KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. 5 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2009 - Corrigé de l'épreuve Juniors

1. Réponse **C.** $(2+0) \times (0+9) = 18$. Des nombres proposés, c'est le seul multiple de 3.

2. Réponse **E.** L'indication donnée, $2009 = 41 \times 49$, aide à calculer : $\frac{2009}{41} - \frac{2009}{49} = 49 - 41 = 8$.

3. Réponse **E.** Si lever le crayon est interdit, le passage à un sommet nécessite deux segments : un y arrivant, un autre en partant. Il est possible de ne pas lever le crayon si les sommets comportent tous un nombre pair de segments, ou bien si deux sommets seulement en comportent un nombre impair (le départ et l'arrivée).

4. Réponse **C.** Il y a au départ 8 alignements de 3 points. En effaçant 2 points seulement, il restera toujours une colonne de 3 points. Et en effaçant les 3 points sur une diagonale, on supprime tous les alignements de 3 points.

5. Réponse **A.** Il y a 2008 autres personnes que Jeanne ; 3/4 moins bien classés et 1/4 mieux classés. $2008 \div 4 = 502$. Jeanne a donc fini à la 503^{e} place.

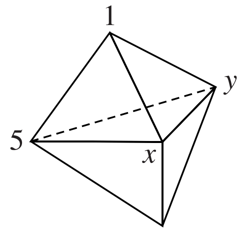
6. Réponse **C.**
Le produit des 9 fractions est égal à $\frac{1}{10}$, donc le résultat est 100.

7. Réponse **B.** La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Si on assemble les 3 portions de disques empiétant sur le triangle on obtient donc un demi-disque d'aire $\frac{4\pi}{2}$ m^2 soit 2π m^2.

La surface grisée mesure donc, en m^2, $80 - 2\pi$.

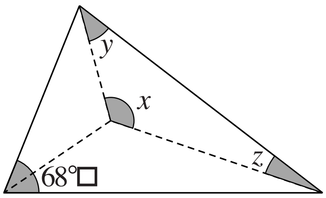
8. Réponse **E.** Le 6^e nombre est la somme des 4^e et 5^e nombres. Le 5^e nombre est donc $15 - 6 = 9$. Et le 7^e nombre est $9 + 15$, soit 24.

9. Réponse **C.** Les nombres x et y écrits aux 2 sommets restants du plan médian vérifient $1 + 5 + x = 1 + 5 + y = 1 + x + y$.
Et donc $x = y = 5$.
Le troisième sommet porte donc un 1 et la somme totale est $1 + 3 \times 5 + 1$, soit 17.



10. Réponse **B.** Avec les notations de la figure ci-contre, on a, dans le grand triangle où sont tracées les bissectrices : $2y + 2z + 68° = 180°$.
De plus $x = 180° - (y + z)$.

D'où $x = 180° - \frac{180° - 68°}{2} = 124°$.



11. Réponse **C.** La moyenne étant 4, la somme des 4 notes de Marie est 16. La phrase C ne peut pas être vraie car même si Marie avait eu la note maximale au contrôle où elle n'a pas eu 3, la somme serait inférieure à 16 : $5 + 3 \times 3 = 14$. On vérifie que chacune des autres phrases peut être vraie : A évidemment ; B avec 3, 3, 5, 5 ; D avec 1, 5, 5, 5 et E avec 4, 4, 3, 5.

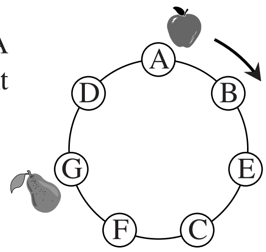
12. Réponse **B.**
En A, si un anneau est brisé, les deux autres restent attachés.
En C, l'anneau noir reste attaché à un anneau si un autre est brisé.
En D, si le gris (du haut) est brisé, les deux autres restent attachés.
En E, les anneaux sont déjà séparés.

