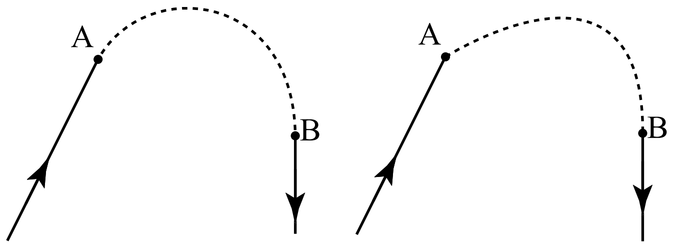
Exercice n^o 3

Enoncé

Virages

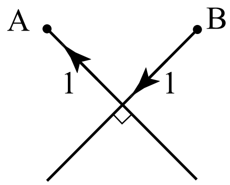
(candidats des séries S et STI)
L'objectif est de raccorder des portions de route rectilignes à sens unique par des virages en arcs de cercle ; bien sûr, pour être roulable, le trajet obtenu doit être « lissé », c'est-à-dire sans point anguleux !



Tracé valide — Tracé non valide

Les nombres indiqués sur certains des tracés proposés représentent des distances en centaines de mètres. Dans tous les tracés, on devra relier le point A au point B à l'aide d'arcs de cercle et uniquement d'arcs de cercle.

Exemple : le tracé T_1

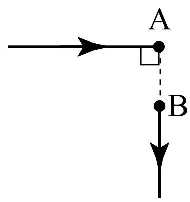


1. On essaie de tracer un virage joignant A à B à l'aide d'un seul arc de cercle.

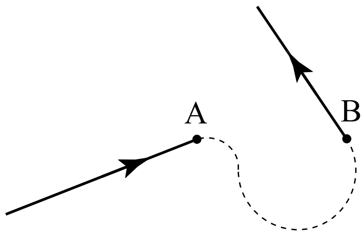
   (a) Décrire et représenter une solution convenable pour relier A à B dans T_1 et calculer la longueur du virage.

   (b)

   Existe-t-il un virage à un seul arc pour le tracé T_2 ci-contre ? (Justifier la réponse)

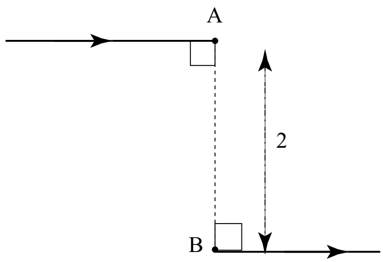
2. On utilise maintenant, si l'on veut, deux arcs de cercle contigüs ; mais bien sûr, le tracé doit toujours être « lissé » !



(a) Comment obtenir une solution à deux arcs contigüs et de même rayon pour le tracé T_2 ?

(b)

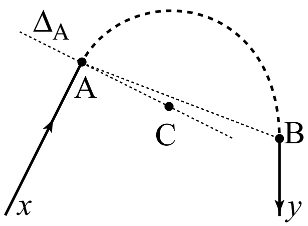
On considère enfin le tracé T_3 ci-contre : Existe-t-il une solution avec un seul arc de cercle ? Construire plusieurs solutions avec deux arcs contigüs et comparer les longueurs totales des virages.



Solution

Cas général

Remarque préliminaire : pour une solution dans les règles de l'art, une des diffcultés est de traduire sous une forme propice à la déduction les contraintes de tracé imposées. Il faut qu'il y ait tangence au point A de raccordement, donc le centre de l'arc doit être sur la droite Δ_A perpendiculaire en A à $[A_x)$, mais cela ne suffit pas. Au voisinage de A, l'arc doit être contenu dans le demi-plan de frontière Δ_A ne contenant pas la demi-droite. Plus simplement, si l'arc doit passer par le point B, il doit être contenu dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas les demi-droites. Bien sûr, on peut aussi se contenter de gérer dans les démonstrations les seules contraintes de contact et de prendre les informations visuellement sur une figure pour le reste, puisque l'énoncé lui-même communique les informations relatives aux tracés de cette façon.

