OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Toulouse et Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique

SESSION 2012

CLASSES DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Avertissement : Le sujet propose cinq exercices indépendants.
Chaque candidat doit traiter seulement quatre exercices selon la répartition suivante *:*

- *candidats élèves de la série S. : traiter les exercices 1, 2, 3 et 5 ;*
- *candidats élèves des autres séries : traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.*

Les calculatrices sont autorisées.
Les candidats sont invités à proposer des réponses argumentées. Il est rappelé que la qualité des explications est un critère important d'appréciation.
D'autre part, les candidats sont aussi encouragés à rédiger sur la copie leurs tentatives de recherche même non abouties.

Exercice 1 (national) : ***Nombres digisibles*** *(tous candidats)*

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

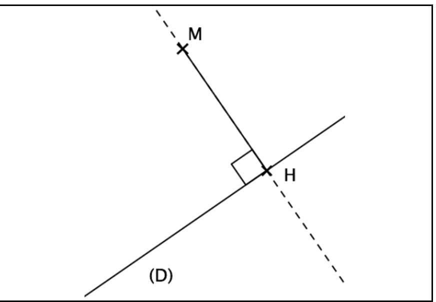
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1) Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2) Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3) Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4) Soit n un entier *digisible* quelconque.
   a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

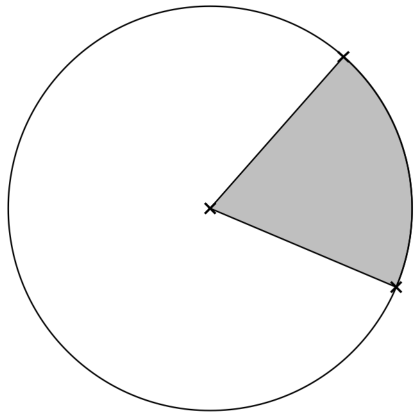
Exercice 2 (national) : ***Plus proche*** *(tous candidats)*

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	

• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\dfrac{\pi\alpha R^2}{360}$.

Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à ***un segment [BC]*** *comme étant la distance du point M à la droite (BC).*



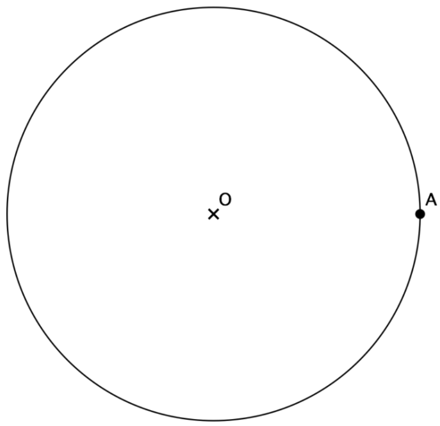
Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.

1) Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

2) Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

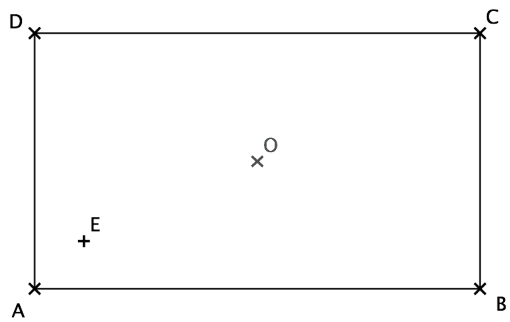
3) Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?



Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2) a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

<u>Exercice 3 (académique) :</u> ***Le concours d'Olympie*** *(tous candidats)*

Tous les ans, la ville d'Olympie organise un concours. Ce concours débute à 14 heures précises.

1) Deux amis Raymond et Eddie qui habitent dans le même village à 10 km d'Olympie décident de se rendre à ce concours. Ils disposent d'un seul vélo qui ne peut transporter qu'une seule personne (pas de porte-bagages !). Ils estiment que leur vitesse moyenne à vélo est de 20 km/h et que leur vitesse moyenne à pied est de 5 km/h.
   Ils décident de partir à 12 h 30.

   a) Raymond propose l'organisation suivante : il fait le début du parcours à vélo. Arrivé chez son cousin Albert qui habite à 3 km d'Olympie, il dépose son vélo et poursuit à pied. Lorsque Eddie arrivera chez Albert, il récupèrera le vélo et finira le parcours avec.
   A quelle heure le dernier des deux amis va-t-il arriver à Olympie ?

Dans la suite, on suppose que l'on peut laisser le vélo, sans surveillance, n'importe où sur le chemin d'Olympie.

   b) Raymond propose de laisser son vélo entre la maison d'Albert et Olympie. Le dernier des deux amis arrivera-t-il plus tard à Olympie que si Raymond laisse le vélo chez Albert ?

   c) A combien de kilomètres d'Olympie Raymond doit-il déposer le vélo pour que la durée du trajet du plus lent des deux amis soit la plus courte possible ?
   A quelle heure au plus tard peuvent-ils partir pour être tous les deux à l'heure au concours ?

