solution double. »

a) Justifiez cette affirmation.

b) Pour quelle valeur de m l'équation :
 $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$

a-t-elle une solution double ?

c) Vérifiez que la droite d obtenue pour cette valeur de m a bien le seul point A en commun avec \mathcal{P} .

Concluez.

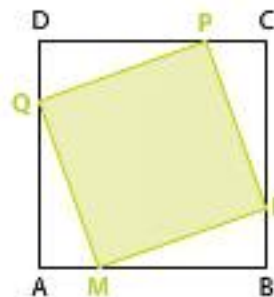
Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

29 ABCD est un carré d'aire \mathcal{A} . Les points M, N, P et Q sont tels que :

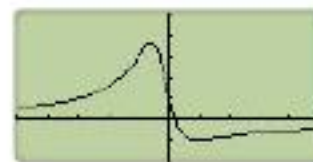
$$AM = BN = CP = DQ$$

Où doit-on placer M sur le côté [AB] afin que l'aire de MNPQ soit comprise entre $\frac{5}{8}\mathcal{A}$ et $\frac{2}{3}\mathcal{A}$?



30 f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-5x + 1}{2x^2 + x + 1}$$

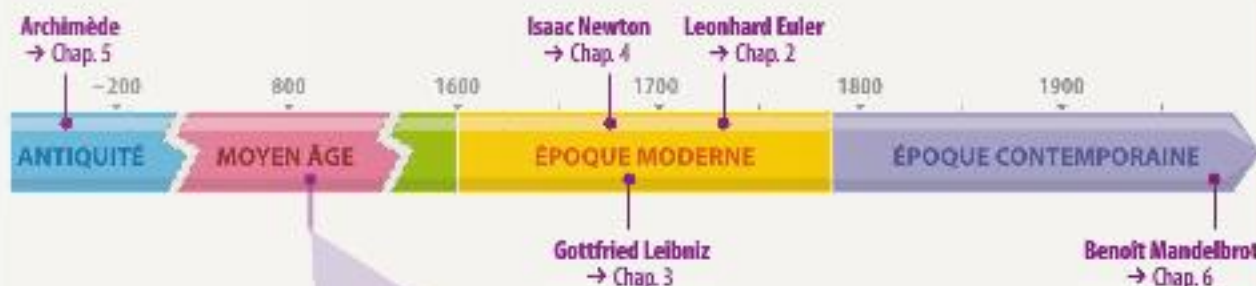


Après avoir justifié que f est définie pour tout nombre x , démontrez que la représentation graphique de f dans un repère orthonormé est entièrement contenue dans une bande de plan de largeur 5.

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

Chercheurs d'hier

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



al-Khwarizmi
(788-850)

Mathématicien, géographe, astronome, il se consacra aux mathématiques à Bagdad. Son apport est particulièrement important en algèbre, notamment sur les techniques de résolution des équations de degré 1 et 2. Il accompagne toujours celles-ci de méthodes géométriques.



Première page de l'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison, publié en 825.

Sur le Web <http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=khwarizmi>

Utiliser sa calculatrice



→ Pour « approcher » les solutions éventuelles d'une équation du second degré

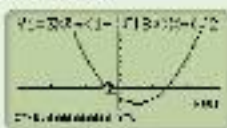
31 Résolution d'une équation du second degré

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + (1 - \sqrt{18})x - \sqrt{2}$.

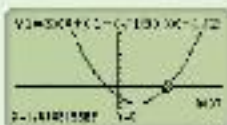
- Faites afficher la courbe représentative de f , pour x compris entre -3 et 3 et y compris entre -5 et 10 .
- Utiliser ce graphique pour déterminer des valeurs approchées des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$.
- Utilisez le menu ÉQUATION (Casio) ou l'éditeur de résolution d'équation (TI) pour confirmer vos résultats.

Avec une Casio

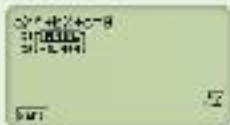
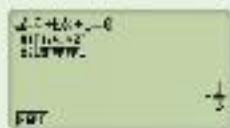
- Voir le rabat de couverture I.
- Utilisez les touches **SHIFT**, **F8** (G-Solv) puis sélectionnez **ROOT** **F1**.



- Déplacez le curseur vers la droite pour faire afficher le deuxième point.

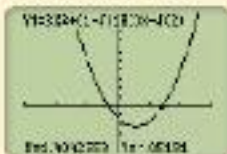


- Allez dans le menu ÉQUATION.
 - Sélectionnez l'instruction **POLY** **F2** puis **Degree** **F1**.
 - Entrez les coefficients du trinôme et appuyez sur **EXE**.



Avec une TI

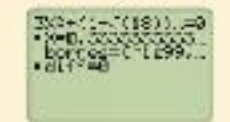
- Voir le rabat de couverture IV.
- Appuyez sur **trace** pour lire les valeurs approchées des solutions cherchées.



- Appuyez sur **math**.
 - Sélectionnez **Solveur...** et appuyez sur **entrer**.
 - Saisissez l'équation désirée et appuyez sur **entrer**.

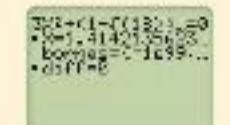


- Donnez alors à x une valeur initiale pour démarrer la recherche, puis saisissez **alpha** **entrer** (résol).



Vous obtenez une valeur « approchée » d'une des solutions.

- Modifiez la valeur initiale pour obtenir l'autre solution.



Utiliser sa calculatrice



→ Pour programmer la résolution d'une équation du second degré

TP **32** Un algorithme pour résoudre une équation du second degré

L'intérêt de ce TP réside dans l'analyse d'un algorithme qui permet de déterminer les racines d'un trinôme du second degré. Les calculatrices récentes contiennent de tels programmes.

- Complétez l'algorithme suivant dont l'objectif est de résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

▼ Variables
a, b, c, Δ
Traitement
Saisir...
Δ reçoit...
DébutSi
Si Δ < 0 alors afficher "..."
Si ... alors afficher "l'équation a une seule solution $x_0 = \dots$ "
Si ...
FinSi

- L'algorithme précédent a été programmé pour deux calculatrices.

Saisissez ce programme dans votre calculatrice et utilisez-le pour résoudre les équations suivantes.

- $2x^2 + 4x + 1 = 0$.
- $\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{25}{2} = 0$.
- $-x^2 + x - 1 = 0$.
- $-\frac{1}{3}x^2 - 2x - 5 = 0$.

- Complétez l'algorithme pour qu'il affiche un message d'erreur lorsque la valeur saisie pour a est 0.

- Modifiez en conséquence le programme de votre calculatrice.

Avec une TI

```
PROGRAM SDEGRE
:If Ecr
:Disp "AX²+BX+C"
:Promt "A,B,C"
:Δ←4AC-D
:Disp "DELTA",Δ+Frac
:If Δ<0Then
:Disp "PAS DE SOLUTION"
:End
:If Δ=0Then
:Disp "X0",-B/(2A)+Frac
:End
:If Δ>0Then
:Disp "2 SOLUTIONS"
:Disp "X1",(-B+√Δ)/(2A)+Frac
:Disp "X2",(-B-√Δ)/(2A)+Frac
:End
```

Avec une Casio

```
=====2D DEGRE=====
"AX²+BX+C"
" A : ?>A"
" B : ?>B"
" C : ?>C"
"delta":B²-4AC+D
If D<0
Then "PAS DE SOLUTION"
IfEnd
If D=0
Then "UNE SOLUTION"
"X0":-B+2A
IfEnd
If D>0
Then "2 SOLUTIONS"
"X1":(-B+√D)/(2A)
"X2":(-B-√D)/(2A)
IfEnd
"FIN"
```

DE TÊTE



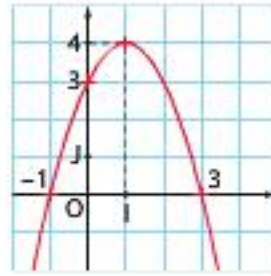
- 33** -2 est-il solution de l'équation $x^2 - 5x - 14 = 0$?
- 34** -1 est-il solution de l'inéquation $-2x^2 + 4x - 1 > 0$?
- 35** Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2(x-1)(x-3) > 0$?
- 36** Quel est le discriminant du trinôme $x^2 - 2x - 3$?
- 37** Pourquoi l'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'a-t-elle pas de solution ?
- 38** Comment choisir m pour que $x = -1$ soit solution de l'équation $2x^2 + x - m = 0$?
- 39** On sait que $x^2 - 4x = (x - \bigcirc)^2 + \square$.
Quels nombres faut-il écrire à la place de \bigcirc et \square ?
- 40** Quelle est l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$?
- 41** Trouvez un trinôme admettant 4 pour racine double.

