KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. 5 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2008 - Corrigé de l'épreuve Juniors

1. Réponse **D.** La lettre C reste dans la boîte 4 ; il faut donc enlever C de la boîte 5, où il y reste B ; et il faut donc enlever B de la boîte 3, où il reste E. Et il faut donc enlever B, C, E de la boîte 2 où il reste donc D.

2. Réponse **C.** Gabriel a couru en 30 secondes. Frank a couru en 36 secondes. Donc Gabriel a été plus rapide que Frank de 6 secondes.

3. Réponse **D.** $v = 2 + 4 = 6$. $w = 2 \times 3 = 6$. $x = -6$. $y = 0 + 6 = 6$. $z = 12 : 2 = 6$. Ils sont donc 4 égaux à 6.

4. Réponse **B.** Soit n le nombre de contrôles supplémentaires pour avoir 4 de moyenne. On a : $1 + 5n = 4(n + 1)$. D'où $n = 3$. Avec, en plus du premier, 3 contrôles avec la note maximale, ma moyenne sera 4.

5. Réponse **B.** [MN] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 3 et 2. Et $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

6. Réponse **D.** Il faut enlever l'une des deux lettres du début, K ou A, qui ne sont pas dans l'ordre alphabétique. De même, il faut enlever l'une des lettres N ou G.
Dans la succession « URO », qui est dans l'ordre inverse, il faut enlever deux lettres.
Il faut donc enlever au moins 4 lettres et la suite restante peut être, par exemple, AGORU.
(L'énoncé ne dit pas si l'on peut garder deux lettres identiques à la suite mais on obtient alors le même résultat, 4.)

7. Réponse **E.** $KO+OK=(10\times K+O)+(10\times O+K)=11\times(K+O)$, on doit donc avoir un multiple de 11. De plus, le chiffre des centaines W vaut la retenue des dizaines, il ne peut valoir que 1. Le seul multiple de 11 entre 100 et 200 ayant 1 pour chiffre des unités est 121. Donc $O=2$ et $K=9$.

8. Réponse **C.** Si L et ℓ sont les longueur et largeur du rectangle initial, l'un des rectangles obtenus a un périmètre de $2L+\ell$, et l'autre $2\ell+L$. On a donc : $2L+\ell=50$
et $L+2\ell=40$.
D'où $3L+3\ell=90$. Le périmètre initial est donc $2L+2\ell=60$.

9. Réponse **C.** Le cube a 12 arêtes. À chaque sommet, après découpe, on ajoute 3 arêtes. $3\times8=24$. $12+24=36$, c'est le nombre d'arêtes du solide.

10. Réponse **B.** Quand Basile est debout devant le miroir, ce que l'on voit dans le miroir correspond à une symétrie par rapport à un axe vertical.

Ainsi 2008 devient 8005.
Puis faire le poirier revient à faire une rotation d'un demi-tour.

Ainsi 8005 devient 5008.
(Remarque : le résultat s'obtient en tournant la feuille pour avoir le bas en haut, puis en la retournant pour voir le verso, et en regardant alors par transparence.)

11. Réponse **B.** La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair. Si le kangourou est sûr que la somme des nombres écrits sur les deux cartes du singe est un nombre pair c'est qu'il est sûr, qu'après avoir pris ses 3 cartes, les 4 cartes qui restaient étaient soit toutes paires soit toutes impaires. Comme parmi les nombres de 1 à 7, il y a trois nombres pairs (2, 4 et 6) et 4 nombres impairs (1, 3, 5 et 7), c'est que le kangourou a pris les trois cartes portant les nombres pairs. $2+4+6=12$; la somme cherchée est 12.

12. Réponse **D.** 3 et 5. Dans les formes 1, 2 et 4, les triangles se retrouvent bien, après pliage, sur une même face.

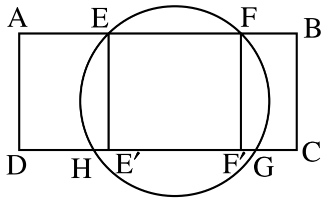
13. Réponse **B.** À la naissance du dernier des 7 nains, leurs âges étant 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6, la somme des âges des 3 plus jeunes est 3 et celle des 3 plus vieux est 15, soit une différence de 12. Cet écart ne change pas lorsque les nains vieillissent. Et $342 + 12 = 354$.

