

Produit scalaire

ACTIVITÉ

(page 215)

Activité

- 1 $S = AC^2 - AB^2 - BC^2 = CH^2 + AH^2 - AB^2 - (CH^2 - BH^2)$
 $= AH^2 - AB^2 - BH^2.$
- 2 • **Figure 1** : $AH^2 = AB^2 + BH^2 + 2AB \times BH;$

donc $\delta = 2AB \times BH = 2AB \times BC \times \cos \theta.$

• **Figure 2** : $\delta = (AB - BH)^2 - AB^2 - BH^2 = -2AB \times BH.$

Or, dans le triangle rectangle CHB,

$BH = BC \cos(\pi - \theta) = -B \cos \theta.$

Donc : $\delta = 2AB \times BC \times \cos \theta.$

• **Figure 3** : même démonstration.

PROBLÈME OUVERT

Considérons le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$, dans lequel :
 $B(6; 0)$ et $D(0; 6)$.

Alors : $G(-4; 0)$ et $E(0; -4)$. Il en résulte que $O(-2; 3)$.

La droite (EB) a pour équation $2x - 3y - 12 = 0$ et (OA) a
pour équation $y = -\frac{3}{2}x$. Donc H, intersection des deux
droites, a pour coordonnées $(\frac{24}{13}; -\frac{36}{13})$.

$$AH^2 + HB^2 = \frac{1872}{169} + \frac{4212}{169} = \frac{6084}{169} = 36 = AB^2.$$

Le triangle AHB est rectangle en H, d'où le résultat.

• **Après le chapitre...**

$$\vec{AG} + \vec{AD} = 2\vec{AO} \text{ et } \vec{EB} = \vec{AB} - \vec{AE}.$$

$$\text{Donc : } 2\vec{AO} \cdot \vec{EB} = (\vec{AG} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AE})$$

$$= \vec{AG} \cdot \vec{AB} - \vec{AD} \cdot \vec{DE}$$

$$= -AG \times AB + AD \times AE$$

$$= -24 + 24 = 0.$$

D'où l'orthogonalité des deux vecteurs \vec{OA} et \vec{EB} , qui
prouve que (DA) \perp (EB).

EXERCICES

Application (page 220)

- 1 a) $\vec{AC}(2; -5)$ et $\vec{AB}(4; 2)$; donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2.$
b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \times 2 \times (-\frac{1}{2}) = -2.$
c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$
- 2 $\vec{AB}(-2; 4)$ et $\vec{AC}(2; -1)$; donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -8.$
- 3 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 3 \times (-2) = -4.$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 2 \times \cos(-\frac{2\pi}{3}) = -5.$
c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(16 - 9 - 4) = \frac{3}{2}.$

- 4 a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{2}.$
b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = OA \times OC \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$
c) $\vec{OA} \cdot \vec{BC} = -OA \times BC = -1.$
d) $\vec{OA} \cdot \vec{AD} = -2.$

- 5 1. On choisit $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$
2. $18 = 6 \times 2\sqrt{3} \cos \widehat{BAC};$
donc : $\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}.$

6 1. a) $BA = \sqrt{9 + 16} = 5$ et $BC = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$.

b) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 24 + 16 = 40$.

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 20\sqrt{5} \cos \widehat{ABC}$.

2. $\cos \widehat{ABC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\widehat{ABC} \approx 27^\circ$.

7 1. $\vec{AB}(6; -2)$ et $\vec{AC}(3; 4)$; donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 10$.

2. a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 2\sqrt{10} \times 5 \times \cos \widehat{BAC}$;

donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

b) $\widehat{BAC} \approx 72^\circ$.

8 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{6}$

soit $3 = 4 \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} AC$.

Donc $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9 On note θ l'angle géométrique associé.

a) $3\sqrt{3} = 6 \cos(\vec{u}, \vec{v})$ soit $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

c) $-3 = 6 \cos \theta$, soit $\cos \theta = -\frac{1}{2}$; d'où : $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

10 $AB \times AC = 15$ et $AC = 3$; donc $AB = 5$.

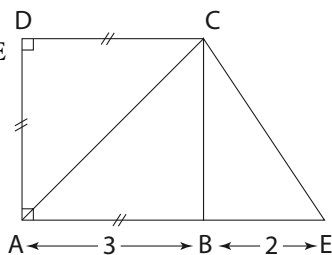
11 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$.

12 a) $\vec{AC} \cdot \vec{BE} = \vec{AB} \cdot \vec{BE}$
 $= AB \times BE$
 $= 6$.

b) $\vec{CE} \cdot \vec{AD} = \vec{DA} \cdot \vec{AD}$
 $= -9$.