42 Un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ s'écrit $(2x - 3)(2 - x)$.
Trouvez a , b , c .

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ.
FORME CANONIQUE

- 43** Donnez la forme canonique des trinômes suivants.
- a) $2x^2 - 8x + 1$ b) $-3x^2 + 2x + 4$
c) $x^2 + 5x - 7$ d) $-x^2 + 3x$
- 44** f est la fonction polynôme définie sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$.
1. a) Quelle est la forme canonique de $f(x)$?
b) Déduisez-en que pour tout nombre x , $f(x) \leq \frac{49}{8}$.
2. Déduisez de la question précédente une forme factorisée de $f(x)$.
- 45** On donne le trinôme :
 $f(x) = (x^2 - 9) - 2(x - 3)(x + 2)$.
1. a) Développez et réduisez $f(x)$.
b) Quelle est sa forme canonique ?
2. a) Factorisez $f(x)$.
b) Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

3. En exploitant les résultats des questions précédentes, précisez quels sont les arguments qui vous permettent de conjecturer que la parabole ci-contre est une représentation graphique de la fonction f .

RACINES D'UN TRINÔME.
ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

- 46** Résolvez les équations suivantes sans calculer le discriminant.
- a) $x^2 - 9 + 4(x + 3) = 0$.
b) $5(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 2)$.
c) $(7 - 2x)^2 + 1 = 0$.
d) $9 - (3x - 1)^2 = 0$.
e) $x^2 - 26x + 169 = 0$.

Pour les exercices 47 à 52
Résolvez les équations données.

- 47** a) $2x^2 - 2x - 12 = 0$ b) $-x^2 + x + 2 = 0$
48 a) $-3x^2 + 7x + 1 = 0$ b) $3x^2 + \sqrt{12}x + 1 = 0$
49 a) $2x^2 + 12x + 18 = 0$ b) $-4x + 2x^2 + 4 = 0$
50 a) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ b) $x(x + 4) + 8 = 0$
51 a) $1,8t + t^2 = 3,6$ b) $\sqrt{2}t^2 - 3t + \sqrt{2} = 0$
52 a) $2(1 - 3u) = u^2 - 3(2u + 1)$
b) $3u^2 - 4\sqrt{7}u - 12 = 0$
- 53** Écrivez chacun des trinômes suivants sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
- a) $A(x) = 12x^2 + 5x - 2$ b) $B(x) = -3x^2 + 4x + 4$
c) $C(x) = 4x^2 - 20x + 25$

- 54** 1. Développez $(2 - \sqrt{3})^2$.
2. Résolvez l'équation :
 $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$.

- 55** 1. m est un nombre quelconque. Comment choisir m pour que l'équation $3x^2 - 2mx + m = 0$ admette $x = 2$ pour solution ?
2. Calculez alors l'autre solution.

- 56** Comment choisir le nombre a pour que le trinôme $ax^2 + 6x + 1$ possède une racine double ? Calculez cette racine.

- 57** Déterminez les valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $2x^2 + mx + 2 = 0$ n'a pas de solution.

- 58** Un cube
Si on augmente de deux centimètres la longueur de l'arête d'un cube, son volume augmente alors de 2402 cm^3 .
Combien mesure l'arête de ce cube ?



- 59** Gagnants du Loto

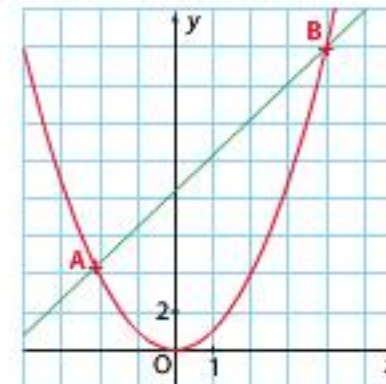


Des amis ont gagné le gros lot du Loto, dont le montant s'élève à $2\,000\,000 \text{ €}$. Si ce groupe d'amis avait compté cinq personnes de moins, chacun aurait touché $20\,000 \text{ €}$ de plus.

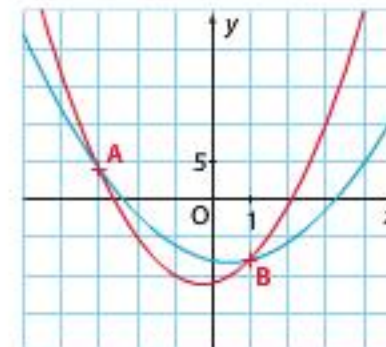
Combien sont-ils ?

- 60** Pourquoi le trinôme $ax^2 + x - a$ ($a \neq 0$) possède-t-il deux racines distinctes pour tout nombre a ?

- 61** Sur la figure ci-dessous, on a tracé la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 1,9x + 8,4$.
Quelles sont les coordonnées exactes des points d'intersection A et B de ces deux courbes ?



- 62** Sur la figure ci-dessous, on a tracé les paraboles d'équations respectives $y = 2x^2 + x - 11$ et $y = x^2 - x - 8$.
Quelles sont les coordonnées des points d'intersection A et B de ces deux courbes ?



- 63** L'écran d'un téléviseur

Les dimensions de l'écran d'un téléviseur sont, en centimètres, 93 et 53.

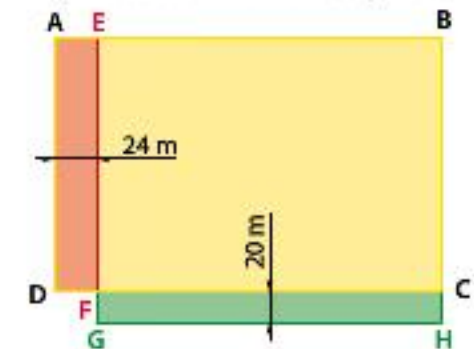
Le cadre doit être de largeur constante x .



Calculez cette largeur pour que l'aire du cadre soit égale au cinquième de l'aire de l'écran. Vous donnerez le résultat à un millimètre près.

- 64** Remembrement

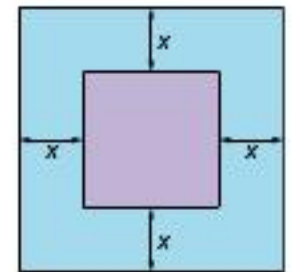
Un agriculteur, propriétaire d'un champ rectangulaire ABCD d'une superficie de $4 \text{ ha } 32 \text{ a}$, doit, dans le cadre d'un remembrement, céder une bande AEFD de largeur 24 m et recevoir en échange une bande FCHG de largeur 20 m de façon à conserver la même superficie.



Quelles étaient les dimensions initiales de son terrain ?

- 65** Variation d'une aire

On a partagé un carré de 1 m de côté en deux domaines. La partie coloriée en bleu est une bande de largeur x . Comment choisir x pour que les parties bleues et mauves aient la même aire ?



- 66** En électricité

On dispose de deux conducteurs ohmiques de résistance R_1 et R_2 .

Si on les monte en série (figure 1), on obtient un dipôle de résistance équivalente $R = R_1 + R_2$.