2) Au dernier moment, Jeannie, camarade de Raymond et Eddie, se joint à eux pour aller au concours. On considère qu'elle se déplace, à vélo et à pied, aux mêmes vitesses moyennes que Raymond et Eddie.
   Raymond, Eddie et Jeannie veulent partir ensemble le plus tard possible et être à l'heure pour le début du concours.

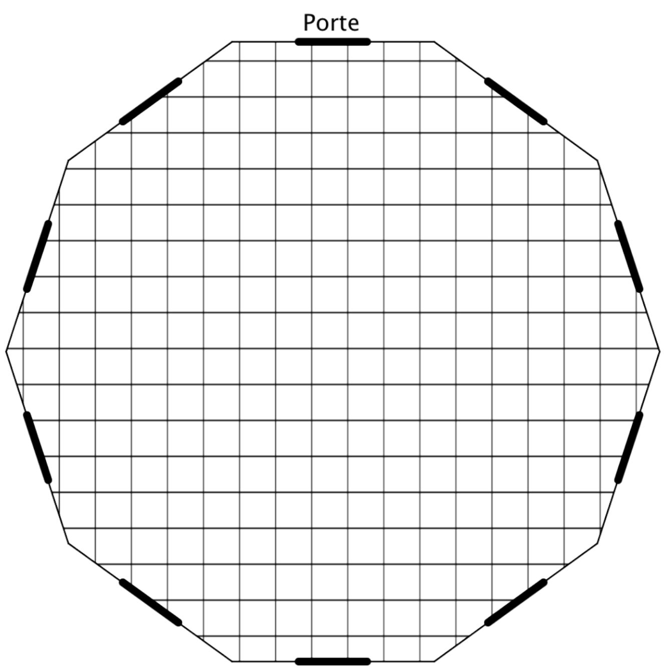
   a) S'ils disposent d'un seul vélo, à quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours et comment doivent-ils s'organiser ?

   b) Jeannie décide finalement d'amener son vélo, lui aussi sans porte-bagages. Les trois amis disposeront donc de deux vélos pouvant transporter chacun une seule personne. A quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours ?

3) Jeannie se dit alors : « Si nous étions sept à vouloir aller à ce concours dans les mêmes conditions avec des bicyclettes sans porte-bagages, il en faudrait au moins cinq pour y arriver en moins d'une heure ». Jeannie a-t-elle raison ?

<u>Exercice 4 (académique) :</u> ***Peintures et gravures*** *(candidats élèves des séries autres que la série S.)*

Dans le salon en rotonde sont accrochés dix beaux tableaux à des clous équidistants les uns des autres : une gravure du port de Rouen (R), une nature morte de Paul Cézanne (Cz), une peinture de grand-père (GP), une gravure de Toulouse-Lautrec (TL), une peinture de la Tour Eiffel (TE), une peinture de Bernard Buffet (BB), une peinture de Paul Klee (K), une vieille carte du Monde gravée (CM), une gravure chinoise (Ch), une gravure japonaise (J).



Aujourd'hui, Maman propose de repenser la disposition des tableaux. Nous discutons donc de la meilleure façon de les accrocher ; il y a finalement six souhaits :

S1- *d'abord*, dit Maman, *gravures et peintures doivent être alternées.*

S2- *et puis*, dit Papa, *la gravure du port de Rouen ne doit surtout pas avoisiner la nature morte de Paul Cézanne ; ni la peinture de grand-père.*

S3- *je voudrais que la gravure de Toulouse-Lautrec et la peinture de la Tour Eiffel soient diamétralement opposées*, dit mon grand-oncle Arthur.

S4- … *que la peinture de Bernard Buffet soit à côté de la vieille carte du monde*, dit ma petite sœur, *mais que cette dernière soit elle-même voisine de la peinture de la tour Eiffel*.

S5- *la peinture du grand-père et la nature morte de Cézanne doivent encadrer la gravure chinoise*, demande mon petit frère.

S6- *et moi*, dis-je enfin, *je souhaite simplement que le tableau de Bernard Buffet n'avoisine pas la gravure japonaise*.

1) Par ailleurs Maman commence par placer la carte du Monde au dessus de la porte ; elle réussit finalement à accrocher tous les tableaux en faisant plaisir à tout le monde.
   a) Proposer une disposition satisfaisant les six souhaits.
   b) Y en a-t-il d'autres ? Si oui combien ?

2) Si c'est plutôt la peinture de Paul Klee que Maman avait choisi de placer au dessus de la porte, aurait-il été possible de disposer les tableaux ? Si oui, de combien de manières ?

3) Sans décider d'avance quel tableau est accroché au dessus de la porte, combien y a-t-il de dispositions possibles des tableaux respectant les six souhaits ?