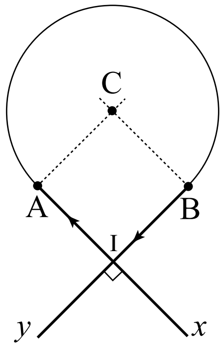


1. a) On procède par analyse-synthèse. ***Analyse :*** supposons le problème résolu ; le centre C de l'arc est donc à la fois sur Δ_A et Δ_B ; le quadrilatère

ACBI est un rectangle à deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un carré. Le rayon de l'arc est donc IA qui est connu. Enfin l'arc est situé dans le demi-plan de frontière (AB)ne contenant pas les demi-droites.

Synthèse : on trace les perpendiculaires Δ_{A} en A à $[\mathrm{A}x)$et Δ_{B} en B à $[\mathrm{B}y)$. Elles se coupent en C puisque parallèles à $[\mathrm{B}y)$et $[\mathrm{A}x)$. L'intersection du cercle de centre C, passant par A et du demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas les demi-droites $[\mathrm{A}x)$et $[\mathrm{B}y)$fournit le virage demandé.

La longueur du virage est alors $\dfrac{3}{4} \times 2\pi \times 1 = \dfrac{3\pi}{2}$



(b) Si un tel virage existait, le centre du cercle support serait à la fois sur la perpendiculaire en A à $[\mathrm{A}x)$, c'est-à-dire sur (AB) et sur la perpendiculaire en B à $[\mathrm{B}y)$, donc ce serait B ; comme ce cercle passe par B, il serait de rayon nul et comme il passe par A, on aurait A $=$ B ce qui n'est pas.

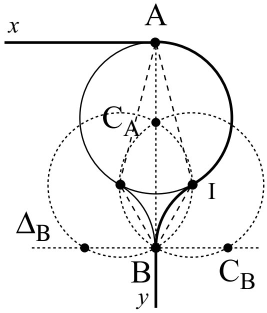
2. Une vraie difficulté est à nouveau de traduire les contraintes de tracé. Le contact entre les arcs impose une tangente commune et l'alignement des centres sur la normale au point de contact, mais un contact intérieur n'est pas à priori exclu. L'intérêt d'imposer des rayons de même longueur est le fait que le contact intérieur est alors exclu, ce qui permet d'apporter des précisions sur le positionnement du point I. Encore une fois, on peut se contenter de prendre les informations sur une figure. Procédons à nouveau par analyse-synthèse.

Analyse : supposons le problème résolu ; soient $\mathrm{C_A}$ (resp. $\mathrm{C_B}$) le centre du cercle support du virage partant de A (resp. B) ; puisque les deux cercles sont tangents et qu'ils ont même rayon, ils le sont extérieurement (sinon ils seraient confondus et on aurait une solution à un seul virage). Le point I est alors nécessairement dans la bande (ouverte) perpendiculaire au segment [A ;B].(sinon le point B serait à l'intérieur du cercle de centre $\mathrm{C_A}$).
Le point de contact I est donc le milieu de $[\mathrm{C_A C_B}]$et le triangle $\mathrm{BC_A C_B}$ est ainsi un demi-triangle équilatéral, et donc le triangle $\mathrm{BC_B I}$ est équilatéral ; on en déduit que $\widehat{y\mathrm{BI}} = \dfrac{5\pi}{6}$, ce qui fournit un premier lieu pour I.

Par ailleurs, l'angle inscrit $\widehat{\mathrm{C_A A I}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{BC_A I}} = \frac{\pi}{12}$, ce qui fournit un deuxième lieu pour le point I.
Il est aussi possible de passer par le calcul du rayon R des cercles : on a, en effet, en projetant sur (AB) :

$$R + 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = AB \text{ et donc } R = \frac{AB}{1+\sqrt{3}}.$$

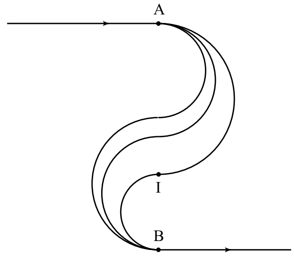
Synthèse : on trace les deux demi-droites d'origine A (resp. B) faisant avec [AB) (resp [BA)) un angle de $\frac{\pi}{12}$ (resp $\frac{\pi}{6}$) ; leurs intersections fournissent I (deux points) ; le cercle de centre I et passant par B coupe [AB] en $\mathrm{C_A}$ (un seul point) et Δ_{B} en $\mathrm{C_B}$ (deux points). Le cercle de centre $\mathrm{C_A}$ passant par A et le cercle de centre $\mathrm{C_B}$ passant par B passent par I puisque d'une part $\mathrm{BIC_B}$ est équilatéral (isocèle avec un angle $\frac{\pi}{3}$) et d'autre part $\mathrm{AC_A I}$ est isocèle $\left(\widehat{\mathrm{C_A IA}} = \widehat{\mathrm{BC_A I}} - \widehat{\mathrm{C_A AI}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}\right)$.