Si on les monte en dérivation (figure 2), on obtient un dipôle de résistance équivalente R telle que :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

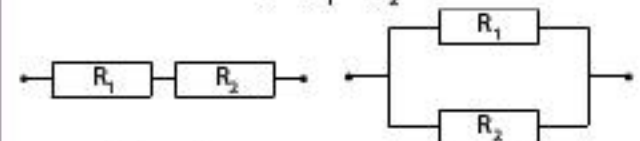
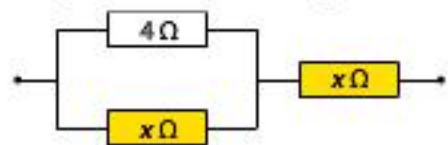


figure 1

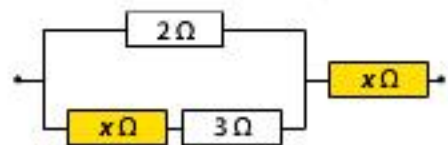
figure 2

Applications

1. Déterminez la valeur x de la résistance pour que la résistance équivalente de ce montage soit 6Ω .



2. Déterminez la valeur x de la résistance pour que la résistance équivalente de ce montage soit $4,5 \Omega$.



FONCTIONS TRINÔMES

67. Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Précisez dans chaque cas le signe du discriminant, ainsi que celui de a et c .

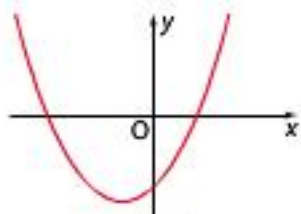


figure 1

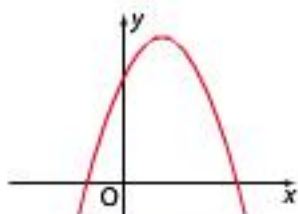


figure 2

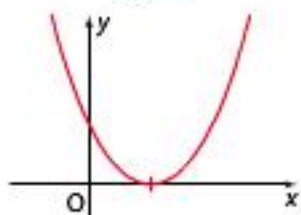


figure 3

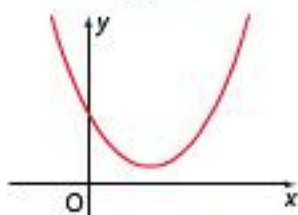
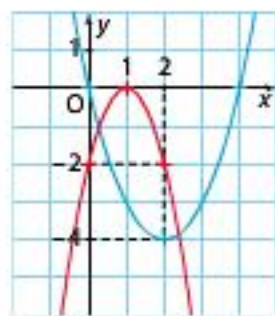


figure 4

68. f et g sont deux fonctions trinômes définies sur \mathbb{R} . Le discriminant de $f(x)$ est positif et celui de $g(x)$ est nul. On a tracé ci-contre les courbes représentatives de f et g .



1. Attribuez sa courbe à chaque fonction.

2. a) Pourquoi $f(x)$ est de la forme $ax(x-4)$?

b) À l'aide des renseignements portés sur la figure, trouvez la valeur de a .

3. a) Pourquoi $g(x)$ est-il de la forme $a(x-1)^2$?

b) Calculez a .

69. Les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ et $g(x) = -5x^2 + 8x - 10$.

On note \mathcal{P} et \mathcal{P}' leurs représentations graphiques.

1. Quelles sont les coordonnées des sommets S et S' des paraboles \mathcal{P} et \mathcal{P}' ?

2. Dressez les tableaux de variation de f et g .

70 Équivalence

f désigne une fonction trinôme.

L'énoncé « $f(x)$ possède deux racines distinctes » équivaut à « $\Delta > 0$ » est une équivalence.

Cela signifie que :

Si « $f(x)$ possède deux racines », alors « $\Delta > 0$ ».

Et réciproquement :

Si « $\Delta > 0$ », alors « $f(x)$ possède deux racines distinctes ».

g est la fonction trinôme définie par $g(x) = -x^2 + 2x + c$, où c est un nombre quelconque.

1. On considère les propositions A et B suivantes :

A « Le trinôme $g(x)$ n'a pas de racine. »

B « $c < -1$. »

Les propositions A et B sont-elles équivalentes ?

2. On considère les propositions C et D suivantes :

C « $c > 0$. »

D « Le maximum de g est strictement positif. »

Les propositions C et D sont-elles équivalentes ?

Justifiez en examinant chaque implication.

71. f est la fonction trinôme définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 4.$$

On note \mathcal{P} la parabole représentant f .

1. Quelles sont les coordonnées de son sommet S ?

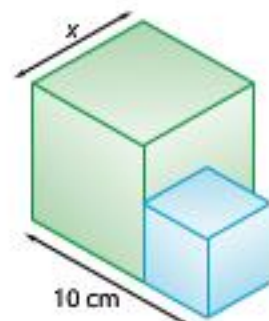
2. \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses en I et J et l'axe des ordonnées en K .

Quelles sont les coordonnées des points I , J et K ?

3. Vérifiez à l'aide de votre calculatrice.

72. Les deux cubes sont tels que la somme des mesures de leurs côtés est égale à dix centimètres.

On note x la mesure du côté de l'un d'entre eux.



Déterminez la valeur de x pour laquelle la somme des volumes des deux cubes est minimale.

SIGNE DU TRINÔME

Pour les exercices 73 à 76

Étudiez le signe de chacun des trinômes suivant les valeurs de x .

73 a) $A(x) = (x-5)(x+2)$. b) $B(x) = (1+3x)(6+x)$.

c) $C(x) = (2-6x)(1+x)$. d) $D(x) = -9x(2+7x)$.

74 a) $A(x) = (x^2-4) - 3(x+2)(x-1)$.

b) $B(x) = (x-5)^2 - 16$.

c) $C(x) = 4(x+2)^2 - 9(3-2x)^2$.

75 a) $f(x) = x^2 + x - 2$. b) $g(x) = -3x^2 + 6x - 2$.

c) $h(x) = x^2 - 2x + 3$. d) $k(x) = 5x^2 + 41x + 80$.

76 a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 16$. b) $g(x) = x^2 - x + 1$.

c) $h(x) = -x^2 + x\sqrt{2} - 1$.

Pour les exercices 77 à 80

Résolvez chacune des inéquations.

77 a) $x^2 + 3x + 2 > 0$. b) $t^2 + t + 1 > 0$.

c) $x^2 - 7x + 12 \leq 0$. d) $-5t^2 - t - 2 \leq 0$.

78 a) $9x^2 + 30x + 25 \leq 0$. b) $-3t^2 - \frac{9}{2}t + 3 \leq 0$.

c) $-64x^2 + 48x + 7 < 0$. d) $4t^2 + 12t + 9 > 0$.

79 a) $(2-x)(4x+3) \geq 0$. b) $x^2 - 6 > 0$.

c) $(3+2x)^2 - 16 \geq 0$. d) $7x(3+2x) \geq 0$.

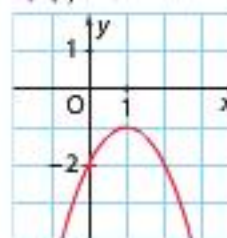
80 a) $\frac{3+x}{x-3} \geq 0$. b) $\frac{7-4x}{x+3} < 0$.

c) $\frac{x}{5-x} > 0$. d) $\frac{3}{x} \leq x + 2$.

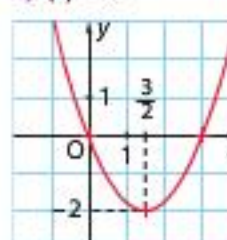
81. Chacune des courbes ci-dessous représente une fonction trinôme. Dans chaque cas, résolvez l'inéquation proposée.

→ exercice résolu E, page 32.