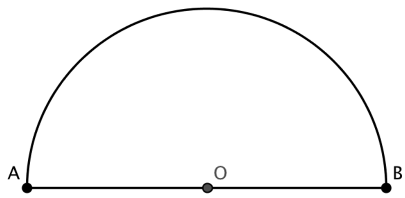
4) a) Il semble que le nombre de tableaux s'intercalant entre la carte du Monde et la peinture de Paul Klee soit indépendant de la disposition des tableaux. Est-ce vrai ?
   b) Est-ce vrai pour la peinture de Paul Klee et la peinture de grand-père ?
   c) On choisit deux tableaux au hasard parmi les dix. Qu'est-ce qui est le plus probable ? :
      • le nombre de tableaux s'intercalant entre eux ne dépend pas de la disposition ;
      • le nombre de tableaux s'intercalant entre eux dépend de la disposition.

<u>Exercice 5 (académique) :</u> ***Largeur constante*** *(candidats élèves de la série S.)*

On considère une courbe fermée du plan et un point M de cette courbe.
On peut alors toujours trouver un point N sur la courbe, pas forcément unique, pour lequel la distance MN - c'est-à-dire la longueur du segment [MN] - est maximale.
Cette valeur maximale est appelée « largeur en M » de la courbe ; on la note L(M).

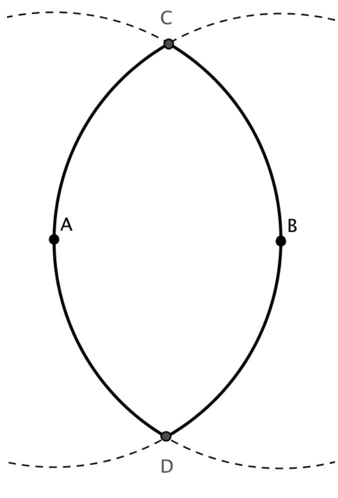
On dit qu'une courbe est à largeur constante si la largeur est la même en chacun de ses points.
Dans cet exercice on étudie quelques courbes fermées et on examine si leur largeur est constante.

1) Soit la courbe fermée constituée par un segment [AB] de longueur $2R$ et un demi-cercle de diamètre [AB] ; on note O le milieu de [AB].
a) Déterminer en fonction de R, la largeur en O de la courbe : L(O).
b) Déterminer en fonction de R, la largeur en A de la courbe : L(A).
c) Cette courbe est-elle à largeur constante ?

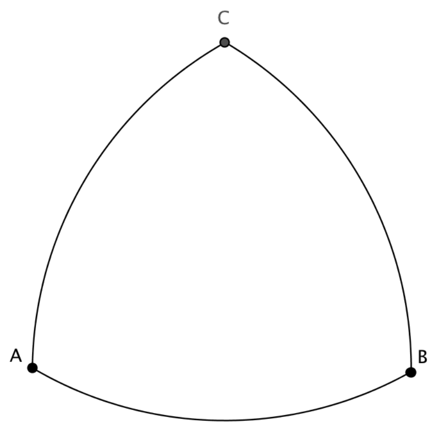


2) Un cercle de centre O et de rayon R est une courbe fermée. Est-elle à largeur constante ?

3) La courbe fermée ci-contre est constituée des deux arcs de cercle tracés en trait plein. L'un des deux a pour centre A, l'autre a pour centre B. Ils ont tous les deux pour rayon AB et pour extrémités les points C et D communs aux deux cercles.
Cette courbe est-elle à largeur constante ?



4) La courbe fermée ci-contre est appelée « triangle » de Reuleaux. Elle est construite à partir des sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté *d*. Elle est composée de trois arcs de cercle centrés respectivement en A, B et C et ayant pour extrémités les deux autres sommets du triangle équilatéral ABC.
a) M étant un point de l'arc BC autre que B et C, quel est le point du « triangle » de Reuleaux le plus éloigné de M ?
b) Le « triangle » de Reuleaux est-il une courbe à largeur constante ?



5) a) Construire sur la copie un « triangle » de Reuleaux de sommets A, B et C (on prendra 8 cm pour *d*) et les points d'intersection A', B' et C' des médiatrices des segments [BC], [AC] et [AB] avec les arcs de cercle composant le « triangle » de Reuleaux.
b) Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?

6) Un triangle équilatéral MNP étant donné, proposer au moins trois courbes fermées à largeur constante passant par ses trois sommets.

N.B. : Le « triangle » de Reuleaux doit son nom à l'ingénieur allemand Franz Reuleaux (1829-1905), qui fut au XIX^e siècle un pionnier du génie mécanique ; ce « triangle » est associé au moteur à piston rotatif dont le rotor, qui n'est pas cylindrique, est à la base un « triangle » de Reuleaux.