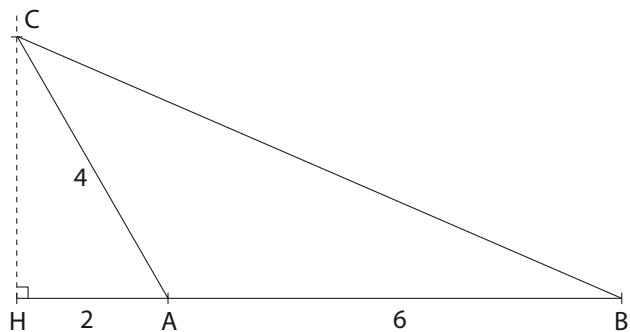


13 1. H est le projeté orthogonal de C sur (AB); donc $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}$.

2. a) $H \in (AB)$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = -12 < 0$;

donc \vec{AB} et \vec{AH} sont colinéaires et de sens contraires.

$AH = \frac{12}{6} = 2$.



14 $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{OD} + \vec{DC})$
 $= \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \vec{OA} \cdot \vec{DC} + \vec{AB} \cdot \vec{OD} + \vec{AB} \cdot \vec{DC}$.

Or : $\vec{OA} \cdot \vec{DC} = \vec{AB} \cdot \vec{OD} = 0$.

Donc : $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = -OA^2 + AB \times DC = -4 + 15 = 11$.

15 $\vec{AJ} \cdot \vec{ID} = (\vec{AB} + \vec{BJ}) \cdot (\vec{IA} + \vec{AD})$
 $= \vec{AB} \cdot \vec{IA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{BJ} \cdot \vec{IA} + \vec{BJ} \cdot \vec{AD}$.

Or : $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{BJ} \cdot \vec{IA} = 0$.

Donc : $\vec{AJ} \cdot \vec{ID} = -\frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AD^2 = 0$.

Ainsi, les droites (AJ) et (ID) sont perpendiculaires.

16 1. $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{OD} + \vec{DC})$
 $= \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \vec{OA} \cdot \vec{DC} + \vec{AB} \cdot \vec{OD} + \vec{AB} \cdot \vec{DC}$.

Or $\vec{OA} \cdot \vec{DC} = \vec{AB} \cdot \vec{OD} = 0$.

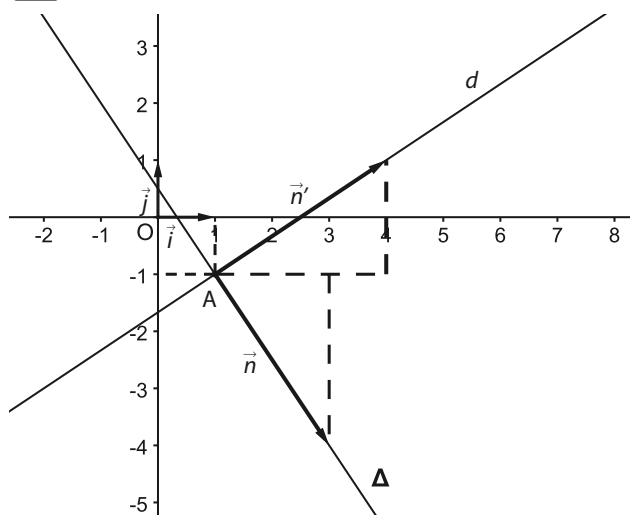
Donc : $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = -OA^2 + AB^2 = -4 + 16 = 12$.

2. a) $OB = OC = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$.

b) $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = OB \times OC \times \cos \theta = 20 \cos \theta$.

3. $\cos \theta = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, soit $\theta \approx 53^\circ$.

17 1. a), b)



2. $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$, donc les droites d et Δ sont perpendiculaires.

18 \vec{u} est un vecteur normal à Δ qui a donc une équation de la forme : $x + 2y + c = 0$.

Or : $B(2; 1) \in \Delta$; donc $2 + 2 + c = 0$ et $c = -4$.

Δ a pour équation : $x + 2y - 4 = 0$.

19 a) Δ_1 a pour vecteur normal $\vec{n}(-3; 2)$, donc Δ_1 a une équation de la forme $-3x + 2y + c = 0$.

Or : $A(3; 5) \in \Delta_1$; donc $-9 + 10 + c = 0$ soit $c = -1$.

