1. Réponse **A.** Le trajet suivi par la première voiture montre que seuls A et E peuvent convenir. En examinant, par exemple, le trajet suivi par la troisième voiture, on constate que seul A convient.

2. Réponse **A.** Soient a, b et c les nombres de billes d'Anna, Béa et Clara au début. Par hypothèse, $a+b+c=30$.
Anna donne 2 billes et en reçoit 4 : elle en a donc $a+2$ à la fin. Et, à la fin, Béa en a $b-3$ et Clara $c+1$.
On a : $a+2=b-3=c+1$.
En substituant $b=a+5$ et $c=a+1$, on trouve $3a+6=30$, soit $a=8$.

3. Réponse **D.**
Pour écrire les 9 nombres de 1 à 9, on utilise 9 chiffres.
Pour écrire les 10 nombres de 10 à 19, on utilise 10×2 chiffres soit 20 chiffres. On utilise donc 9×20 chiffres pour écrire les nombres de 10 à 99, soit 180 chiffres.
On utilise 3 chiffres pour écrire le nombre 100.
On utilise donc 9 + 180 + 3 chiffres, soit 192 chiffres, pour écrire tous les nombres de 1 à 100.

4. Réponse **C.** Désignant par x la distance cherchée, le théorème de Pythagore conduit à : $x^2=(9-x)^2+9$, d'où $x=5$.

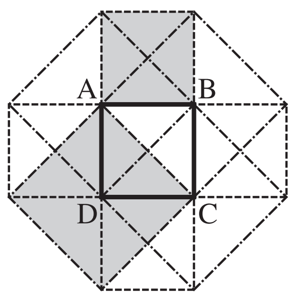
5. Réponse **D.** Appelons R le rayon des cercles. Le périmètre du petit rectangle est $12R$; et comme ce périmètre est 60 cm, on a donc $R=5$ cm.
Le périmètre du grand rectangle est $20R$, soit 20×5 cm et donc 100 cm.

6. Réponse **B.** Les 5 questions de la première série, sur lesquelles plane un doute, doivent représenter, au plus, 20% du total.
Il doit donc y avoir au moins 25 questions.

7. Réponse **A.** W convient (rotation autour d'un axe vertical).
X ne convient pas (symétrie par rapport à un plan vertical).
Y convient (rotation autour d'un axe horizontal).
Z convient (symétrie par rapport à un plan horizontal).

8. Réponse **E.** La longueur du premier chemin est la moitié de la circonférence du cercle de diamètre AE, donc $\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{AE}$.
La longueur du second est la somme $\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{AD}+\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{DE}$.
Et comme $\mathrm{AE}=\mathrm{AD}+\mathrm{DE}$, les deux longueurs sont égales et le rapport vaut 1:1.

9. Réponse **C.** Si ABCD désigne le carré initial, il y a deux types de carrés ayant deux sommets communs :
ceux de côté de type [AB] et ceux de côté de type [AC].
(Voir figure ci-contre.)
L'aire couverte est donc 7.



10. Réponse **B.** $2^{x+1} + 2^x = (2+1) \times 2^x = 3 \times 2^x$.
Et $3^{y+2} - 3^y = (9-1) \times 3^y = 8 \times 3^y$.
L'égalité s'écrit donc $2^x \times 3 = 2^3 \times 3^y$.
L'unicité de la décomposition en facteurs premiers implique que $x = 3$ et $y = 1$.

11. Réponse **E.** Comme $\cos(180° - x) = -\cos x$, les termes s'annulent deux à deux excepté $\cos 180°$ puisque $\cos 0°$ ne figure pas. La somme est donc $\cos 180° = -1$.

12. Réponse **E.** X ne peut être un menteur car alors sa réponse serait vraie. Donc X dit la vérité et par suite Y est un menteur.

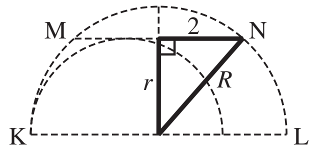
13. Réponse **D.** Pour $x \in [0\,;1]$, la fonction est $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, et seules A et D peuvent convenir.
Pour $x \in [-1\,;0]$, la fonction est $x \mapsto 1 + x$, et seules C, D et E peuvent convenir.
La bonne réponse est donc nécessairement D.
Remarque : pour $x \in [-\infty\,; -1]$, la fonction est $x \mapsto -x-1$,
et pour $x \in [1\,;+\infty]$, la fonction est $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$,
ce qui correspond bien à D.

14. Réponse **D.** En désignant par n le plus grand des huit nombres, on a : $(n-7)+(n-6)+(n-5)+(n-4)+(n-3) = (n-2)+(n-1)+n$.
D'où $n = 11$.

15. Réponse **C.** Soit n l'âge d'Hélène. L'âge de sa mère est $20 + n$.
n divise $(20 + n)$ si et seulement si n divise 20.
Les diviseurs positifs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20. Donc l'âge d'Hélène sera un diviseur de celui de sa mère lorsqu'elle aura 1 an, 2 ans, 4 ans, 5 ans, 10 ans et 20 ans, et seulement ces années-là.

16. Réponse **A.** Il y a 6 points sur les axes, dont une coordonnée vaut 3 ou -3. Il y a 24 points dont une coordonnée vaut 1 ou -1 et les autres 2 ou -2. Cela fait déjà 30 solutions. On n'a pas besoin, dans ce questionnaire Kangourou, de vérifier que ce sont les seules. Mais…
Il s'agit du nombre de solutions entières de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
Il y a deux cas :
• $y^2 + z^2 = 0$ et $x^2 = 9$, ce qui (après permutations) donne 6 solutions ;
• $1 \leqslant x^2 \leqslant y^2 \leqslant z^2$ et donc $x^2 = 1$, $y^2 = z^2 = 4$, ce qui (après permutations) donne 24 solutions.
Cela fait 30 solutions au total.