14. Réponse **E.** $1000 \div 4 = 250$. Le nombre initial est composé de 2008 écrit 250 fois de suite. Sa somme des chiffres est $2 \times 250 + 8 \times 250$, soit 2500. Il faut, en supprimant des chiffres, faire diminuer cette somme de 492, pour arriver à 2008. Pour en supprimer un maximum, on supprime d'abord tous les zéros (soit 500 chiffres), puis des deux (soit 246 chiffres) ; soit 746 au total.

15. Réponse **A.** Selon la position de l'origine, les points ayant une abscisse divisible par 3 peuvent former l'un des trois ensembles {I, J, M, N}, {K} et {L}. L'ensemble ayant au moins deux points est {I, J, M, N}.
Selon la position de l'origine, les points ayant une abscisse divisible par 5 peuvent former l'un des trois ensembles {I, K, L, N}, {J} et {M}. L'ensemble ayant au moins deux points est {I, K, L, N}.
Donc, les points ayants leurs abscisses divisibles par 15 sont I et N.

16. Réponse **D.** Remarquons que les nombres proposés ont tous 3 ou 8 comme chiffre des unités. Le chiffre des unités de leur somme sera soit 6, soit 1. Donc aucune somme de 2 de ces nombres ne pourra être 100.
Avec 3 de ces nombres, le chiffre des unités de la somme sera soit 9 $(6+3$ ou $1+8)$ soit 4 $(6+8$ ou $1+3)$. Impossible d'avoir 100.
Avec 4 de ces nombres, le chiffre des unités de la somme sera soit 2 $(9+3$ ou $4+8)$ soit 7 $(4+3$ ou $9+8)$. Impossible d'avoir 100.
Il existe une solution avec 5 nombres : $3 + 8 + 13 + 28 + 48 = 100$.

17. Réponse **B.** Projetons E et F perpendiculairement sur [DC] en E′ et F′. En centimètres, on a :

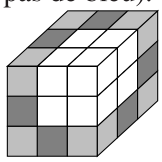


$DE' = AE = 4$, donc $HE' = 1$;
$E'F' = EF = 5$;
$F'G = HE' = 1$ (symétrie par rapport au diamètre du cercle perpendiculaire à (EF)).
Donc $HG = HE' + E'F' + F'G = 1 + 5 + 1 = 7$.

18. Réponse **A.** La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.
Dans le triangle SPT : $\widehat{PST} + 120° + \widehat{PTS} = 180°$.
Dans le triangle isocèle RST : $\widehat{PTS} = \widehat{RST} = 50° + \widehat{PST}$.
Donc $2\,\widehat{PST} + 170° = 180°$. Et $\widehat{PST} = 5°$.

19. Réponse **D.** Soit a le chiffre des centaines de milliers ($a > 0$) et b le chiffre des dizaines de milliers.
Le chiffre des milliers vaut $a + b$.
Le chiffre des centaines vaut $a + 2b$.
Le chiffre des dizaines vaut $2a + 3b$.
Le chiffre des unités vaut $3a + 5b$. Et $3a + 5b \leqslant 9$. Donc $b \leqslant 1$.
Si $b = 0$, a ne peut être égal qu'à 1, 2 ou 3 ; et si $b = 1$, a ne peut être égal qu'à 1. Les 4 seuls nombres possibles sont :
101 123, 202 246, 303 369, 112 358.