Δ_1 a pour équation : $-3x + 2y - 1 = 0$.

b) Δ_2 a pour vecteur directeur $\vec{n}(-3; 2)$, donc Δ_2 a une équation de la forme $2x + 3y + c = 0$.

Or : $A(3; 5) \in \Delta_2$; donc $6 + 15 + c = 0$ soit $c = -21$.

Δ_2 a pour équation $3x + 3y - 21 = 0$.

20 d_1 a une équation de la forme $x + 3y + c = 0$.

Or : $A(2; 3) \in d_1$; donc $2 + 9 + c = 0$ soit $c = -11$.

d_1 a pour équation $x + 3y - 11 = 0$.

d_2 a pour équation $y = 3$.

d_3 a pour équation $x = 2$.

25 Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

• *Les outils :*

- Produit scalaire.
- Vecteurs colinéaires ou orthogonaux.

• *L'objectif :*

- Démontrer une propriété d'une figure en utilisant la décomposition d'un vecteur et l'orthogonalité de vecteurs.

1. a) $\vec{AM} + \vec{AD} = \vec{AI} + \vec{IM} + \vec{AI} + \vec{ID}$.

Or $\vec{IM} + \vec{ID} = \vec{0}$. D'où le résultat.

2. a) $2\vec{AI} \cdot \vec{BN} = \vec{AM} \cdot \vec{BN} + \vec{AD} \cdot \vec{BN} = -\vec{AM} \times \vec{AB} + \vec{AD} \times \vec{AN}$.

Or $AB = AD = c$ et $AM = AN$. Donc $\vec{AI} \cdot \vec{BN} = 0$.

b) Les droites (AI) et (BN) sont perpendiculaires.

26 Choisir un repère pour démontrer

• *L'outil :*

- Forme analytique du produit scalaire.

• *Les objectifs :*

- Démontrer une propriété à l'aide d'un repère bien choisi.
- Exploiter la forme analytique du produit scalaire.

1. a) $A(a; 0)$, $B(0; a)$, $C(0; c)$, $D(-c; 0)$ et $E(a; -a - c)$.

b) $I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $J\left(\frac{a-c}{2}; -\frac{a+c}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}\right)$.

2. $\vec{IJ}\left(-\frac{c}{2}; -a - \frac{c}{2}\right)$ et $\vec{AK}\left(-a - \frac{c}{2}; \frac{c}{2}\right)$; donc $\vec{IJ} \cdot \vec{AK} = 0$.

Ainsi, les droites (IJ) et (AK) sont perpendiculaires.

27 Exploiter l'orthogonalité et les équations de droites

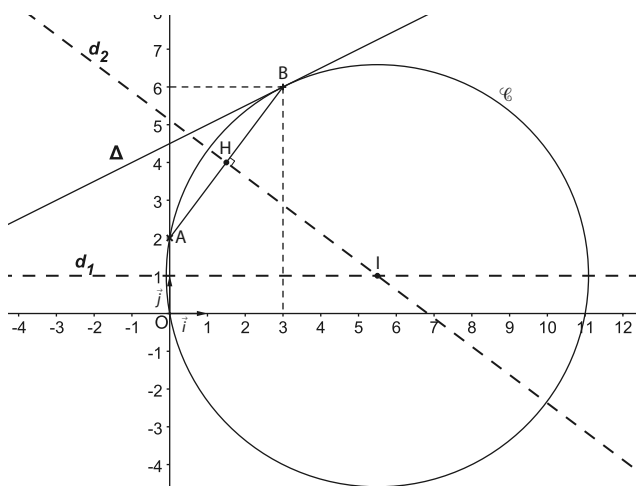
• *Les outils :*

- Équation cartésienne d'une droite.
- Équation d'une médiatrice.

• *Les objectifs :*

- Trouver une équation d'une droite à l'aide du produit scalaire.
- Trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.
- Trouver une équation d'une tangente à un cercle à l'aide du produit scalaire.

1. 2.



3. a) d_1 a pour équation $y = 1$.

Le milieu H de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ et $\vec{AB}(3; 4)$.

Le vecteur \vec{AB} est un vecteur normal à d_2 , donc d_2 a une équation de la forme $3x + 4y + c = 0$.

Or : $H \in d_2$; donc : $\frac{9}{2} + 16 + c = 0$ soit $c = -\frac{41}{2}$.

$3x + 4y - \frac{41}{2} = 0$ est donc une équation de d_2 .

b) I a pour ordonnée 1, donc son abscisse est donnée par $3x + 4 - \frac{41}{2} = 0$, soit $x = \frac{11}{2}$.

