KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 5 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2010 - Corrigé de l'épreuve Étudiants

1. Réponse **C.** Dans le tableau, chacune des 10 premières colonnes est de la forme : $x, x+10$. Donc pour avoir des lignes de même somme, on doit avoir $\Delta = 2010 - 100$, soit $\Delta = 1910$.

2. Réponse **B.** Il faut faire glisser trois barres : celle de gauche, verticalement vers le bas ; et les deux horizontales, en haut, vers la gauche.

3. Réponse **D.** L'ascenseur met 3 secondes par étage donc 15 secondes pour les 5 étages séparant le 1^{er} du 6^{e}.

4. Réponse **D.** Le rapport des aires étant 4, le rapport des longueurs des côtés est 2 et donc le rapport des volumes est 8. On doit donc aller 8 fois à la source (en remplissant entièrement le petit cube).

5. Réponse **D.** Logiquement la négation de « pour tout x, P(x) est vrai » (*tous les employés ont au moins 25 ans*) est « il existe x tel que nonP(x) est vrai » (*un employé de l'entreprise a moins de 25 ans*).

6. Réponse **B.** La somme $1 + 3 + \ldots + 17$ vaut 9×9.

7. Réponse **D.** Le triangle étant rectangle et M étant le milieu de l'hypoténuse, on a MR = MS = MT. Le triangle MTR est donc isocèle et $\widehat{MTR} = \widehat{TRM}$. Comme $\widehat{MTR} + \widehat{TRM} = \widehat{SMT}$, Si $\widehat{TRM} = 60°$, alors $\widehat{SMT} = 120°$.

8. Réponse **D.** Le chiffre des unités du nombre est nécessairement 5 et les deux autres chiffres peuvent être choisis parmi 1, 3, 5, 7, 9 de manière quelconque. Cela fait 5×5, soit 25 nombres au total.

9. Réponse **B.** Pour $2 \leqslant a < b$, on a $a+b < ab$; à partir de 2, la plus grande valeur est obtenue en remplaçant ★ par ×.
Par contre $1 \times a < 1+a$.
L'expression donnant la plus grande valeur est :

$$1+2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10.$$

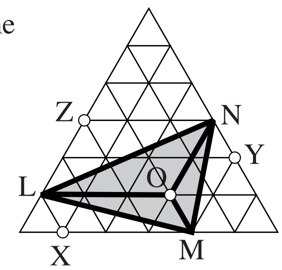
10. Réponse **A.** Les demi-cercles centrés aux sommets du carré ont pour rayon $\sqrt{2}$, donc le rayon d'un cercle gris est $\sqrt{2}-1$.
Et l'aire totale grisée est $4\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ soit $4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$.

11. Réponse **E.** Si un prisme a une base à n côtés, le nombre de ses arêtes est $3n$. Le seul multiple de 3 proposé est 2013.

12. Réponse **B.** Au départ la somme des 10 entiers écrits au tableau est 55. Quels que soient les nombres choisis, on effectue 9 opérations qui diminuent chacune la somme de 1.
$55-9=46$. On trouve toujours 46.

13. Réponse **A.** On sait que le sac contient au moins : 2 balles rouges, une bleue et une verte.
Si le sac contient une deuxième balle bleue, alors un tirage possible est : 2 rouges, 2 bleues, 1 verte ; tirage où aucune couleur n'est présente 3 fois. Donc le nombre de balles bleues est nécessairement 1.
(Remarque : de même, il n'y a qu'une balle verte ; et il y a au moins 3 balles rouges dans le sac.)

14. Réponse **A.** Lorsqu'un parallélogramme est coupé en deux triangles par une diagonale, l'aire de chacun de ces triangles est la moitié de l'aire du parallélogramme.
Avec les points indiqués sur la figure, l'aire du triangle LMN se calcule à partir de celle des parallélogrammes OLXM, OMYN et ONZL :



$$\text{Aire(LMN)} = \frac{1}{2}(6+4+12) = 11.$$

15. Réponse **C.** 5 divise $2x$ et 5 est premier avec 2 donc 5 divise x et l'on a $x=5x'$. Alors $y=2x'$ et $x+y=7x'$.
La somme $x+y$ est donc un multiple de 7 et le seul multiple de 7 proposé est 2009 ($2009=7\times287$).
Notons que $x=1435$ et $y=574$ vérifient $2x=2870=5y$ et $x+y=2009$.

