KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2011 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **E.** On remarque que les réponses A et B sont les mêmes, ainsi que C et D ; comme une seule réponse est exacte, ce ne peut être que E. On peut aussi effectuer la multiplication.

2. Réponse **B.** On trouve aisément un parcours le long duquel Jerry mange 11 fromages. Montrons qu'il ne peut pas faire mieux.
Quel que soit le chemin suivi, le nombre de fromages consommés est impair. En effet, le nombre de tunnels parcourus est pair (à la sortie, on a parcouru 3 tunnels vers l'avant et 3 vers la gauche ; et les détours ne changent pas la parité du nombre de tunnels traversés).
Le fromage situé au bout du tunnel sans issue, à gauche, est évidemment inaccessible. En entrant, Jerry mange le premier fromage. S'il continue tout droit, il crée des voies sans issue vers les deux fromages situés à droite et à gauche, donc 3 fromages ne seront pas atteints. S'il tourne, il crée une voie sans issue vers le fromage auquel il tourne le dos. Dans les deux cas, au moins 2 fromages ne seront pas atteints, au plus 12 seront mangés. Le score maximum, impair, ne peut donc être que 11.

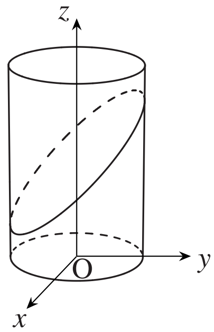
3. Réponse **A.** Lorsque deux segments sont adjacents, les nombres placés à leurs extrémités sont égaux (puisqu'on doit trouver la même somme en ajoutant chacun au nombre « central »). Les nombres aux extrémités d'un chemin de longueur paire sont donc égaux ; donc 1 doit être à la place de x.

4. Réponse **B.** $9^n + 9^n + 9^n = 3 \times (3^2)^n = 3 \times 3^{2n} = 3^{2n+1}$ vaut 3^{2011} si et seulement si $2n + 1 = 2011$, soit $n = 1005$.

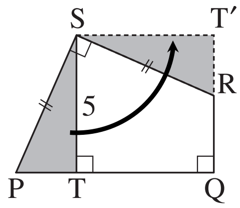
5. Réponse **C.** Les rues de Carole et de Benoît se coupent deux fois ; l'une d'elles n'est donc pas une droite. De même pour celles d'Ambre et de Carole. C'est donc celle de Carole qui n'est pas une droite.

6. Réponse **D.** Le score ne dépend pas de l'ordre dans lequel les points ont été obtenus. En rangeant ces points par ordre croissant, les possibilités de triplets de points sont :
111, 113, 117, 133, 137, 177, 333, 337, 377, 777,
avec les totaux respectifs
3, 5, 9, 7, 11, 15, 9, 13, 17, 21,
soient 9 totaux différents.

7. Réponse **C.** On choisit un repère de l'espace [Oxyz) tel que [Ox) soit parallèle au plan de coupe et, comme unité, le rayon du cylindre. Le cercle d'intersection est dans le plan $z = ay + b$, avec pour équations, $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$. Sur la bande déroulée, en prenant pour abscisse t, l'équation de la courbe est : $z = a\sin(t) + b$.
La courbe est une sinusoïde.

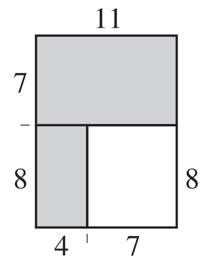


8. Réponse **C.** En faisant tourner de 90° le triangle SPT autour de son sommet S, le point P vient en R et le point T en T′ ; le quadrilatère alors formé, STQT′ est un carré, de côté 5. Son aire, égale à celle du quadrilatère PQRS, vaut 25.



9. Réponse **C.** André a écrit 1006 nombres au tableau. Les multiples de 3 inférieurs à 2011 sont 1×3, 2×3, …, 670×3 (soit 2010), dont la moitié sont impairs. Hélène en a donc effacés 335 et il en reste 1006 – 335, soit 671.

10. Réponse **D.** Si 3 rectangles n'ont pas une dimension en commun, alors, pour pouvoir les assembler en forme de grand rectangle, deux des rectangles doivent avoir un côté égal et la somme de leurs autres côtés égale à un côté du troisième rectangle.



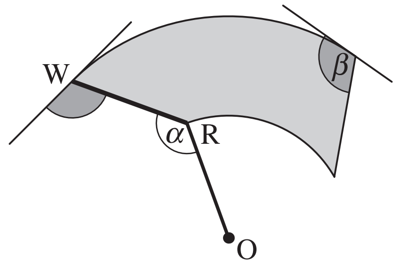
Avec les rectangles 7×11 et 4×8, une des dimensions du troisième rectangle doit être 4 ou 7 ou 8 ou 11.
Si c'est 4, l'autre dimension plus 8 égale 7 ou 11, donc égale 3.
Si c'est 7, l'autre dimension plus 11 égale 4 ou 8 : c'est impossible.
Si c'est 8, l'autre dimension plus 4 égale 7 ou 11, donc égale 3 ou 7.
Si c'est 11, l'autre dimension plus 7 égale 4 ou 8, donc égale 1.
Les seules tailles possibles du troisième rectangle sont donc 3×4, 3×8, 7×8 et 1×11 ; la plus grande est 7×8.