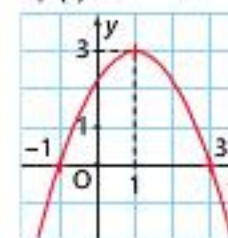
a) $f(x) \geq 0$



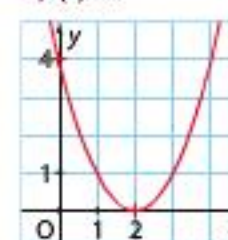
c) $f(x) \leq 0$



b) $f(x) > 0$

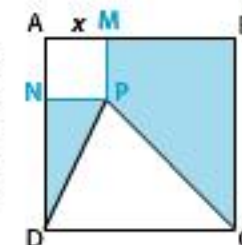


d) $f(x) > 0$



82 Optimisation

ABCD est un carré de 10 cm de côté et AMPN un carré de côté x tel que x appartient à l'intervalle $I = [0; 10]$. On désigne par $S(x)$ l'aire en cm^2 de la partie coloriée en bleu.



1. Démontrez que pour tout nombre x de I :

$$S(x) = -x^2 + 5x + 50.$$

2. a) Construisez le tableau de variation de S sur I .

b) Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ est-elle maximale ? Que vaut alors cette aire ?

3. Quel est l'ensemble des nombres x de I pour lesquels $S(x) \leq \text{aire}(AMPN)$?

83 La méthode d'al-Khwarizmi

ALGORITHMIQUE

Pour déterminer la solution positive de l'équation :

$$x^2 + 12x = 108,$$

voici comment procédait Al-Khwarizmi, mathématicien arabe du IX^e siècle (voir page 10).

Diviser 12 par 2.
élever ce quotient au carré.
Ajouter ce carré à 108.
Prendre la racine carrée de cette somme.
Retraire à cette racine carrée le quotient du début.

1. a) Vérifiez que l'équation $x^2 + 12x = 108$ admet deux solutions de signes contraires et que l'algorithme proposé donne la solution positive.

b) Utilisez la même méthode pour déterminer la solution positive de l'équation $x^2 + 16x = 80$.

2. a) Prouvez que toute équation du type $x^2 + bx = c$ où $c > 0$ admet deux racines de signes contraires.

Pour cela, étudiez le signe du produit des racines en utilisant le théorème démontré dans l'exercice 87, page 42.

b) Complétez cet algorithme qui donne la racine positive d'une telle équation.

```

1  VARIABLES
2  b EST_DU_TYPE NOMBRE
3  c EST_DU_TYPE NOMBRE
4  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  LIRE b
7  LIRE c
8  x1 PREND_LA_VALEUR ...
9  AFFICHER x1
10 FIN_ALGORITHME

```

84 Variation d'une aire. Inéquation

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :

$$AB = AC = 5 \text{ cm.}$$

AHMK est un rectangle. On pose $AH = x$, $0 \leq x \leq 5$.

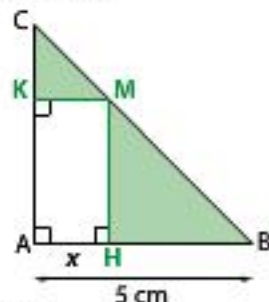
1. Prouvez que l'aire $S(x)$ du domaine coloré est égale à :

$$x^2 - 5x + \frac{25}{2}.$$

2. a) Étudier sens de variation de S .

b) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Calculez ce minimum.

3. Trouvez les valeurs de x de $[0; 5]$ telles que $S(x) \leq \frac{75}{8}$.



AVEC LES TICE

85 Travailler avec un paramètre

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, \mathcal{P} est la parabole d'équation $y = x^2$, et pour tout nombre m , d_m est la droite d'équation $y = 2x + m$.

On considère le cas où la droite d_m coupe la parabole \mathcal{P} en deux points A et B. Le but de l'exercice est de savoir sur quelle ligne se déplace le point C, milieu du segment [AB], lorsque m varie dans \mathbb{R} .

1. Expérimenter

a) Avec GeoGebra, créez un curseur m . Réglages : mini -5, maxi 10, incrément 0,1.

b) Saisissez $y = x^2$ et $y = 2x + m$. Lorsque d_m coupe \mathcal{P} en A et B, créez le point C, milieu de [AB].

c) Affichez la trace de C et déplacez m à l'aide du curseur. Que conjecturez-vous :

- sur la trace du point C ?
- sur le nombre de points d'intersection ?

2. Démontrer

a) Démontrez que la droite d_m coupe \mathcal{P} en deux points A et B, distincts ou non, si et seulement si $m \geq -1$.

b) Calculez, en fonction de m , les abscisses de A et B.

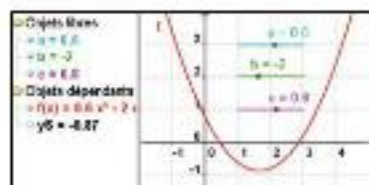
c) Déduisez-en l'abscisse du point C et concluez.

86 Nombre de racines d'un trinôme

On souhaite déterminer le nombre de racines du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction du signe de $a \times y_5$ où y_5 est l'ordonnée du sommet de la parabole ($a \neq 0$).

1. Utiliser GeoGebra pour conjecturer la réponse.

2. Exprimez $a \times y_5$ en fonction de a , b et c pour démontrer (ou infirmer) la conjecture.



ROC

Restitution organisée de connaissances

87 Prérequis. Le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$), lorsque le discriminant Δ est strictement positif, admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

1. Démonstration

Démontrez que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Application

a) Vérifiez que $x = \frac{1}{2}$ est solution de l'équation : $4x^2 + 4x - 3 = 0$.

Calculez l'autre racine sans calculer Δ .

b) Sans aucun calcul, trouvez les solutions de l'équation $x^2 + 5x - 6 = 0$.

POUR ALLER PLUS LOIN

Utilisez le résultat démontré à l'exercice **87** pour résoudre les exercices **88 à 91**.

88 1. a) Vérifiez que 4 est solution de l'équation : $-7x^2 + 9x + 76 = 0$.

b) Quelle est l'autre solution ?

89 Chacune des équations suivantes admet une solution évidente. Trouvez cette solution, puis l'autre, sans calculer le discriminant Δ .

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$. b) $7x^2 + 6x - 1 = 0$.

c) $x^2 + x - 6 = 0$. d) $8x^2 + 7x - 15 = 0$.

90 Trouvez deux nombres (s'ils existent) dont la somme est 12 et le produit -85.

Prendre toutes les initiatives

91 Déterminez trois entiers consécutifs dont la somme est égale au produit.

92 \mathcal{C} est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$.

M et N sont deux points de \mathcal{C} d'abscisses respectives m et n . Calculez les valeurs exactes de m et n lorsque A est le milieu du segment [MN].



93 Déterminez le nombre m pour que le trinôme $f(x) = -x^2 + 3x - m$ soit négatif pour tout nombre x .

94 On donne le trinôme $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculez alors cette solution.

2. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ n'a-t-elle aucune solution ?

95 On donne le trinôme $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculez alors cette solution.

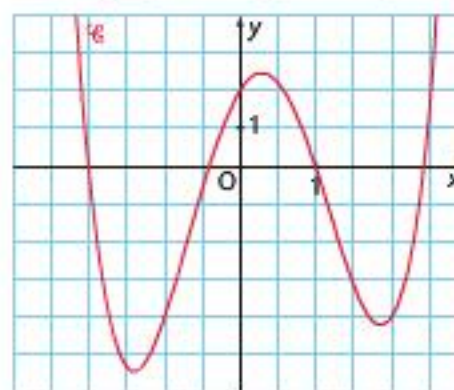
2. a) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes ?

b) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $f(x) < 0$ pour tout nombre x ?

96 Si on augmente les arêtes d'un cube de 2 cm de côté, alors son volume augmente de 488 cm^3 . Que vaut l'arête de ce cube ?

97 La courbe \mathcal{C} ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 2x - 1).$$



1. a) Graphiquement, conjecturez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

2. a) Utilisez la représentation graphique de la fonction f pour conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

b) Résolvez l'inéquation $f(x) < 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

98 Trouver des erreurs

Sur des copies d'élèves, un professeur de mathématiques a trouvé les raisonnements suivants, qui contiennent chaque fois une erreur. Trouvez cette erreur et proposez une solution correcte.