16. Réponse **A.** On effectue une partition du plan en quatre quarts de plan :

- $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$: $\left(x-|x|\right)^2+\left(y-|y|\right)^2=0$;
- $x \geqslant 0$ et $y < 0$: $\left(x-|x|\right)^2+\left(y-|y|\right)^2=4y^2$;
- $x < 0$ et $y \geqslant 0$: $\left(x-|x|\right)^2+\left(y-|y|\right)^2=4x^2$;

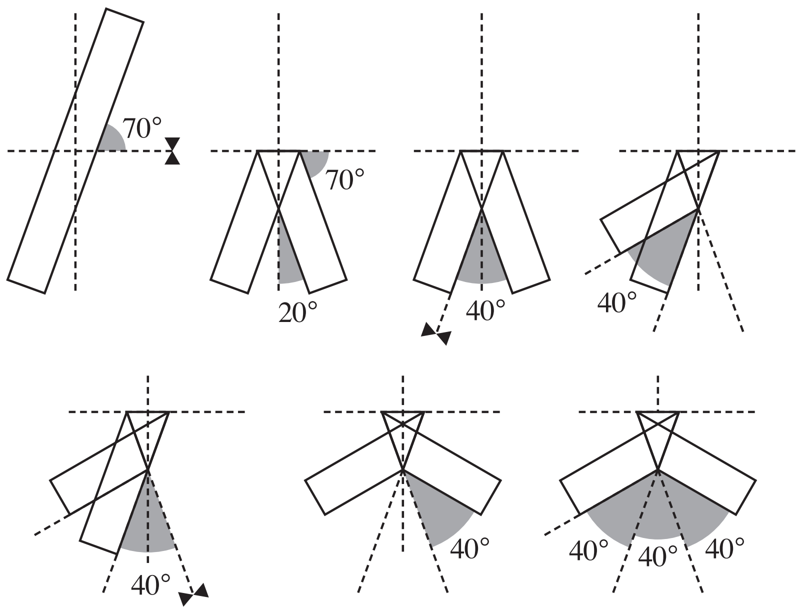
• $x < 0$ et $y < 0$: $\left(x - |x|\right)^2 + \left(y - |y|\right)^2 = 4x^2 + 4y^2$.
Les solutions de l'équation sont pour chaque quart de plan :
• $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$: pas de solution ;
• $x \geqslant 0$ et $y < 0$: les solutions de $y = -1$;
• $x < 0$ et $y \geqslant 0$: les solutions de $x = -1$;
• $x < 0$ et $y < 0$: les solutions de $x^2 + y^2 = 1$.

17. Réponse **B.** Si P est un sommet du polygone, les deux autres sommets, pour définir un triangle rectangle, sont diamétralement opposés. Il y a 7 paires de sommets diamétralement opposés qui peuvent chacun former des triangles rectangles avec les 12 autres sommets du polygone. $7 \times 12 = 84$.

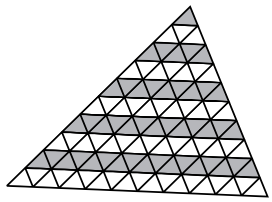
18. Réponse **E.** La raison de cette progression géométrique est :
$\dfrac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \dfrac{7^{1/6}}{7^{1/3}} = 7^{-1/6}$, qui vaut aussi $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = 7^{(1/3-1/2)}$.
Le terme suivant est donc $7^{1/6} \times 7^{-1/6}$, soit 1.

19. Réponse **A.** On suppose $x \leqslant y$.
$(x\,;y)$ est un couple d'entiers dont le produit fait 105. Or $105 = 3 \times 5 \times 7$.
Cela donne 4 couples $(x\,;y)$ possibles : $(1\,;105)$, $(3\,;35)$, $(5\,;21)$ et $(7\,;15)$.
Or, x, y et 13 étant les côtés d'un triangle, on a $y \leqslant x + 13$.
Donc $x = 7$ et $y = 15$.
Et le périmètre du triangle est $7 + 13 + 15$, soit 35.

20. Réponse **C.** Suivons les étapes du pliage en s'orientant par rapport à la verticale :



Donc si $\alpha = 70°$, alors $\beta = 120°$.
(En fait $\beta = 6 \times (90 - \alpha)$ pour $60° \leqslant \alpha < 90°$.)



