1. Réponse **D.** B-C-E sont à éliminer en raison de la structure de ZOO . Il reste A et D. Le plus grand est D.

2. Réponse **E.** 27 est le cube de 3. $3^3 = 27$.

3. Réponse **D.** La somme des points sur un dé vaut 21 ; et sur deux dés, 42. On voit $1 + 4 + 2 + 6 + 2$, soit 15 points. La somme des points non visibles est donc $42 - 15$ soit 27.

4. Réponse **B.** Parmi les cinq numéros, les super-gagnants sont : 22 222 et 102 334.

5. Réponse **B.** Chaque carré a un segment sur [LM] et trois segments de même longueur appartenant à la ligne brisée. La ligne brisée et le segment [LM] sont exactement l'union de tous les côtés des carrés. Donc la ligne brisée est trois fois plus longue que le segment [LM] et mesure 3×24 cm, soit 72 cm.

6. Réponse **A.** Soient a, b et c les nombres de billes d'Anna, Béa et Clara au début. Par hypothèse, $a + b + c = 30$.
Anna donne 2 billes et en reçoit 4 : elle en a donc $a + 2$ à la fin. Et, à la fin, Béa en a $b - 3$ et Clara $c + 1$.
On a : $a + 2 = b - 3 = c + 1$.
En substituant $b = a + 5$ et $c = a + 1$, on trouve $3a + 6 = 30$, soit $a = 8$.

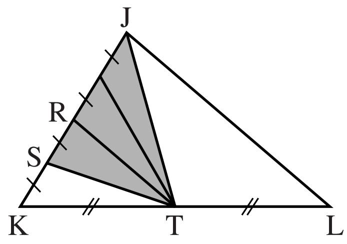
7. Réponse **A.** Ligne 1, on place V et V.
Colonne 3, on place V et V.
Colonne 4, on place R et R.
Et on doit avoir R en X et R en Y.
Le carré peut se compléter entièrement comme ci-contre

R	V	R	V
V	V	R	R
R	R	V	V
V	R	V	R

8. Réponse **A.** Dans un m^3, il y a 1000 dm^3. La hauteur de la tour vaut donc 1000 dm, soit 100 m.

9. Réponse **D.** Le nombre 2007 n'a pas d'importance.
Si x est le nombre de billes dans chaque sac au départ, après l'échange, H contient $\frac{x}{3}$ billes et O contient $x + \frac{2x}{3}$, soit $\frac{5x}{3}$.
Le rapport H/O est donc égal à $\frac{1}{5}$.

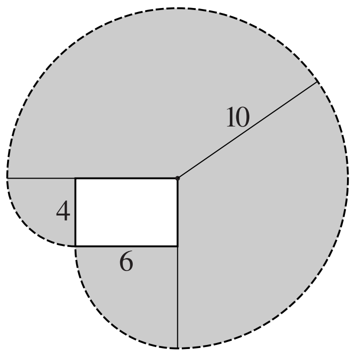
10. Réponse **D.** T milieu de [KL], donc l'aire de JKT est la moitié de l'aire de JKL.
L'aire de JST est les 3 quarts de l'aire de JKT donc les 3 huitièmes de celle de JKL. Et $\frac{3}{8} \times 96 = 36$.



11. Réponse **C.** Il y a au moins un véridique sur l'île. Il peut donc y avoir 2, 4 ou 6 menteurs. Il ne peut pas y avoir que 2 ou 4 menteurs car, alors, les 6 « autres » mentiraient aussi. Il y a donc 6 menteurs (et ce sont ceux qui disent qu'il y a 2 ou 4 menteurs).

12. Réponse **A.** Si l'on trace 3 segments joignant chacun des sommets J et K à trois points de leur côté opposé, cela diviserait le triangle en 16 zones.