1. « Pour résoudre l'équation $x^2 - 1 \neq x + 1$, on utilise l'identité $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

L'équation s'écrit $(x+1)(x-1) = x+1$. On simplifie par $(x+1)$ et l'équation devient $x-1 = 1$, soit $x = 2$. »

2. « Pour résoudre l'inéquation $(x+1)^2 \geq x+1$, on pose $y = x+1$. L'inéquation devient $y^2 \geq y$.

Or ceci est toujours vrai donc l'ensemble des solutions est \mathbb{R} . »

3. « L'inéquation $\frac{x^2-1}{x+2} \leq x$ s'écrit $x^2-1 \leq x^2+2x$, soit $-1 \leq 2x$ et $x \geq -\frac{1}{2}$. »

99 La vitesse du vent et l'ULM

La vitesse vraie d'un ULM s'obtient :

- en additionnant sa vitesse propre à celle du vent lorsque le vent est favorable ;

- en retranchant de sa vitesse propre la vitesse du vent lorsque le vent est contraire.

Un ULM dont la vitesse propre est $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ s'est rendu d'une ville A à une ville B, et est revenu aussitôt de la ville B à la ville A. La distance AB est 108 km. On admet que, pendant toute la durée du vol, le vent a soufflé à vitesse constante dans la direction (AB) et dans le sens de A vers B.

1. a) Vérifiez que le temps mis à l'aller s'exprime en fonction de la vitesse v du vent par $t_{\text{aller}} = \frac{108}{90+v}$.

b) Exprimez de même le temps t_{retour} mis au retour.

2. Sachant que le temps mis pour faire l'aller-retour est de 2 h 30, déterminez la vitesse v du vent.

100 Implication réciproque

A. g est la fonction trinôme définie par : $g(x) = mx^2 + 4x + 4$ ($m \neq 0$).

1. Parmi ces implications, lesquelles sont vraies ?

a) « $m = 2$ » \Rightarrow « Pour tout x , $g(x) > 0$. »

b) « $m < 0$ » \Rightarrow « L'équation $g(x) = 0$ a deux solutions distinctes. »

c) « Le trinôme $g(x)$ a deux racines distinctes. » \Rightarrow « $m < 0$. »

2. L'implication c) est la réciproque de b). Ces propositions sont-elles équivalentes ?

B. On donne l'implication : « $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes » \Rightarrow « a et c sont de signes contraires ».

Cette implication est-elle vraie ? Sa réciproque est-elle vraie ?



101 Signe d'un trinôme

ALGORITHMIQUE

Cet algorithme permet de déterminer le signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

a, b, c, d, x_1 et x_2 sont des variables de type nombre.

1. Quel est le rôle des lignes 2 à 6 (de LIRE a jusqu'à FIN_TANT_QUE)?

2. Complétez cet algorithme.

3. Dans cet algorithme, on a commencé par étudier le signe du discriminant. Écrivez un algorithme ayant le même objectif, mais dans lequel on commence par étudier le signe du coefficient a .