Ainsi, I a pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}; 1\right)$.

4. $\vec{IB}\left(-\frac{5}{2}; 5\right)$, donc $\vec{u}(-1; 2)$ est colinéaire à \vec{IB} .

Le vecteur \vec{u} est normal à Δ qui a donc une équation de la forme $-x + 2y + c = 0$.

Or : $B \in \Delta$; donc : $-3 + 12 + c = 0$ soit $c = -9$.

Ainsi, Δ a pour équation $-x + 2y - 9 = 0$.

28 Narration de recherche

On cherche à exprimer de deux manières le produit scalaire $\vec{IB} \cdot \vec{IC}$.

• $\vec{IB} \cdot \vec{IC} = (\vec{IA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{ID} + \vec{DC})$
 $= \vec{IA} \cdot \vec{ID} + \vec{AB} \cdot \vec{DC}$

car $\vec{IA} \cdot \vec{DC} = \vec{AB} \cdot \vec{ID} = 0$.

Ainsi :

$\vec{IB} \cdot \vec{IC} = -\vec{IA} \cdot \vec{ID} + \vec{AB}^2$
 $= -\frac{1}{4}a^2 + a^2 = \frac{3}{4}a^2$.

• $\vec{IB} \cdot \vec{IC} = \vec{IB} \times \vec{IC} \times \cos \theta$.

Or : $IB = \sqrt{AB^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{17}}{4}$

et $IC = \sqrt{ID^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + a^2} = \frac{5}{4}a$.

Donc : $\vec{IB} \cdot \vec{IC} = \frac{5a^2\sqrt{17}}{16} \cos \theta$.

Il en résulte que $\cos \theta = \frac{3}{4}a^2 \times \frac{16}{5a^2\sqrt{17}} = \frac{12}{5\sqrt{17}}$,
 et $\theta \approx 54,4^\circ$.

29 Narration de recherche

Choisissons un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{AB} = a\vec{i}$ et $\vec{AD} = a\vec{j}$. Ainsi : $B(a; 0)$, $D(0; a)$ et $C(a; a)$.

On note m l'abscisse de M. Or M est un point de la droite (DB) d'équation $x + y - a = 0$; donc M a pour ordonnée $y = a - m$.

M a pour coordonnées $(m; a - m)$, $P(m; 0)$ et $Q(0; a - m)$. Le vecteur $\vec{PQ}(-m; a - m)$ est un vecteur normal à Δ . Ainsi, Δ a une équation de la forme $-mx + (a - m)y + c = 0$.

Or : $M(m; a - m) \in \Delta$;

donc : $-m^2 + (a - m)^2 + c = 0$ soit $c = 2am - a^2$.

Ainsi, Δ a pour équation : $-mx + (a - m)y + 2am - a^2 = 0$.

Avec une construction exacte ou avec GeoGebra, il semble que $C(a; a)$ soit un point de Δ .

Vérification : $-am + (a - m)a + 2am - a^2 = 0$,
 donc $C(a; a) \in \Delta$.

30 TP – Appartenance d'un point à une figure donnée

2. a) $A\left(-\frac{1}{2}; -2\right), B\left(3; \frac{1}{3}\right), M\left(m; \frac{1}{m}\right)$.

b) $\overrightarrow{AB}\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{3}\right)$ colinéaire à $\vec{u}(3; 2)$;

$\overrightarrow{BM}\left(m-3; \frac{1}{m} - \frac{1}{3}\right)$ ou encore $\overrightarrow{BM}\left(m-3; -\frac{m-3}{3m}\right)$ colinéaire à $\vec{v}(-3m; 1)$.

c) $(MH) \perp (AB)$ donc $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$, car \vec{u} est un vecteur directeur de (AB) .

$(AH) \perp (MB)$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$, car \vec{v} est un vecteur directeur de (MB) .

$\overrightarrow{MH}\left(x-m; y-\frac{1}{m}\right)$, donc $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 3(x-m) + 2\left(y-\frac{1}{m}\right) = 0$ soit $3x + 2y = 3m + \frac{2}{m}$.

$\overrightarrow{AH}\left(x+\frac{1}{2}; y+2\right)$, donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = -3m\left(x+\frac{1}{2}\right) + 1(y+2) = 0$ soit $-3mx + y = \frac{3}{2}m - 2$.

• En multipliant la première équation par m et en additionnant avec la seconde :

$$(2m+1)y = 3m^2 + \frac{3}{2}m = \frac{3}{2}m(2m+1).$$

Or $m \neq -\frac{1}{2}$, donc $y = \frac{3}{2}m$ et $3x + 3m = 3m + \frac{2}{m}$ soit $x = \frac{2}{3m}$.