21. Réponse **C.** En dessinant 9 segments parallèles au côté gauche et 9 segments parallèles au côté droit, on obtient un « trillage » formé de $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$, soit 100 petits triangles.
On compte alors $1+5+9+13+17$, soit 45 petits triangles grisés ; qui représentent donc 45% du total.

22. Réponse **D.**
Listons les cas possibles (voir ci-contre).
Il y a 15 cas équiprobables dont 8 avec au moins un 2 lors d'un lancer.
La probabilité cherchée est donc : 8/15.

	3^e lancer	*2^e lancer*	*1er lancer*
♥	**2**	**1**	**1**
♥	**3**	**1**	**2**
♥	**3**	**2**	**1**
	4	**1**	**3**
♥	**4**	**2**	**2**
	4	**3**	**1**
	5	**1**	**4**
♥	**5**	**2**	**3**
♥	**5**	**3**	**2**
	5	**4**	**1**
	6	**1**	**5**
♥	**6**	**2**	**4**
	6	**3**	**3**
♥	**6**	**4**	**2**
	6	**5**	**1**

23. Réponse **A.** Pour $x=6$, on a $2f(6)+3f(335)=30$.
Et pour $x=335$, $2f(335)+3f(6)=1675$.
D'où : $3\times 3f(6) - 2\times 2f(6) = (3\times 1675) - (2\times 30)$.
Et, en divisant par 5, $f(6)=(3\times 335)-(2\times 6) = 1005-12 = 993$.

24. Réponse **E.** Les bandes alternant, le nombre de bandes noires est égal au nombre de bandes blanches augmenté de 1. Le nombre total de bandes est donc impair.
La somme des largeurs de toutes les bandes est 12, chaque bande étant de largeur 1 ou 2 : on considère donc les décompositions de 12 sous forme d'une somme d'un nombre impair de 1 et de 2.
Il n'y a que trois décompositions possibles : 11 bandes avec 1 de largeur 2 et 10 de largeur 1 (cas *a*), 9 bandes avec 3 de 2 et 6 de 1 (cas *b*), 7 bandes avec 5 de 2 et 2 de 1 (cas *c*). Dans chaque cas le coloriage est unique puisqu'on part de gauche d'une bande noire et qu'on alterne les couleurs.

- cas *a*. Il y a 11 façons de placer la bande de largeur 2 : cela fait 11 codes-barres différents.
- cas *b*. Il y a $\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2}$ façons de placer les 3 bandes de largeur 2 : cela fait 84 codes-barres différents.
- cas *c*. Il y a $\dfrac{7\times 6}{2}$ façons de placer les 2 bandes de largeur 1 : cela fait 21 codes-barres différents.

$11+84+21=116$. Au total, il y a 116 codes-barres différents.

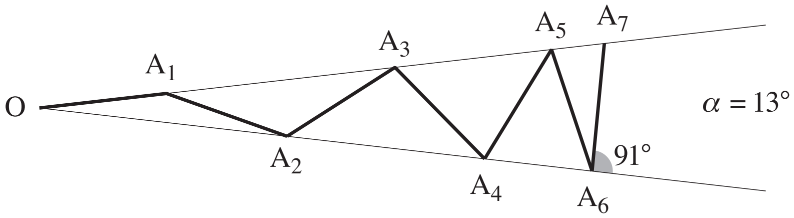
25. Réponse **7.**

Les triangles successifs OA_1A_2, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$ … sont isocèles et leurs angles à la base sont successivement α, 2α, 3α, etc.

La construction cesse d'être possible (sans recouper le segment précédent) à la première valeur de n telle que $n\alpha$ dépasse 90°.

Le premier n tel que $13n > 90$ est 7.

On pourra dessiner 6 triangles, le dernier étant $A_5A_6A_7$, ce qui donne 7 segments tracés dans le processus du zigzag.



26. Réponse **6.**

• 1 ne peut être marqué car il n'a pas de diviseur plus grand que 1.

• Un nombre premier ne peut être marqué car alors les deux entiers qui ne lui sont pas adjacents aurait ce nombre premier comme diviseur commun, tout en étant adjacents. Ce qui exclut 2, 3, 5 et 7.

• De même, une puissance de nombre premier ne peut figurer car les deux entiers qui ne lui sont pas adjacents auraient ce nombre premier comme diviseur commun. Ce qui exclut 4, 8 et 9.

Reste 6 qui peut être un des entiers marqués comme sur l'exemple donné.