13. Réponse **C.** $3 \Delta 5 = 3 \times 5 + 3 + 5 = 23$. $2 \Delta x = 2x + 2 + x = 3x + 2$.
Donc $3x + 2 = 23$ soit $x = 7$.

Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des *Éditions du Kangourou* sur Internet :

http://www.mathkang.org/catalogue/



14. Réponse **B.** En commençant à la pomme A (voir dessin ci-contre), les fruits successivement mangés seront B, C, D, E, F et G.
Si la poire (en G) porte le numéro 1, alors la pomme par où commencer se situe deux fruits plus loin dans le sens des aiguilles d'une montre et porte le numéro 3.

15. Réponse **C.** Si la première personne dit vrai, alors la 2^e est un menteur ainsi que la 3^e qui affirmant que, devant elle, la 2^e ment dirait la vérité : c'est impossible. Donc la première personne est un menteur. Et la 2^e dit la vérité, la 3^e ment, la 4^e dit la vérité... Une personne sur deux ment (toutes celles de rang impair) et il y a 13 menteurs sur ces 25 personnes.

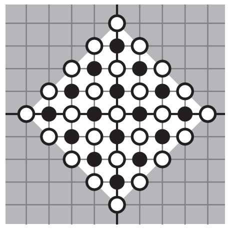
16. Réponse **D.** $20008 > 10000 > 2008$ donc $\dfrac{1}{20008} < \dfrac{1}{10000} < \dfrac{1}{2008}$.
Et $1 + \dfrac{1}{20008} < 1 + \dfrac{1}{10000} < 1 + \dfrac{1}{2008}$. Soit $\dfrac{20009}{20008} < 1{,}0001 < \dfrac{2009}{2008}$.

17. Réponse **C.** On peut prendre $R = 1$. Alors le côté du carré est $\sqrt{2}$. Et le rayon des petits cercles est $r = \sqrt{2} - R = \sqrt{2} - 1$.
D'où $\dfrac{R}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.

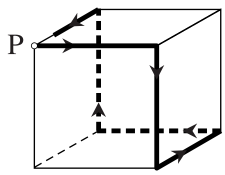
18. Réponse **B.** $2009 = 41 \times 7 \times 7$. (Cela était rappelé dans l'énoncé de la question 2.)
On peut construire des parallélépipèdes de dimensions (1, 1, 2009), (1, 7, 287), (1, 41, 49) ou (7, 7, 41). Mais les trois premiers ont une aire supérieure à 2009, ce qui n'est pas possible car il reste des pastilles. Le parallélépipède construit a donc quatre faces rectangulaires d'aire 41×7 et deux faces carrées d'aire 7×7. Son aire est $4 \times 41 \times 7 + 2 \times 7 \times 7$, ou $(82 + 7) \times 14$, soit 1246. Le bébé a collé 1246 pastilles.
$2009 - 1246 = 763$. Il lui reste 763 pastilles.

19. Réponse **C.** Un fruit n'a que deux voisins sur la ligne. Chacune des 4 variétés doit donc apparaître au moins 2 fois puisqu'elle doit être voisine de trois variétés distinctes. Voici une ligne possible avec 8 fruits : poire-pomme-pêche-prune-poire-pêche-prune-pomme. 8 est donc le minimum cherché.

© ACL - les éditions du Kangourou



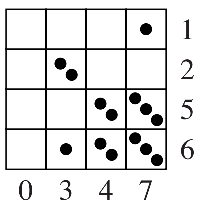
20. Réponse **A.** Après chaque saut, les positions possibles du kangourou sont à l’intérieur de carrés dont les côtés suivent les diagonales du quadrillage. Sur l’exemple ci-contre, le kangourou peut se trouver sur l’un des 4×4 points noirs après 3 sauts et sur l’un des 5×5 points blancs après 4 sauts. Ainsi, après n sauts, le kangourou peut se retrouver sur $(n+1)^2$ points différents.
Après 10 sauts, il peut donc se retrouver sur 11^2, soit 121 points.