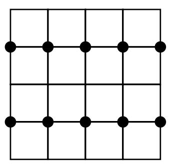
20. Réponse **E.** Il y a 2 configurations possibles pour les faces du cube : l'une où deux faces d'une même couleur sont opposées (la troisième face de même couleur est « entre les deux »), l'autre où les trois faces d'une même couleur ont un sommet commun.
Dans le premier cas, le nombre de petits cubes ayant au moins une face rouge et une face bleue est 16 (le cube central mis à part, sur les 26 autres petits cubes, 5 n'ont pas de rouge et 5 n'ont pas de bleu).
Dans le second cas, le nombre est 12 ($27 - 1 - 7 - 7$).
Ce sont les 12 cubes indiqués par les couleurs grises (claire ou foncée) sur le dessin ci-contre.
Cela dépend donc du coloriage initial.

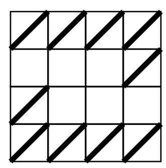


21. Réponse **D.** Comptons les puissances de 2 dans les nombres successifs :
$2 \to 2^1$, $4 \to 2^2$, $6 \to 2^1$, $8 \to 2^3$, $10 \to 2^1$, $12 \to 2^2$, $14 \to 2^1$, $16 \to 2^4$.
$1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 4 = 15$.
On peut vérifier que tous les autres facteurs conviennent lorsque $p = 16$ (et $p < 17$, sinon, dans les facteurs de $p!$, il y aurait 17).

22. Réponse **D.** On constate que le triangle ayant pour sommets les 3 centres de cercle a ses côtés mesurant 3, 4 et 5. Il est donc rectangle (d'après la réciproque du théorème de Pythagore) avec son angle droit au centre du cercle de rayon 1. Il faut donc enlever un quart au périmètre du petit cercle pour avoir la longueur de l'arc cherchée.
Cette longueur est donc égale à $\frac{3}{4} \times 2\pi$, soit $\frac{3}{2}\pi$.

23. Réponse **C.** Considérons les 10 points noirs marqués ci-contre (les points des « deuxième » et « quatrième » lignes).
Toute diagonale à tracer a forcément une extrémité sur un de ces points.
Ces diagonales ne devant pas avoir de point commun, leur nombre ne dépasse donc pas 10.
Et comme il est possible de dessiner 10 diagonales sans que 2 diagonales aient un point commun (comme ci-contre), 10 est le maximum possible.





24. Réponse **E.** On a $OQ = OT$ (cercle de centre O) et $TQ = TO$ (cercle du centre T), donc QOT est équilatéral.
La hauteur de ce triangle mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Et en prolongeant la hauteur portée par [PQ] jusqu'aux côtés du carré, on a un segment de longueur 1. Donc $1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1 - PQ}{2}$.
D'où $PQ = \sqrt{3} - 1$.

25. Réponse **9.**
On forme la liste des multiples de 17 et de 23 comportant deux chiffres.
Il s'agit de : 00 17 34 51 68 85 et 00 23 46 69 92.
Il apparaît, en ne comptant 00 qu'une fois, 10 derniers chiffres qui sont les chiffres 0, 1, …, 9. Et connaissant le chiffre des dizaines, on connaît le chiffre des unités (et inversement).
Le nombre de 2008 chiffres est donc entièrement déterminé par son dernier chiffre.
Or : 0 conduit à 0 itéré 2007 fois et n'est pas une écriture décimale d'un entier. Par contre tout $x \in \{1, \ldots, 9\}$ conduit à une et une seule écriture décimale vérifiant la propriété.
Il y a donc 9 nombres ayant la propriété voulue.

26. Réponse **8.**
On peut construire tout d'abord les 61 octogones et les assembler entre eux. On utilise pour cela :
61×8 morceaux moins ceux qui appartiennent à deux octogones à savoir, pour les 21 octogones de la rangée du centre : les deux extrémités ont deux côtés communs avec les autres et les 19 intermédiaires en ont quatre ; donc $61 \times 8 - 2 \times 2 - 19 \times 4 = 408$ morceaux. À ce stade tout est en place, excepté les morceaux fermant les carrés du haut et du bas à savoir 38 morceaux.
On utilise finalement 446 morceaux de tiges.
Il faut donc 8 boîtes ($8 \times 60 = 480$ et $7 \times 60 = 420$).