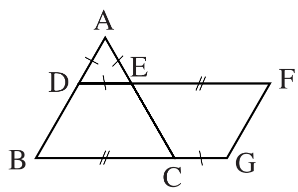
13. Réponse **A.** Le périmètre se compose de trois arcs de cercle :
• trois-quarts d'un cercle de rayon 10 cm, arc de longueur $\frac{3}{4} \times 20\pi$ cm,
• un quart d'un cercle de rayon 4 cm, arc de longueur $\frac{1}{4} \times 8\pi$ cm,
• un quart d'un cercle de rayon 6 cm, arc de longueur $\frac{1}{4} \times 12\pi$ cm.



$15\pi + 2\pi + 3\pi = 20\pi$. La longueur totale est 20π.

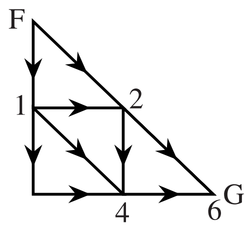
14. Réponse **B.** $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$. $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$.
Il faut élever 4^4 à la puissance 3 pour obtenir 8^8.

15. Réponse **D.** Ayant obtenu un trapèze, on a donc coupé le triangle équilatéral parallèlement au côté opposé au sommet et la partie coupée est elle-même un triangle équilatéral.
On a : $BD + DE = BA$ et $EF = BC$.



Donc la moitié $(BD + DE + EF)$ du périmètre p du parallélogramme est égale à deux tiers du périmètre t du triangle initial.
$\frac{1}{2}p = \frac{2}{3}t$ donc $t = \frac{4}{3}p = \frac{4}{3} \times 10 = 7{,}5$ en cm.

16. Réponse **D.** Sont indiqués sur la figure le nombre de chemin possibles pour se rendre à chacun des points d'intersection à partir du point F.
Il y a 6 manières différentes de se rendre du point F au point G en suivant les flèches.

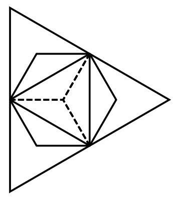


17. Réponse **C.** Chaque élève fait partie de 4 des équipes de son lycée. Dans l'autre lycée, on peut faire 10 équipes (choix de 2 élèves parmi 5). Donc chaque élève jouera 4×10, soit 40 matchs.

18. Réponse **C.** Soit n l'âge d'Hélène. L'âge de sa mère est $20+n$.
n divise $(20+n)$ si et seulement si n divise 20.
Les diviseurs positifs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20. Donc l'âge d'Hélène sera un diviseur de celui de sa mère lorsqu'elle aura 1 an, 2 ans, 4 ans, 5 ans, 10 ans et 20 ans, et seulement ces années-là.

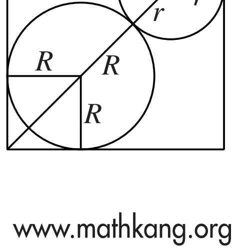
19. Réponse **C.** Si tous les habitants ont un nombre différent de cheveux et que Mathieu est celui qui en a le plus, le nombre de cheveux de Mathieu doit au moins être égal au nombre d'habitants moins un (on peut être chauve !). On a $h-1 \leqslant m$ en notant h le nombre d'habitants et m le nombre de cheveux de Mathieu.
Or il y a plus d'habitants que Mathieu n'a de cheveux : $m < h$.
On déduit $m = h-1$; et à chaque entier de 0 à m correspond un habitant ayant ce nombre de cheveux.
Comme personne n'a exactement 2007 cheveux, le maximum pour m est 2006, et donc 2007 pour h.

20. Réponse **A.**
Refaisons la figure sans le cercle.
On a : $S_3 = 4\,S_1$ et $S_2 = 2\,S_1$.
Et on a donc la relation :
$S_2^{\,2} = 4\,S_1^{\,2} = S_3 \times S_1$.