11. Réponse **C.** Si on place a dans la case du centre, les nombres placés dans les cases des coins sont $7-a$, $5-a$, $3-a$ et $5-a$; la somme des cinq nombres sera alors $20-3a$, soit un multiple de 3 plus 2. Le seul nombre possible, parmi les nombres proposés, est le nombre 11 (qui donne $a=3$ et 3, 4, 2, 0, 2 pour les cinq nombres).

12. Réponse **D.** Les graphes de f_1 et f_2 sont orientés dans l'autre sens. Les 6 autres fonctions ont leurs graphes contenus dans le dessin (tous obtenus, à partir de celui de f_5, par symétrie(s) d'axe Ox ou Oy).

13. Réponse **E.**
$$(a+1)bcde = abcde + bcde.$$
$$a(b+1)cde = abcde + acde.$$
$$ab(c+1)de = abcde + abde.$$
$$abc(d+1)e = abcde + abce.$$
$$abcd(e+1) = abcde + abcd.$$
Le plus petit des 5 résultats est celui où les facteurs du second terme sont les plus petits. C'est donc e qu'il faut augmenter de 1.

14. Réponse **B.** La tangente au cercle limitant le haut de la surface balayée (cercle de rayon OW) est orthogonale à (OW).
L'angle en W du triangle isocèle OWR vaut $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$.
L'angle obtus entre la tangente et (WR) vaut donc $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi-\alpha}{2}=\pi-\dfrac{\alpha}{2}$.



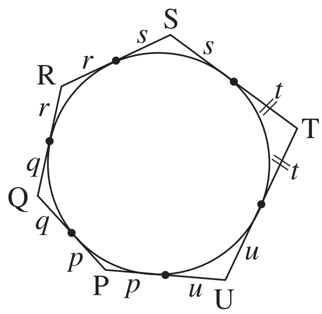
La rotation de l'essuie-glace amène cet angle sur β, donc $\beta=\pi-\dfrac{\alpha}{2}$.

15. Réponse **B.** Un nombre divisible par 6 et par 7 est divisible par 42.
Le nombre minimum de balles est donc :
10 avec un nombre divisible par 42 (donc par 6 et par 7)
+ 10 avec un nombre divisible par 7 mais pas par 6
+ 20 avec un nombre divisible par 6 mais pas par 7,
soit 40 balles.

16. Réponse **B.** D'après l'un des frères, il y a 5 filles dans le club ; avec Philippe et Christophe, cela fait au moins 7 membres. S'il y avait un autre garçon dans le club, alors dans un groupe de 3 garçons et 3 filles (soit 6 membres), il n'y aurait pas au moins 4 filles ; c'est donc que le nombre de membres est limité à 7.

17. Réponse **D.** 6 enfants ayant exactement un frère ou une sœur avec eux représentent 3 familles (de 2 enfants chacune).
9 enfants ayant exactement deux frères ou sœurs avec eux représentent 3 familles (de 3 enfants chacune).
4 enfants ayant exactement trois frères ou sœurs avec eux représentent 1 famille (de 4 enfants).
Cela fait, au total, $3+3+1+(48-6-9-4)$, soit 36 familles.

18. Réponse **D.** Les longueurs des segments de tangente issus d'un point hors d'un cercle sont égales.
On a donc :
$PQ + RS + TU = QR + ST + UP$,
chacun des membres de l'égalité valant $p+q+r+s+t+u$ en appelant p, q, r, s, t et u les longueurs des segments issus respectivement de P, Q, R, S, T et U.



La longueur du côté [UP] est donc telle que $4+6+8=5+7+UP$.
Et $UP=6$.

19. Réponse **E.** La parabole est tournée vers les ordonnées positives, donc $a>0$ (A).
L'abscisse de son minimum ($-b/2a$) est plus grande que 1, donc positive ; donc $b<0$ (B).
La parabole passe par le point $(1\,;-10)$ et donc $a+b+c=-10$ (C).
ax^2+bx+c est négatif pour $x=1$; donc l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux racines encadrant le nombre 1 ; et donc $b^2>4ac$ (D).
C'est donc E qui peut être faux ; par exemple pour $y=x^2-11x$.

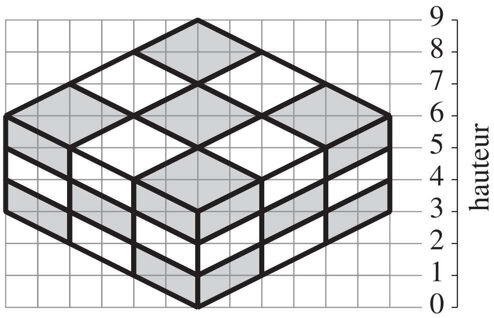
20. Réponse **D.** Soit x le poids maximal non taxé, et p le taux de la taxe par kg au-dessus de x. Alors $p(60-2x)=30$ et $p(60-x)=105$,
d'où : $30(60-x)=105(60-2x)$, $210x-30x=(105-30)\times 60$,
$180x=75\times 60$, $x=25$.