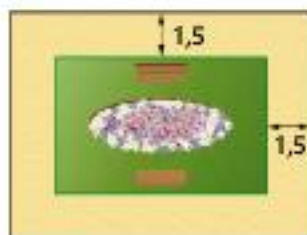
```

DEBUT ALGORITHME
LIRE a
LIRE b
LIRE c
LIRE d
LIRE x1
LIRE x2
LIRE delta
LIRE signe
LIRE resultat
LIRE message
LIRE message2
LIRE message3
LIRE message4
LIRE message5
LIRE message6
LIRE message7
LIRE message8
LIRE message9
LIRE message10
LIRE message11
LIRE message12
LIRE message13
LIRE message14
LIRE message15
LIRE message16
LIRE message17
LIRE message18
LIRE message19
LIRE message20
LIRE message21
LIRE message22
LIRE message23
LIRE message24
LIRE message25
LIRE message26
LIRE message27
LIRE message28
LIRE message29
LIRE message30
LIRE message31
LIRE message32
LIRE message33
LIRE message34
LIRE message35
LIRE message36
LIRE message37
LIRE message38
LIRE message39
LIRE message40
LIRE message41
LIRE message42
LIRE message43
LIRE message44
LIRE message45
LIRE message46
LIRE message47
LIRE message48
LIRE message49
LIRE message50
LIRE message51
LIRE message52
LIRE message53
LIRE message54
LIRE message55
LIRE message56
LIRE message57
LIRE message58
LIRE message59
LIRE message60
LIRE message61
LIRE message62
LIRE message63
LIRE message64
LIRE message65
LIRE message66
LIRE message67
LIRE message68
LIRE message69
LIRE message70
LIRE message71
LIRE message72
LIRE message73
LIRE message74
LIRE message75
LIRE message76
LIRE message77
LIRE message78
LIRE message79
LIRE message80
LIRE message81
LIRE message82
LIRE message83
LIRE message84
LIRE message85
LIRE message86
LIRE message87
LIRE message88
LIRE message89
LIRE message90
LIRE message91
LIRE message92
LIRE message93
LIRE message94
LIRE message95
LIRE message96
LIRE message97
LIRE message98
LIRE message99
LIRE message100
LIRE message101
LIRE message102
LIRE message103
LIRE message104
LIRE message105
LIRE message106
LIRE message107
LIRE message108
LIRE message109
LIRE message110
LIRE message111
LIRE message112
LIRE message113
LIRE message114
LIRE message115
LIRE message116
LIRE message117
LIRE message118
LIRE message119
LIRE message120
LIRE message121
LIRE message122
LIRE message123
LIRE message124
LIRE message125
LIRE message126
LIRE message127
LIRE message128
LIRE message129
LIRE message130
LIRE message131
LIRE message132
LIRE message133
LIRE message134
LIRE message135
LIRE message136
LIRE message137
LIRE message138
LIRE message139
LIRE message140
LIRE message141
LIRE message142
LIRE message143
LIRE message144
LIRE message145
LIRE message146
LIRE message147
LIRE message148
LIRE message149
LIRE message150
LIRE message151
LIRE message152
LIRE message153
LIRE message154
LIRE message155
LIRE message156
LIRE message157
LIRE message158
LIRE message159
LIRE message160
LIRE message161
LIRE message162
LIRE message163
LIRE message164
LIRE message165
LIRE message166
LIRE message167
LIRE message168
LIRE message169
LIRE message170
LIRE message171
LIRE message172
LIRE message173
LIRE message174
LIRE message175
LIRE message176
LIRE message177
LIRE message178
LIRE message179
LIRE message180
LIRE message181
LIRE message182
LIRE message183
LIRE message184
LIRE message185
LIRE message186
LIRE message187
LIRE message188
LIRE message189
LIRE message190
LIRE message191
LIRE message192
LIRE message193
LIRE message194
LIRE message195
LIRE message196
LIRE message197
LIRE message198
LIRE message199
LIRE message200
LIRE message201
LIRE message202
LIRE message203
LIRE message204
LIRE message205
LIRE message206
LIRE message207
LIRE message208
LIRE message209
LIRE message210
LIRE message211
LIRE message212
LIRE message213
LIRE message214
LIRE message215
LIRE message216
LIRE message217
LIRE message218
LIRE message219
LIRE message220
LIRE message221
LIRE message222
LIRE message223
LIRE message224
LIRE message225
LIRE message226
LIRE message227
LIRE message228
LIRE message229
LIRE message230
LIRE message231
LIRE message232
LIRE message233
LIRE message234
LIRE message235
LIRE message236
LIRE message237
LIRE message238
LIRE message239
LIRE message240
LIRE message241
LIRE message242
LIRE message243
LIRE message244
LIRE message245
LIRE message246
LIRE message247
LIRE message248
LIRE message249
LIRE message250
LIRE message251
LIRE message252
LIRE message253
LIRE message254
LIRE message255
LIRE message256
LIRE message257
LIRE message258
LIRE message259
LIRE message260
LIRE message261
LIRE message262
LIRE message263
LIRE message264
LIRE message265
LIRE message266
LIRE message267
LIRE message268
LIRE message269
LIRE message270
LIRE message271
LIRE message272
LIRE message273
LIRE message274
LIRE message275
LIRE message276
LIRE message277
LIRE message278
LIRE message279
LIRE message280
LIRE message281
LIRE message282
LIRE message283
LIRE message284
LIRE message285
LIRE message286
LIRE message287
LIRE message288
LIRE message289
LIRE message290
LIRE message291
LIRE message292
LIRE message293
LIRE message294
LIRE message295
LIRE message296
LIRE message297
LIRE message298
LIRE message299
LIRE message300
LIRE message301
LIRE message302
LIRE message303
LIRE message304
LIRE message305
LIRE message306
LIRE message307
LIRE message308
LIRE message309
LIRE message310
LIRE message311
LIRE message312
LIRE message313
LIRE message314
LIRE message315
LIRE message316
LIRE message317
LIRE message318
LIRE message319
LIRE message320
LIRE message321
LIRE message322
LIRE message323
LIRE message324
LIRE message325
LIRE message326
LIRE message327
LIRE message328
LIRE message329
LIRE message330
LIRE message331
LIRE message332
LIRE message333
LIRE message334
LIRE message335
LIRE message336
LIRE message337
LIRE message338
LIRE message339
LIRE message340
LIRE message341
LIRE message342
LIRE message343
LIRE message344
LIRE message345
LIRE message346
LIRE message347
LIRE message348
LIRE message349
LIRE message350
LIRE message351
LIRE message352
LIRE message353
LIRE message354
LIRE message355
LIRE message356
LIRE message357
LIRE message358
LIRE message359
LIRE message360
LIRE message361
LIRE message362
LIRE message363
LIRE message364
LIRE message365
LIRE message366
LIRE message367
LIRE message368
LIRE message369
LIRE message370
LIRE message371
LIRE message372
LIRE message373
LIRE message374
LIRE message375
LIRE message376
LIRE message377
LIRE message378
LIRE message379
LIRE message380
LIRE message381
LIRE message382
LIRE message383
LIRE message384
LIRE message385
LIRE message386
LIRE message387
LIRE message388
LIRE message389
LIRE message390
LIRE message391
LIRE message392
LIRE message393
LIRE message394
LIRE message395
LIRE message396
LIRE message397
LIRE message398
LIRE message399
LIRE message400
LIRE message401
LIRE message402
LIRE message403
LIRE message404
LIRE message405
LIRE message406
LIRE message407
LIRE message408
LIRE message409
LIRE message410
LIRE message411
LIRE message412
LIRE message413
LIRE message414
LIRE message415
LIRE message416
LIRE message417
LIRE message418
LIRE message419
LIRE message420
LIRE message421
LIRE message422
LIRE message423
LIRE message424
LIRE message425
LIRE message426
LIRE message427
LIRE message428
LIRE message429
LIRE message430
LIRE message431
LIRE message432
LIRE message433
LIRE message434
LIRE message435
LIRE message436
LIRE message437
LIRE message438
LIRE message439
LIRE message440
LIRE message441
LIRE message442
LIRE message443
LIRE message444
LIRE message445
LIRE message446
LIRE message447
LIRE message448
LIRE message449
LIRE message450
LIRE message451
LIRE message452
LIRE message453
LIRE message454
LIRE message455
LIRE message456
LIRE message457
LIRE message458
LIRE message459
LIRE message460
LIRE message461
LIRE message462
LIRE message463
LIRE message464
LIRE message465
LIRE message466
LIRE message467
LIRE message468
LIRE message469
LIRE message470
LIRE message471
LIRE message472
LIRE message473
LIRE message474
LIRE message475
LIRE message476
LIRE message477
LIRE message478
LIRE message479
LIRE message480
LIRE message481
LIRE message482
LIRE message483
LIRE message484
LIRE message485
LIRE message486
LIRE message487
LIRE message488
LIRE message489
LIRE message490
LIRE message491
LIRE message492
LIRE message493
LIRE message494
LIRE message495
LIRE message496
LIRE message497
LIRE message498
LIRE message499
LIRE message500
LIRE message501
LIRE message502
LIRE message503
LIRE message504
LIRE message505
LIRE message506
LIRE message507
LIRE message508
LIRE message509
LIRE message510
LIRE message511
LIRE message512
LIRE message513
LIRE message514
LIRE message515
LIRE message516
LIRE message517
LIRE message518
LIRE message519
LIRE message520
LIRE message521
LIRE message522
LIRE message523
LIRE message524
LIRE message525
LIRE message526
LIRE message527
LIRE message528
LIRE message529
LIRE message530
LIRE message531
LIRE message532
LIRE message533
LIRE message534
LIRE message535
LIRE message536
LIRE message537
LIRE message538
LIRE message539
LIRE message540
LIRE message541
LIRE message542
LIRE message543
LIRE message544
LIRE message545
LIRE message546
LIRE message547
LIRE message548
LIRE message549
LIRE message550
LIRE message551
LIRE message552
LIRE message553
LIRE message554
LIRE message555
LIRE message556
LIRE message557
LIRE message558
LIRE message559
LIRE message560
LIRE message561
LIRE message562
LIRE message563
LIRE message564
LIRE message565
LIRE message566
LIRE message567
LIRE message568
LIRE message569
LIRE message570
LIRE message571
LIRE message572
LIRE message573
LIRE message574
LIRE message575
LIRE message576
LIRE message577
LIRE message578
LIRE message579
LIRE message580
LIRE message581
LIRE message582
LIRE message583
LIRE message584
LIRE message585
LIRE message586
LIRE message587
LIRE message588
LIRE message589
LIRE message590
LIRE message591
LIRE message592
LIRE message593
LIRE message594
LIRE message595
LIRE message596
LIRE message597
LIRE message598
LIRE message599
LIRE message600
LIRE message601
LIRE message602
LIRE message603
LIRE message604
LIRE message605
LIRE message606
LIRE message607
LIRE message608
LIRE message609
LIRE message610
LIRE message611
LIRE message612
LIRE message613
LIRE message614
LIRE message615
LIRE message616
LIRE message617
LIRE message618
LIRE message619
LIRE message620
LIRE message621
LIRE message622
LIRE message623
LIRE message624
LIRE message625
LIRE message626
LIRE message627
LIRE message628
LIRE message629
LIRE message630
LIRE message631
LIRE message632
LIRE message633
LIRE message634
LIRE message635
LIRE message636
LIRE message637
LIRE message638
LIRE message639
LIRE message640
LIRE message641
LIRE message642
LIRE message643
LIRE message644
LIRE message645
LIRE message646
LIRE message647
LIRE message648
LIRE message649
LIRE message650
LIRE message651
LIRE message652
LIRE message653
LIRE message654
LIRE message655
LIRE message656
LIRE message657
LIRE message658
LIRE message659
LIRE message660
LIRE message661
LIRE message662
LIRE message663
LIRE message664
LIRE message665
LIRE message666
LIRE message667
LIRE message668
LIRE message669
LIRE message670
LIRE message671
LIRE message672
LIRE message673
LIRE message674
LIRE message675
LIRE message676
LIRE message677
LIRE message678
LIRE message679
LIRE message680
LIRE message681
LIRE message682
LIRE message683
LIRE message684
LIRE message685
LIRE message686
LIRE message687
LIRE message688
LIRE message689
LIRE message690
LIRE message691
LIRE message692
LIRE message693
LIRE message694
LIRE message695
LIRE message696
LIRE message697
LIRE message698
LIRE message699
LIRE message700
LIRE message701
LIRE message702
LIRE message703
LIRE message704
LIRE message705
LIRE message706
LIRE message707
LIRE message708
LIRE message709
LIRE message710
LIRE message711
LIRE message712
LIRE message713
LIRE message714
LIRE message715
LIRE message716
LIRE message717
LIRE message718
LIRE message719
LIRE message720
LIRE message721
LIRE message722
LIRE message723
LIRE message724
LIRE message725
LIRE message726
LIRE message727
LIRE message728
LIRE message729
LIRE message730
LIRE message731
LIRE message732
LIRE message733
LIRE message734
LIRE message735
LIRE message736
LIRE message737
LIRE message738
LIRE message739
LIRE message740
LIRE message741
LIRE message742
LIRE message743
LIRE message744
LIRE message745
LIRE message746
LIRE message747
LIRE message748
LIRE message749
LIRE message750
LIRE message751
LIRE message752
LIRE message753
LIRE message754
LIRE message755
LIRE message756
LIRE message757
LIRE message758
LIRE message759
LIRE message760
LIRE message761
LIRE message762
LIRE message763
LIRE message764
LIRE message765
LIRE message766
LIRE message767
LIRE message768
LIRE message769
LIRE message770
LIRE message771
LIRE message772
LIRE message773
LIRE message774
LIRE message775
LIRE message776
LIRE message777
LIRE message778
LIRE message779
LIRE message780
LIRE message781
LIRE message782
LIRE message783
LIRE message784
LIRE message785
LIRE message786
LIRE message787
LIRE message788
LIRE message789
LIRE message790
LIRE message791
LIRE message792
LIRE message793
LIRE message794
LIRE message795
LIRE message796
LIRE message797
LIRE message798
LIRE message799
LIRE message800
LIRE message801
LIRE message802
LIRE message803
LIRE message804
LIRE message805
LIRE message806
LIRE message807
LIRE message808
LIRE message809
LIRE message810
LIRE message811
LIRE message812
LIRE message813
LIRE message814
LIRE message815
LIRE message816
LIRE message817
LIRE message818
LIRE message819
LIRE message820
LIRE message821
LIRE message822
LIRE message823
LIRE message824
LIRE message825
LIRE message826
LIRE message827
LIRE message828
LIRE message829
LIRE message830
LIRE message831
LIRE message832
LIRE message833
LIRE message834
LIRE message835
LIRE message836
LIRE message837
LIRE message838
LIRE message839
LIRE message840
LIRE message841
LIRE message842
LIRE message843
LIRE message844
LIRE message845
LIRE message846
LIRE message847
LIRE message848
LIRE message849
LIRE message850
LIRE message851
LIRE message852
LIRE message853
LIRE message854
LIRE message855
LIRE message856
LIRE message857
LIRE message858
LIRE message859
LIRE message860
LIRE message861
LIRE message862
LIRE message863
LIRE message864
LIRE message865
LIRE message866
LIRE message867
LIRE message868
LIRE message869
LIRE message870
LIRE message871
LIRE message872
LIRE message873
LIRE message874
LIRE message875
LIRE message876
LIRE message877
LIRE message878
LIRE message879
LIRE message880
LIRE message881
LIRE message882
LIRE message883
LIRE message884
LIRE message885
LIRE message886
LIRE message887
LIRE message888
LIRE message889
LIRE message890
LIRE message891
LIRE message892
LIRE message893
LIRE message894
LIRE message895
LIRE message896
LIRE message897
LIRE message898
LIRE message899
LIRE message900
LIRE message901
LIRE message902
LIRE message903
LIRE message904
LIRE message905
LIRE message906
LIRE message907
LIRE message908
LIRE message909
LIRE message910
LIRE message911
LIRE message912
LIRE message913
LIRE message914
LIRE message915
LIRE message916
LIRE message917
LIRE message918
LIRE message919
LIRE message920
LIRE message921
LIRE message922
LIRE message923
LIRE message924
LIRE message925
LIRE message926
LIRE message927
LIRE message928
LIRE message929
LIRE message930
LIRE message931
LIRE message932
LIRE message933
LIRE message934
LIRE message935
LIRE message936
LIRE message937
LIRE message938
LIRE message939
LIRE message940
LIRE message941
LIRE message942
LIRE message943
LIRE message944
LIRE message945
LIRE message946
LIRE message947
LIRE message948
LIRE message949
LIRE message950
LIRE message951
LIRE message952
LIRE message953
LIRE message954
LIRE message955
LIRE message956
LIRE message957
LIRE message958
LIRE message959
LIRE message960
LIRE message961
LIRE message962
LIRE message963
LIRE message964
LIRE message965
LIRE message966
LIRE message967
LIRE message968
LIRE message969
LIRE message970
LIRE message971
LIRE message972
LIRE message973
LIRE message974
LIRE message975
LIRE message976
LIRE message977
LIRE message978
LIRE message979
LIRE message980
LIRE message981
LIRE message982
LIRE message983
LIRE message984
LIRE message985
LIRE message986
LIRE message987
LIRE message988
LIRE message989
LIRE message990
LIRE message991
LIRE message992
LIRE message993
LIRE message994
LIRE message995
LIRE message996
LIRE message997
LIRE message998
LIRE message999
LIRE message1000