21. Réponse **A.** Il y a 180 lettres écrites, marquées U_1 à U_{180} :
KANGOUROU KANGOUROU KANGOUROU KANGOUROU…
Dans un premier temps, on supprime les 90 lettres de rang impair U_{2k+1}.
Il reste en premier $U_2 = A$ et en dernier $U_{180} = U$.
On supprime à nouveau les 45 lettres de rang impair : on conserve les U_{4k}. Il reste en premier $U_4 = G$ et en dernier $U_{180} = U$.
On supprime à nouveau les 23 lettres de rang impair : on conserve les U_{8k}. Il reste en premier $U_8 = O$ et en dernier $U_{176} = O$.
On supprime à nouveau les 11 lettres de rang impair : on conserve les U_{16k}. Il reste en premier $U_{16} = R$ et en dernier $U_{176} = O$.
À l'étape suivante, on conserve les U_{32k}, en commençant par $U_{32} = O$ et en dernier $U_{160} = R$; il reste les 5 lettres U_{32}, U_{64}, U_{96}, U_{128} et U_{160}.
À l'étape suivante, il reste U_{64} et U_{128}.
et enfin il reste U_{128}. Or $128 = (9 \times 14) + 2$. Donc $U_{128} = A$.
La dernière lettre restant est un A.

22. Réponse **D.** La longueur de la diagonale du carré peut s'écrire comme somme de 4 longueurs : $\sqrt{2} = R\sqrt{2} + R + r + r\sqrt{2}$.
On a donc : $R + r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{1}$.
Et $R + r = 2 - \sqrt{2}$.



23. Réponse **D.** Il y a deux structures de dons possibles :
- ou bien la chaîne des dons est un cycle à 5 éléments, et il y alors $4 \times 3 \times 2$ manières pour la distribution des cadeaux ;
- ou bien il y a deux cycles, l'un à 3 éléments, l'autre à 2 éléments (échange de cadeaux entre 2 amis).
  Et il y a 10 façons $\left(C_5^3\right)$ de choisir le cycle de 3 éléments avec chaque fois 2 manières pour la distribution.

Finalement : $(4 \times 3 \times 2) + \left(2 \times C_5^3\right) = 24 + 20 = 44$.

24. Réponse **B.** À 100 km/h, il parcourt 80 km. Considérons qu'à cette vitesse il consomme 100 unités de carburant au kilomètre. Il a donc 8000 unités de carburant.
À la vitesse V (en km/h), sa consommation au km est V unités.
Pour parcourir les 100 km à la vitesse V, il consomme $100V$ unités et, pour aller au plus vite, il va tout consommer.
Sa vitesse, « en faisant au plus vite », est donc donné par $100V = 8000$, soit $V = 80$.
Pour parcourir 100 km à 80 km/h, on met 1,25 h ou 1 h 15 min.
Il arrivera 1 h 15 après 21 h 00, donc à 22 h 15.

25. Réponse **9.** Soit n un chiffre cherché. n^2 ayant quatre chiffres au plus, la somme des chiffres de n est inférieure ou égale à 5.
Les 9 nombres 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 et 31 conviennent (comme le montre le tableau ci-dessous) mais pas les seuls autres possibles (14, 23, 32, 40, 41 et 50).

n :	10	11	12	13	20	21	22	30	31
(Σ chiffres de n)	1	2	3	4	2	3	4	3	4
(Σ chiffres de $n)^2$	1	4	9	16	4	9	16	9	16
n^2 :	100	121	144	169	400	441	484	900	961
Σ chiffres de n^2	1	4	9	16	4	9	16	9	16

26. Réponse **8.**
Dans la construction de la spirale, intéressons-nous aux cases qui se situent sur la diagonale Nord-Est en partant de la grisée.
Lorsqu'on arrive à une de ces cases, l'ensemble des cases où l'on a déjà écrit des chiffres forme un carré : de 3×3 cases, de 5×5 cases, … de 201×201 cases pour le carré ayant pour coin Nord-Est la case située 100 au-dessus et 100 à droite de la case grisée. Dans cette case, c'est un 9 qui est écrit (car 201 étant multiple de 3, son carré est multiple de 9). Et il faut revenir 100 cases à gauche pour trouver la case située 100 cases au-dessus de la case grisée. Or $100 = 9 \times 11 + 1$. Le chiffre cherché est donc 8.