17. Réponse **C.** R désignant le rayon du grand demi-cercle et r le rayon du petit demi-cercle, en traçant la perpendiculaire à (KL) passant par son milieu (qui est donc un axe de symétrie pour [MN]), on constate : $R^2 = 2^2 + r^2$.



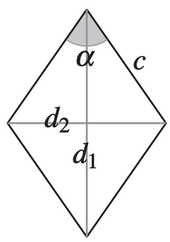
L'aire grisée valant $\dfrac{\pi}{2}(R^2 - r^2)$, vaut donc 2π.

18. Réponse **D.** Soit d l'entier par lequel on divise.
Par hypothèse, d divise $336 - 2$, soit 334.
Or 334 n'a que 4 diviseurs : 1, 2, 167 et 334 (car 167 est premier).
Le reste dans la division de 336 étant 2, on a $d > 2$, donc $d = 167$ ou $d = 334$.
$2007 = (12 \times 167) + 3 = (6 \times 334) + 3$. Le reste cherché est donc 3.

19. Réponse **D.** Si un nombre entier n s'écrit $x + \sqrt{x}$, avec x entier, alors $\sqrt{x}$ est aussi entier et $n = x + \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right)$ est le produit de deux entiers consécutifs. Ce n'est pas le cas de 60 mais de $30 = 5 \times 6$, $90 = 9 \times 10$, $110 = 10 \times 11$ et $870 = 29 \times 30$.

20. Réponse **D.** Les lancers de dés étant indépendants, la probabilité que Lucas gagne au cours du premier tour (c'est-à-dire que Jasmine obtienne un score de 4, 5 ou 6 ; Karine un score de 1, 2, 3 ou 6 ; et Lucas un 6) vaut
$p = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$.
La probabilité que personne ne gagne au cours d'un tour vaut
$q = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{18}$.
Par conséquent, la probabilité que Lucas gagne au second tour est qp, au troisième tour q^2p, etc.
La probabilité que Lucas gagne est donc :
$$p\,(1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{p}{1-q} = \frac{1}{18} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{18}} = \frac{1}{13}.$$

21. Réponse **B.** c désignant la longueur du côté du losange, α l'angle aigu, d_1 la grande diagonale et d_2 la petite diagonale, on a :



$d_1 = 2\,c \cos\dfrac{\alpha}{2}$ et $d_2 = 2\,c \sin\dfrac{\alpha}{2}$.
Comme, dans ce losange, on a $c^2 = d_1 d_2$,
on a donc $2 \sin\dfrac{\alpha}{2} \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. Et $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

22. Réponse **B.** -1 et 1 annulent $f(x)$, $f(0) = 2$, donc :
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 1)(ax - 2)$.
D'où $b = -2$.

23. Réponse **D.** Il y a deux structures de dons possibles :

- ou bien la chaîne des dons est un cycle à 5 éléments, et il y alors $4 \times 3 \times 2$ manières pour la distribution des cadeaux ;
- ou bien il y a deux cycles, l'un à 3 éléments, l'autre à 2 éléments (échange de cadeaux entre 2 amis).
  Et il y a 10 façons $\left(C_5^3\right)$ de choisir le cycle de 3 éléments avec chaque fois 2 manières pour la distribution.

Finalement : $(4 \times 3 \times 2) + \left(2 \times C_5^3\right) = 24 + 20 = 44$.

24. Réponse **B.**

Une somme de puissances de 3 deux à deux différentes, c'est un nombre dont l'écriture en base 3 ne comporte que des 0 et des 1.
Chaque nombre s'identifie à une suite finie de 0 et de 1 qui commence par 1. La suite de ces nombres s'identifie donc aussi aux entiers, considérés comme écrits en base 2.
Le 100^{e} nombre est donné par l'écriture en base 2 de 100,
$100 = 64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2$.
Le nombre correspondant en base 3 est :
$3^6 + 3^5 + 3^2 = 729 + 243 + 9 = 981$.

25. Réponse **9.** Soit n un chiffre cherché. n^2 ayant quatre chiffres au plus, la somme des chiffres de n est inférieure ou égale à 5.
Les 9 nombres 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 et 31 conviennent (comme le montre le tableau ci-dessous) mais pas les seuls autres possibles (14, 23, 32, 40, 41 et 50).

n :	10	11	12	13	20	21	22	30	31
(Σ chiffres de n)	1	2	3	4	2	3	4	3	4
(Σ chiffres de n)^2	1	4	9	16	4	9	16	9	16
n^2 :	100	121	144	169	400	441	484	900	961
Σ chiffres de n^2	1	4	9	16	4	9	16	9	16

26. Réponse **8.**

Dans la construction de la spirale, intéressons-nous aux cases qui se situent sur la diagonale Nord-Est en partant de la grisée.
Lorsqu'on arrive à une de ces cases, l'ensemble des cases où l'on a déjà écrit des chiffres forme un carré : de 3×3 cases, de 5×5 cases, … de 201×201 cases pour le carré ayant pour coin Nord-Est la case située 100 au-dessus et 100 à droite de la case grisée. Dans cette case, c'est un 9 qui est écrit (car 201 étant multiple de 3, son carré est multiple de 9). Et il faut revenir 100 cases à gauche pour trouver la case située 100 cases au-dessus de la case grisée. Or $100 = 9 \times 11 + 1$. Le chiffre cherché est donc 8.