De plus, ils sont bien tangents en J puisque I est centre du cercle circonscrit au triangle rectangle $\mathrm{C_A B C_B}$. Avec ces cercles comme support, on obtient 4 doubles virages candidats, dont un seul convient.

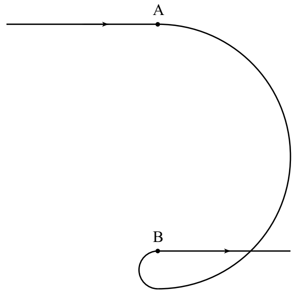
3. (a) La réponse est non car les deux demi-droites ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AB).

(b) Construire des solutions à deux arcs contigus est simple ; il suffit de choisir un point $\mathrm{I} \in]\mathrm{AB}]$ et de construire le demi-cercle de diamètre [AI] (resp. [IB]) situé dans le demi-plan de frontière (AB)ne contenant pas [Ax) (resp. [By).



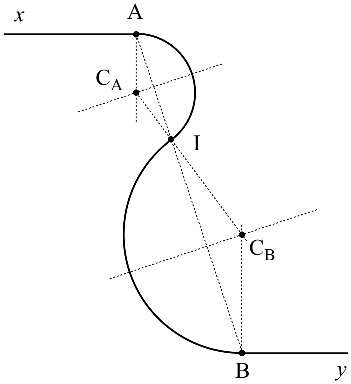
Le demi-périmètre d'un cercle étant proportionnel à son diamètre, et la somme des diamètres des différentes solutions étant constante égale à AB, la longueur des virages est constante, égales à $\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$ hectomètres.

Notons qu'on peut envisager d'autres solutions, dont la longueur n'est plus la même :



Raccordement double : cas parallèle

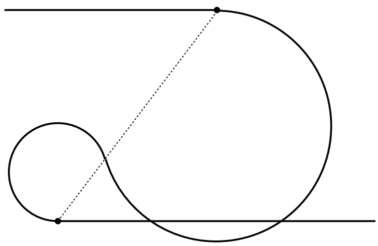
L'analyse est simple, il suffit de contempler.



Synthèse : on prend I sur [AB] ; la médiatrice de [AI] et la perpendiculaire en A à [Ax)se coupent en C_A. On définit de même C_B. Les cercles de centre C_A passant par A et de centre C_B passant par B sont tangents en I. Pour le

prouver, il suffit de considérer l'homothétie de centre I qui transforme A en B. Elle transforme $\mathrm{C_A}$ en $\mathrm{C_B}$ par conservations diverses donc le cercle de centre $\mathrm{C_A}$ en celui de centre $\mathrm{C_B}$. Avec ces cercles comme support, on obtient un tracé en choisissant les arcs dans les bons demi-plans de frontière (AB).
En choisissant Iau milieu de [AB], on aura un tracé à rayons égaux. Le point remarquable est la constance de la longueur du virage double, qui découle de l'invariance de la direction de ($\mathrm{C_A C_B}$) lorsque I décrit [AB], qui elle-même découle du fait que la distance entre les deux médiatrices est constante. On peut le voir aussi en projetant orthogonalement [AB] sur (Ax)et sur la direction orthogonale.