21. Réponse **B.** Quand on lance n dés, il y a 6^n résultats ordonnés possibles.
Aucun 6 n'apparaît dans 5^n résultats.
Un seul 6 apparaît dans $n \times 5^{n-1}$ résultats (n choix pour le dé faisant 6 et $n-1$ dés faisant un autre nombre);
Ces deux nombres de possibilités sont égaux pour $n = 5$.

22. Réponse **B.** Après simplification, la fraction donnée est $\frac{NGROU^2}{LA}$.
La plus petite valeur possible de cette fraction est $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1^2}{9 \times 8} = \frac{5}{3}$.
La plus petite valeur entière possible de cette fraction est donc 2.
Et on peut obtenir 2 avec $\frac{6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1^2}{9 \times 8}$.

23. Réponse **A.** Les données nous disent que $(x+1)^3 - x^3$ vaut 217, le côté x du petit cube étant mesuré en dm (un dm^3 vaut un litre).
On a donc $3x^2 + 3x + 1 = 217$, soit $x(x+1) = 216/3 = 72$, qui vaut 8×9.
Donc $x = 8$ dm et le petit cube contient $8 \times 8 \times 8$ soit 512 litres.

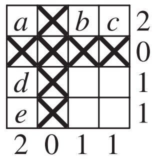
24. Réponse **D.**
Tenons le cube de manière qu'une diagonale soit verticale. Toutes les arêtes de tous les petits cubes font alors le même angle avec un plan horizontal.



Choisissons comme unité la différence de hauteur (commune) de deux sommets reliés par une arête d'un petit cube. La hauteur totale du cube est alors 9, et la hauteur de chaque petit cube est 3.
En fait la hauteur du coin supérieur d'un petit cube est égale au nombre d'arêtes de petits cubes qu'il faut parcourir pour l'atteindre à partir du coin tout en bas.
Il y a 1 petit cube dont le coin supérieur est à la hauteur 9, et ce petit cube est entre les hauteurs 6 et 9.
Il y a 3 petits cubes dont le coin supérieur est à la hauteur 8, et ces petits cubes sont entre les hauteurs 5 et 8.
*Il y a 6 petits cubes dont le coin supérieur est à la hauteur 7, et ces petits cubes sont entre les hauteurs 4 et 7.
*Il y a 7 petits cubes (avec le cube central) dont le coin supérieur est à la hauteur 6, et ces petits cubes sont entre les hauteurs 3 et 6.
*Il y a 6 petits cubes dont le coin supérieur est à la hauteur 5, et ces petits cubes sont entre les hauteurs 2 et 5.
Il y a 3 petits cubes dont le coin supérieur est à la hauteur 4, et ces petits cubes sont entre les hauteurs 1 et 4.

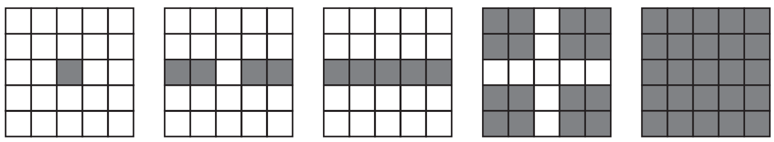
Il y a 1 petit cube dont le coin supérieur est à la hauteur 3, et ce petit cube est entre les hauteurs 3 et 0.
Seuls les 6+7+6 petits cubes (soit 19) signalés par une * sont coupés par le plan de hauteur 9/2 (soit 4,5).

25. Réponse **5.** Soit la case *a* est noire, et alors il faut aussi noircir…



… soit *b*, soit *c* (2 possibilités),
… et soit *d*, soit *e* (2 possibilités),
et toute la grille est déterminée (avec dans chacun de ces 4 cas, une seule case noire parmi les quatre cases en bas à droite).
Donc, avec *a* noire, 4 grilles sont possibles.
Soit la case *a* n'est pas noire, et alors il faut noircir les cases *b*, *c*, *d*, *e*, et alors toute la grille est déterminée (1 seule grille possible).
Finalement, il y a, $4+1$, soit 5 grilles possibles.

26. Réponse **9.**
Si n est solution, $9-n$ l'est aussi (coloriage complémentaire). $n=9$ est solution (colorier toutes les cases), $n=1$ l'est (ne colorier que la case centrale) donc $n=8$ l'est (colorier toutes les cases sauf la case centrale). On obtient $n=3$ en coloriant la ligne centrale, et $n=2$ en coloriant la ligne centrale sauf la case centrale. En coloriant les cases de la colonne et de la ligne centrales, on obtient $n=5$. On conclut que tout entier n entre 1 et 9 est solution.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$ $n = 9$