```

102 Un jardin de forme rectangulaire a une superficie totale de 805 m^2 , allée comprise.

Cette allée de 1,5 mètre de large permet d'en faire le tour. Cette allée a une superficie de 165 m^2 .



Quelles sont les dimensions du jardin?

103 Dans un repère, \mathcal{C} est la courbe d'équation $y = \frac{3}{x}$ et d la droite d'équation $y = 2x + 1$.

La droite d coupe \mathcal{C} en A et B, et les axes en C et D. Démontrez que les segments [AB] et [CD] ont le même milieu.

104 Une pyramide

SABC est une pyramide dont la base ABC est un triangle équilatéral et dont l'arête (SA) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AC). On sait que $AB = 4 \text{ cm}$ et $SA = 2 \text{ cm}$. M est un point de [AB]. À partir de ce point on construit le rectangle MNPQ comme indiqué sur la figure : (MN) est parallèle à (AS) et (MQ) est parallèle à (BC).

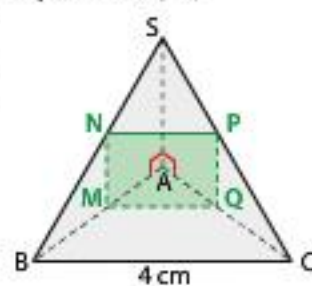
L'objectif est de choisir le point M tel que l'aire du rectangle MNPQ soit égale à $\frac{4}{3} \text{ cm}^2$.

1. On pose $AM = x$.

Démontrez que :

$$\text{aire}(MNPQ) = -\frac{x^2}{2} + 2x.$$

2. Déduisez-en la ou les solutions du problème.



105 On se place dans un repère orthonormé (O; I, J). OABC est un carré de côté 4. d a pour équation $y = \frac{1}{2}x + m$ avec m appartenant à l'intervalle $[2; 4[$.

1. Justifiez que pour tout nombre m de $[2; 4[$, d coupe le segment [OC] en F et le segment [BC] en E.

2. a) Démontrez que $\text{aire}(ECF) = (4 - m)^2$.

b) Déduisez-en l'ensemble des nombres m de l'intervalle $[2; 4[$ pour lesquels :

$$8 \times \text{aire}(ECF) \leq \text{aire}(OABC).$$

106 Le poids de l'astronaute

Le poids diminue avec l'altitude. Ainsi, si la masse d'un astronaute est 60 kg, son poids (en N) à l'altitude x (en km) au-dessus du niveau de la mer est donné par :

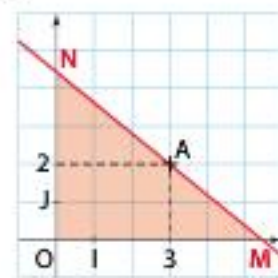
$$P = 60 \times 9,8 \times \left(\frac{6400}{6400 + x} \right)^2.$$

À quelle altitude le poids de l'astronaute sera-t-il inférieur à 25 N?



107 Dans un repère orthonormé (O; I, J), le point A a pour coordonnées (3; 2).

M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées (m; 0) avec $m > 3$. La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en N.



1. a) Démontrez que $ON = \frac{2m}{m-3}$.