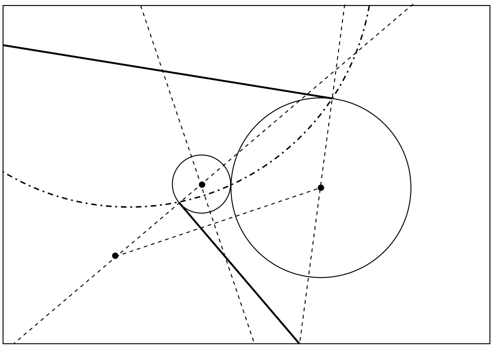
Le tracé obtenu (qui satisfait les conditions de lissité) peut être rejeté dans certains cas pour cause d'intersection avec les demi-droites [Ax)ou [By). Sous la contrainte supplémentaire des rayons égaux, il est facile de montrer que le problème n'aura pas de solution si le projeté orthogonal de A sur la demi-droite [By)est à une distance de B supérieure à $\dfrac{AB}{\sqrt{2}}$ (longueur du côté du carré de diagonale AB). Dans le cas sans solution à rayons égaux, il n'y en n'aura pas non plus à rayons inégaux puisque dans ce cas, un des rayons sera plus grand que dans le cas d'égalité des rayons.



Pour le fun : cas général des virages à deux arcs

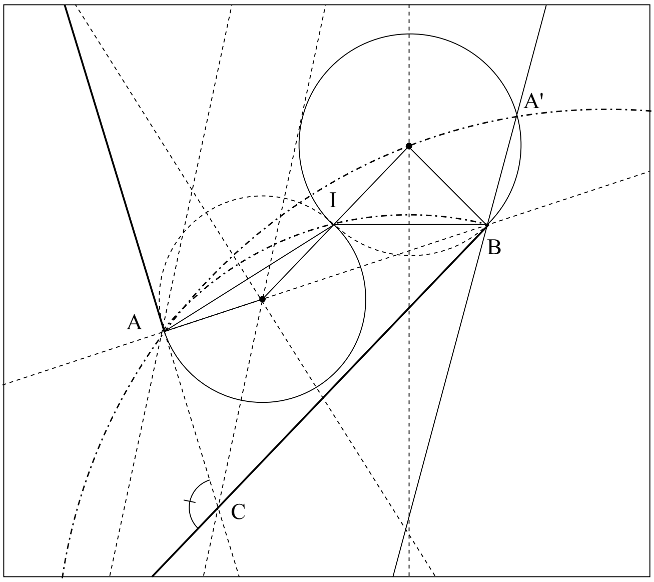
On prend les demi-droites en « position générale », c'est-à-dire à support sécants en C. On pose ([Ax) ;[By))$=\alpha$.

Il est assez facile de construire une solution à deux arcs. On trace un cercle C_A tangent en A à [Ax)et ne passant pas par B ; il reste alors à construire un cercle tangent en B à [By)et tangent au cercle C_A. La chose est classique (2 solutions, une avec contact extérieur l'autre avec contact intérieur si le point B est extérieur à C_A, deux avec contacts intérieurs sinon).



Cabri permet de conjecturer un lieu pour le point de contact I : un arc capable construit sur [A ; B]. Un examen des triangles isocèles AC_AI et IC_BB et l'introduction de A' intersection de (AI) et de C_B permet d'obtenir l'info : $\dfrac{\pi+\alpha}{2}$. On sait construire un tel arc. Un choix arbitraire de I permet alors d'achever autrement la construction d'un virage double. Merci, Cabri.

Du coup, on peut construire un virage à deux arcs de même rayon. L'idée est de construire A' symétrique de A par rapport à I par la méthode des deux lieux. A' est l'image de I par l'homothétie de centre et de rapport 2 (premier lieu), et par ailleurs (BA') est parallèle à l'une des bissectrices de ABC issue de C (toujours le triangle isocèle IC_BB et un angle au centre). C'est le deuxième lieu.



Palmarès

STI : JUNG Nicolas - Lycée Alexis Monteil - Rodez
ES : CUCU Aurélie - Lycée Villefranche de Rouergue
SMS : HART Friedrich - Lycée St Gabriel - Saint Afrique
STG : LAFFERRIERE Betty - Lycée Jacques Bossuet - Condom.
S :
Premier prix : COMBES Pascal - Lycée La Borde Basse - Castres
Deuxième prix : BROUSSARIE Renaud - Lycée Pierre Paul Riquet - St Orens
Troisième prix : FABRE benoît - Lycée privé Barral - Castres
Quatrième prix : HOA Karlotcha - Lycée privé Jeanne d'Arc - Figeac.