21. Réponse **C.** La fourmi repasse par son point de départ après avoir parcouru 6 arêtes. Son parcours (en commençant par tourner à droite) est représenté ci-contre.
Note : il ne faut pas oublier que la fourmi se déplace « à l’extérieur » du cube.

22. Réponse **C.** On ne peut pas écrire une liste de 9 nombres car les seules listes contenant à la fois 5 et 7 sont 5-1-7 et 7-1-5. Voici une liste de 8 nombres ayant la propriété demandée : 9-3-6-2-4-8-1-5.
La suite écrite par Vendredi a donc 8 nombres.

23. Réponse **E.** $396\,900 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2$.
Le seul multiple de 5 à un chiffre est lui-même donc une des lettres est 5. De même, une autre lettre est 7. Ces deux lettres sont O et U qui sont les seules à être 2 fois dans KANGOUROU.
Alors : $K \times A \times N \times G \times R = 2^2 \times 3^4$. Et $1 \times 2 \times 3 \times 6 \times 9$ est l’unique manière de décomposer $2^2 \times 3^4$ en produit de 5 entiers naturels différents et inférieurs à 10. D’où : $K+A+N+G+R = 1+2+3+6+9 = 21$.



24. Réponse **A.** Dans le meilleur des cas, les 8 nombres différents sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Leur somme vaut 28 et correspond à 14 jetons placés (puisque chaque jeton est compté deux fois, une fois en ligne et une fois en colonne). Une solution avec 14 jetons existe (voir ci-contre).
Donc il faut au minimum 14 jetons.

25. Réponse **8.**
Les carrés pouvant être égaux à la somme de deux éléments de la suite sont 4, 9, 16 et 25.
Listons tous les couples d'éléments dont la somme est un carré :

(1 ,3)	(1 ,8)	(1 ,15)	(9 ,16)
	(2 ,7)	(2 ,14)	(10 ,15)
	(3 ,6)	(3 ,13)	(11 ,14)
	(4 ,5)	(4 ,12)	(12 ,13)
		(5 ,11)	
		(6 ,10)	
		(7 ,9)	

Si on cherche à retirer le minimum d'éléments, pour le couple (1 ,8) il vaut mieux enlever le 1, car le 8 ne fait partie d'aucun autre couple.
De même, du couple (10 ,15), on enlève le 10 ;
du couple (9 ,16), on enlève le 9.
Alors, en raisonnant de même sur la liste des couples restants :
du couple (2 ,7), on enlève le 2 ;
puis, du couple (11 ,14), on enlève le 11 ;
puis, du couple (4 ,5), on enlève le 4 ;
puis, du couple (13 ,12), on enlève le 13.
Ne restent alors (1, 2, 4, 9, 10, 11 et 13 ayant été retirés), parmi les éléments restants, que 3 et 6 dont la somme est un carré. Il faut donc retirer l'un des deux, ce qui fera 8 éléments retirés et il est impossible d'en retirer moins de 8. (En retirant 8 éléments, on peut garder par exemple : 5, 6, 7, 8, 12, 14, 15 et 16.)

26. Réponse **9.**
Les nombres étranges à un 1 chiffre sont : 2, 3, 5 et 7.
Les nombres étranges à 2 chiffres sont les nombres premiers parmi : 23, 32, 25, 52, 27, 72, 35, 53, 37, 73, 57 et 75. Ce sont 23, 37, 53 et 73.
Les nombres étranges à 3 chiffres sont les nombres premiers parmi : 237, 373, 537 et 737. Il n'y a que 373.
Aucun nombre à 4 chiffres ne peut commencer et finir par 373, donc il n'y a pas d'autre nombre étrange.
Il y a exactement 9 nombres étranges : 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73 et 373.

© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 5 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »