KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 5 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2009 - Corrigé de l'épreuve Étudiants

1. Réponse **B.** 15 est le seul multiple de 3 dans les propositions.

2. Réponse **B.** $2009 = 41 \times 49$. Donc $\dfrac{2009}{41} + \dfrac{2009}{49} = 49 + 41 = 90$.

3. Réponse **D.** L'opérateur ✇ appliqué à 5 donne $3 \times 5 = 15$; et appliqué à 15 donne $3 \times 15 = 45$.

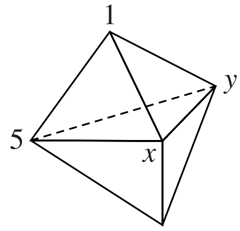
4. Réponse **E.** La spirale est formée de 4 demi-cercles de rayons successifs 1, 2, 4, et 8, donc de longueur π, 2π, 4π, 8π. Elle a donc pour longueur 15π.

5. Réponse **A.** Pour tout entier n positif, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
La plus grande valeur de cette différence correspond à la plus petite valeur du dénominateur, donc est $\sqrt{2} - \sqrt{1}$.

6. Réponse **E.** Il y a au départ 2 poissons bleus et 198 jaunes.
Pour que ces 2 poissons bleus représentent 2% de l'effectif, il faut que celui-ci soit 100, donc qu'il y ait 98 poissons jaunes. Il faut donc enlever 100 poissons jaunes.

7. Réponse **C.** Le côté du grand carré est égal à la diagonale du petit (tous deux égaux au diamètre du cercle). Le rapport entre les côtés des deux carrés est donc $\sqrt{2}$; et le rapport de leurs aires est 2.

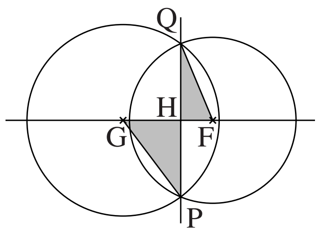
8. Réponse **C.** Les nombres x et y écrits aux 2 sommets restants du plan médian vérifient $1 + 5 + x = 1 + 5 + y = 1 + x + y$.
Et donc $x = y = 5$.
Le troisième sommet porte donc un 1 et la somme totale est $1 + 3 \times 5 + 1$, soit 17.

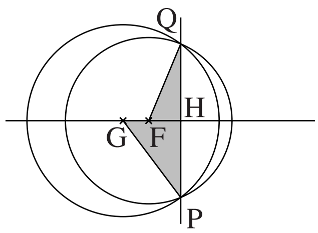


9. Réponse **D.** Les triangles JQP, KRS et LTU sont images de JKL par symétrie centrale : ils ont même aire que JKL. Les triangles JTS, KPU et LRQ ont des côtés doubles donc une aire quadruple de celle de JKL. La somme des aires de ces 6 triangles est égale à l’aire de PQRSTU augmentée de deux fois l’aire de JKL.
Aire(JKL) = 1. Donc Aire(PQRSTU) $= (3 \times 4) + (3 \times 1) - 2 = 13$.

10. Réponse **D.** 3 chaussettes ont un trou. Il est possible de tirer 6 chaussettes sans paire utilisable : 3 bleues trouées et 3 trois sans trou de couleurs différentes (une bleue, une rouge et une blanche).
En tirant 7 chaussettes, il y en a forcément 4 non trouées, donc 2 non trouées de la même couleur.

11. Réponse **D.** (FG) est axe de symétrie de la figure donc (PQ)$\perp$(FG).
Par Pythagore, dans le triangle rectangle FHP, on a $FH^2 = FP^2 - PH^2$, soit $FH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
On a aussi, dans GHP,
$GH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
Il existe 2 configurations possibles, l’une pour laquelle $FG = FH + HG = 14$, l’autre pour laquelle $FG = GH - FH = 4$.
Seul 14 figure dans les réponses proposées.



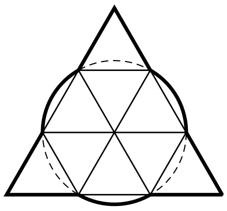


12. Réponse **D.** Les 3 premières lignes de la grille sont entièrement déterminées (on commence par P en 3^e ligne et 2^e colonne et on remplit de proche en proche). Il y a alors 2 choix possibles, R ou S, pour débuter la 4^e ligne, qui aboutissent à R ou S possibles sur la case grisée (voir figure ci-contre où l’on a rempli la 5^e ligne, elle aussi entièrement déterminée).

P	Q	P	Q	P
R	S	R	S	R
Q	**P**	Q	P	Q
Q	P	Q	P	Q

13. Réponse **B.** Soit n le nombre de kangourous clairs, et $k_1, k_2, \ldots k_n$ leurs tailles dans l'ordre. Chacun étant plus grand qu'un nombre différent de kangourous sombres, tous les kangourous clairs ont des tailles différentes : $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n$.
Plaçons maintenant les kangourous sombres. Il y en a 8 de taille inférieure à k_1 et il y a un kangourou sombre entre k_1 et k_2, un entre k_2 et k_3 et ainsi de suite jusqu'à k_n. Il y a donc $8+(n-1)$ kangourous sombres.
Et $2009 = n + 8 + (n-1)$, soit $n = 1001$. Il y a 1001 kangourous clairs.

14. Réponse **B.** La figure ci-contre montre que le périmètre est constitué de 6 segments de longueur 1 et de 3 arcs de cercle qui, ensemble, font un demi-cercle.
Le périmètre cherché vaut donc $6 + \pi$.



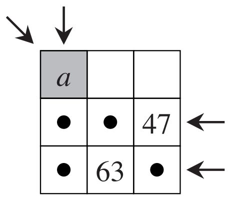
15. Réponse **C.** Si la première personne dit vrai, alors la 2^e^ est un menteur ainsi que la 3^e^ qui affirmant que, devant elle, la 2^e^ ment dirait la vérité : c'est impossible. Donc la première personne est un menteur.
Et la 2^e^ dit la vérité, la 3^e^ ment, la 4^e^ dit la vérité... Une personne sur deux ment (toutes celles de rang impair) et il y a 13 menteurs sur ces 25 personnes.

16. Réponse **B.** Si l'on prend la courbe symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses, on constate qu'il s'agit de la représentation graphique de g, translatée de 2 parallèlement à l'axe des abscisses. On a donc, pour tout x, $g(x-2) = -f(x)$.

17. Réponse **E.** La somme cherchée en partant du dernier terme s'écrit : $2009^2 - 2008^2 + 2007^2 - \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.
En groupant les termes deux à deux (sauf 1^2), on groupe $(n)^2 - (n-1)^2$ qui est égal à $(n) + (n-1)$. La somme cherchée est donc la somme des entiers jusqu'à 2009. Elle vaut la moitié de 2009×2010 et son dernier chiffre est 5.

18. Réponse **C.** On note C_n l'ensemble des participants n'ayant pas résolu le problème numéro n. C_1 a 10 éléments, C_2 a 15 éléments, C_3 a 20 éléments et C_4 a 30 éléments.
$C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ est l'ensemble des participants n'ayant résolu aucun problème. Cet ensemble a au plus 75 éléments (dans le cas où les C_n sont tous disjoints).
Il y a donc au moins 25 participants ayant résolu tous les problèmes.

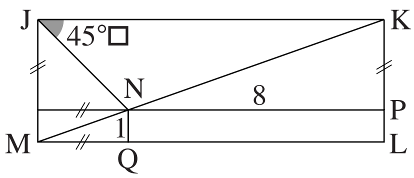
19. Réponse **C.** Soit S la somme commune à chaque ligne, colonne et diagonale et a le nombre cherché. La somme des 4 points marqués sur la figure ci-contre vaut : $2S-47-63$ (somme des 2e et 3e lignes) et $2S-2a$ (somme de la 1re colonne et d'une diagonale). D'où $2a=47+63$ et $a=55$.



20. Réponse **C.** Comme il y a 1 de différence entre deux chiffres voisins, le seul voisin possible pour 1, ou pour 3, est 2.
Si le nombre commence par 2, il est de la forme 2-2-2-2-2-, où les tirets sont des 1 ou des 3 : il y a 2^5, soit 32 tels nombres.
S'il ne commence par 2, il est de la forme -2-2-2-2-2, où les tirets sont des 1 ou des 3 : il y a aussi 2^5 tels nombres.
Au total cela fait $32+32$, soit 64 nombres.

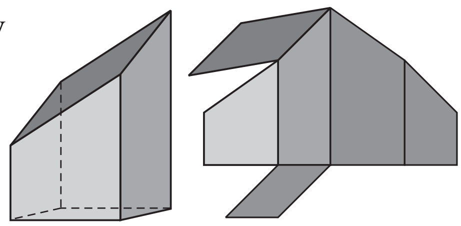
21. Réponse **B.** $a=k(b+c)$, $b=k(c+a)$, $c=k(a+b)$, donc : $a+b+c=2k(a+b+c)$.
Si $a+b+c=0$ (ce qui peut se produire avec par exemple $a=b=1$ et $c=-2$), alors $k=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{-b-c}{b+c}=-1$.
Si $a+b+c\neq 0$, alors $k=\dfrac{1}{2}$.
Il y a donc 2 valeurs possibles pour k : -1 et $\dfrac{1}{2}$.

22. Réponse **A.** Si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de N sur (KL) et sur (ML), on a, par Thalès : $\dfrac{\text{PK}}{8}=\dfrac{1}{\text{QM}}$ soit $\text{PK}\times\text{QM}=8$.



Comme N est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{MJK}}$, N est à égale distance de (JM) et de (JK). Ce qui entraîne que $\text{QM}=\text{PK}$.
Donc $\text{QM}^2=8$, $\text{QM}=2\sqrt{2}$ et $\text{LM}=8+2\sqrt{2}$.

23. Réponse **D.** La figure IV peut représenter le solide vu de la gauche.
Nous donnons ci-contre une vue en perspective et un patron pour ce solide.



24. Réponse **E.** Marie trouvant son siège occupé, il y a deux possibilités : ou c'est Léa qui est à la place de Marie (probabilité : 1/3) ou alors c'est une des deux autres sœurs (probabilité : 2/3). Dans ce dernier cas, celle qui se lève soit déplacera directement Léa (probabilité : 1/3) soit déplacera l'autre sœur (probabilité : 1/3) qui, elle, prendra la place vide ou déplacera Léa (probabilité 1/2).

Finalement la probabilité que Léa se lève est : $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$.

(Remarque : Léa peut ne pas se lever sans être à la place lui étant attribuée.)

25. Réponse **2.**

Pour un tel polygone, les n angles sont $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots n\alpha$.

La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est $(n-2)\pi$,

donc $\alpha = \frac{2(n-2)\pi}{n(n+1)}$.

Le plus grand angle de ce polygone est $n\alpha$. Comme le polygone est convexe : $n\alpha < \pi$ d'où $\frac{2(n-2)}{n+1} < 1$; ce qui donne $n < 5$.

Donc seules 2 valeurs de n conviennent :

$n=3$ et le polygone est un triangle (rectangle) d'angles $\pi/2, \pi/3, \pi/6$

$n=4$ et le polygone est un quadrilatère d'angles $\pi/5, 2\pi/5, 3\pi/5$ et $4\pi/5$

(remarque : plusieurs formes de quadrilatères sont alors possibles).

26. Réponse **1.**

Considérons la suite (r_n) où r_n est le reste de la division euclidienne de a_n par 7. r_{n+2}, est aussi le reste de la division euclidienne de $r_n+(r_{n+1})^2$ par 7.

Calculons : $r_0=a_0=1$ $\qquad r_1=a_1=2$

$2^2+1=5,\ r_2=5 \qquad 5^2+2=27,\ r_3=6$

$6^2+5=41,\ r_4=6 \qquad 6^2+6=42,\ r_5=0$

$0^2+6=6,\ r_6=6 \qquad 6^2+0=36,\ r_7=1$

$1^2+6=7,\ r_8=0 \qquad 0^2+1=1,\ r_9=1$

$1^2+0=1,\ r_{10}=1 \qquad 1^2+1=2,\ r_{11}=2.$

$r_{10}=r_0$ et $r_{11}=r_1$; donc la suite (r_n), qui est récurrente d'ordre 2, est périodique de période 10.

Et $r_{2009}=r_9=1$.