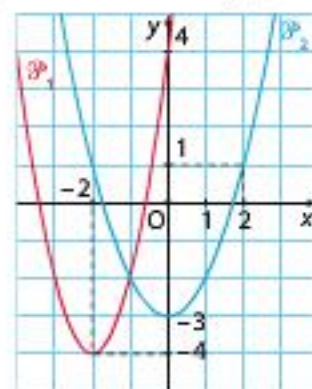
b) Déduisez-en que l'aire du triangle OMN est égale à :

$$\frac{m^2}{m-3}.$$

2. Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $\text{aire}(OMN) \leq 16$?

108 f et g sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 3.$$



1. Attribuez à chaque fonction sa courbe.

2. Calculez les coordonnées des points d'intersection de ces deux paraboles.

3. Quel est l'ensemble des nombres x pour lesquels P_1 est en dessous de P_2 ?

109 Coût de fabrication et bénéfices

Dans une usine, on fabrique des appareils ménagers.

Le coût total de fabrication de n appareils est donné par : $C(n) = 0,02n^2 + 8n + 500$, pour $n \in [0; 600]$.

Le coût $C(n)$ est exprimé en euros.

1. Déterminez la quantité à partir de laquelle le coût total est supérieur à 4700 €.

2. On appelle p le prix de vente (en euros) d'un appareil. Dans cette question, $p = 17,5$.

a) Exprimer le bénéfice $B(n)$ en fonction de n et vérifiez que :

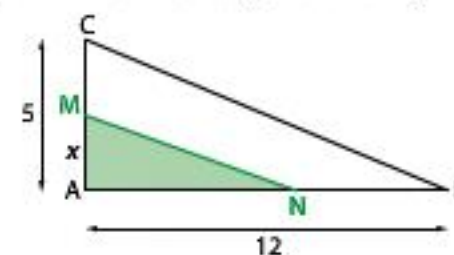
$$B(n) = -0,02n^2 + 9,5n - 500.$$

b) Déterminez algébriquement le nombre d'appareils à fabriquer pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ou nul.

3. Dans cette question, on ne connaît pas la valeur de p , mais on sait que l'entreprise réalise un bénéfice maximal lorsqu'elle fabrique 300 appareils. Calculez p .

110 ABC est un triangle rectangle tel que $AB = 12$ et $AC = 5$. M est un point de [AC] tel que $AM = x$, avec x appartenant à l'intervalle $I = [0; 5]$.

À chaque point M, on associe le point N du segment [AB] tel que $BN = 2x$. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle AMN.



1. Démontrez que $\mathcal{A}(x) = 6x - x^2$.

2. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 6x - x^2$ et \mathcal{P} la parabole représentative de f .

a) Quelle est la forme canonique de f ? Quelles sont les coordonnées du sommet S de \mathcal{P} ?

b) Tracez \mathcal{P} dans un repère orthonormé et déduisez-en la courbe représentative de \mathcal{A} définie sur I par :

$$\mathcal{A}(x) = 6x - x^2.$$

3. On cherche l'ensemble des nombres x de I tels que $6 \leq \mathcal{A}(x) \leq 8$.

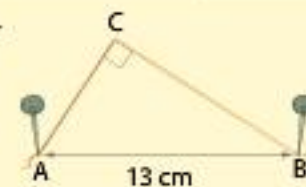
a) Graphiquement, quelle conjecture faites-vous?

b) Trouvez cet ensemble par le calcul.

Aide Résoudre $\mathcal{A}(x) \leq 8$ puis $\mathcal{A}(x) \geq 6$ et conclure.

Prendre toutes les initiatives

111 Une ficelle longue de 20 cm est fixée à ses extrémités par deux clous A et B distants de 13 cm.



Est-il possible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle en C?

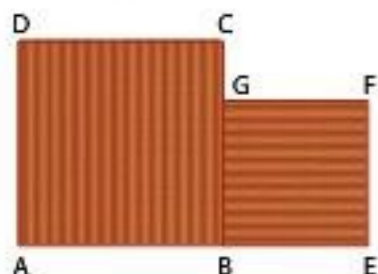
112 Dans un cercle de rayon 4 cm, peut-on inscrire un triangle AMB isocèle, de sommet principal M, tel que MA soit le double de AB?

Travail en autonomie

→ Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce*  page 381.

A Les deux carrés

Deux terrains ayant la forme d'un carré sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



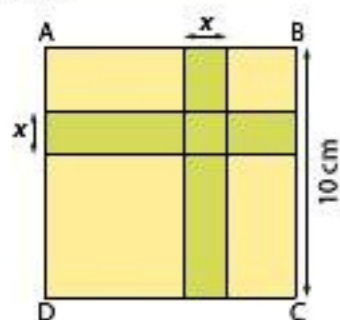
G est un point du segment [BC]. L'aire totale est de $21\,800\text{ m}^2$ et le périmètre de l'ensemble est de 660 m .

- Exprimez l'aire totale et le périmètre de l'ensemble en fonction des mesures x et y des côtés des carrés.
- Déduisez-en la mesure du côté de chacun des carrés.



B Du tissage

ABCD est un carré.

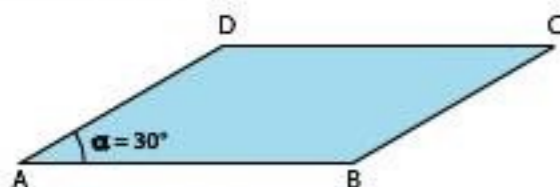


- Exprimez l'aire de la partie colorée en vert en fonction de la variable x .
- Déterminez la mesure x en cm pour laquelle les aires des parties coloriées en jaune et en vert sont égales.



C Pas vraiment un losange...

ABCD est un parallélogramme d'aire 52 cm^2 et de périmètre 42 cm .



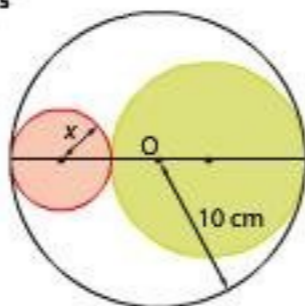
Calculez AB et AD.



D Les disques emboîtés

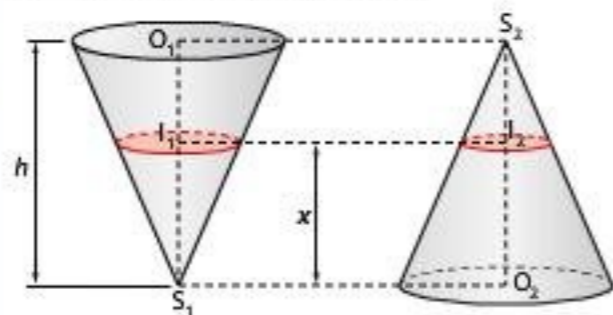
On note S l'aire du grand disque ci-contre.

Pour quelles valeurs de x (rayon du disque rouge) la somme des aires des deux disques intérieurs est-elle supérieure ou égale à $\frac{5}{8}S$?



E Deux cônes

Deux cônes de révolution identiques (même rayon de base $R = 3\text{ cm}$ et même hauteur $h = 12\text{ cm}$) sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



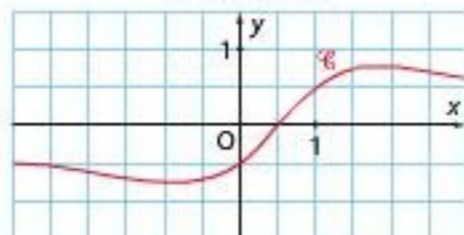
On a indiqué en rouge la section de ces cônes par un plan parallèle aux bases de manière que $S_1I_1 = O_2I_2 = x$.

- Déterminez les rayons r_1 et r_2 des disques colorés en fonction de x .
- Déterminez x pour que la somme des aires de ces deux sections soit inférieure à $\frac{27\pi}{4}$.

F Dans le « couloir »

On a tracé ci-dessous la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2}$$



- Pourquoi f est-elle définie sur \mathbb{R} ?
- Pourquoi la courbe \mathcal{C} est-elle entièrement dans la bande de plan délimitée par les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$?