Ainsi, $y = \frac{1}{x}$ et H est un point de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

31 TP – Étude d'une configuration

2. a) La tangente d en M a pour équation

$$y = \frac{m}{2}(x-m) + \frac{m^2}{4} + 1 \text{ soit } y = \frac{m}{2}x + 1 - \frac{m^2}{4}$$

ou $2mx - 4y + 4 - m^2 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}(4; 2m)$ ou $\vec{u}'(2; m)$ est un vecteur normal à Δ_1 et Δ_2 .

Chacune de ces droites a donc une équation de la forme $2x + my + c = 0$.

• $M\left(m; \frac{m^2}{4} + 1\right) \in \Delta_2$, donc $3m + \frac{m^3}{4} + c = 0$ soit $c = -3m - \frac{m^3}{4}$

et Δ_2 a pour équation $2x + my - 3m - \frac{m^3}{4} = 0$.

• $F(0; 2) \in \Delta_1$ donc $c = -2m$, donc Δ_1 a pour équation $2x + my - 2m = 0$.

b) $A\left(0; 3 + \frac{m^2}{4}\right)$ et $C\left(0; 1 + \frac{m^2}{4}\right)$;

$\overrightarrow{AC}(0; -2)$ donc $AC = 2$.

c) Le point B appartient à d d'équation $2mx - 4y + 4 - m^2 = 0$ et à Δ_1 d'équation $2x + my - 2m = 0$, donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + my - 2m = 0 & \times m \\ 2mx - 4y + 4 - m^2 = 0 & \times -1 \end{cases}$$

Par addition :

$$(m^2 + 4)y - m^2 - 4 = 0 \text{ soit } y = 1.$$

Ainsi, le point B est un point de la droite d'équation $y = 1$.

EXERCICES**Entraînement** (page 230)**DE TÊTE**

32 $-10 + x = 0$ donc $x = 10$.

33 $\|\vec{u}\| = \sqrt{9+16} = 5$.

34 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - 8 = -7$.

35 $\vec{v}(1; 3)$.

36 $\vec{n}(2; -1)$.

37 $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = -13$.

38 $\cos \widehat{BAC} = -\frac{1}{2}$; $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

39 $a = 6$.

LES DIVERSES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

40 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{5} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} [16 - 4 - 9] = \frac{3}{2}$.

41 a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 15$.

c) $\widehat{BAC} = 40^\circ$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \cos 40^\circ$.

d) $A(1; 4), B(-3; 0)$ et $C(3; 0)$;
donc $\overrightarrow{AB}(-4; -4)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -4)$.

Ainsi : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8 + 16 = 8$.

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

$$= \frac{1}{2} (AD^2 - AB^2 - BD^2)$$

$$= \frac{1}{2} (25 - 16 - 4) = \frac{5}{2}.$$

42 a) $\cos \theta = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) $\cos \theta = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

c) $\cos \theta = -\frac{12}{12} = -1$; $\theta = \pi$.

43 Corrigé dans le manuel.

44 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ (théorème de la projection).

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO \times AB$ (vecteurs colinéaires et de même sens).

$AO = \frac{1}{2} AB$; d'où le résultat.

45 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{3}$
soit $3 = 4 \times AC \times \frac{1}{2} = 2AC$; $AC = \frac{3}{2}$.

46 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 = -AB \times AC$; d'où $AC = \frac{1}{2}$.

47 Corrigé dans le manuel.

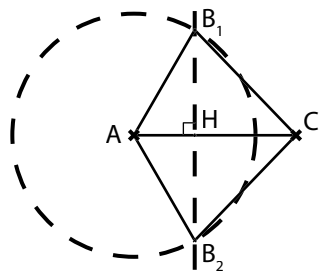
48 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AC}$
 $= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ et
 \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires
et de même sens.

Donc $AH \times AC = 6$

et $AH = \frac{3}{2}$.

D'où la construction.



RÈGLES DE CALCUL

49 a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 9 + 12 = 21$.

b) $2\vec{u} \cdot (-3\vec{v}) = -6\vec{u} \cdot \vec{v} = -72$.

c) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 9 + 25 + 24 = 58$.

50 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. **b)** $\vec{u}^2 = 5$.

c) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 - 5\vec{u} \cdot \vec{v}$
 $= 10 + 68 - 5 = 73$.

51 1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (16 - 9 - 4) = \frac{3}{2}$.

2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 9 + 4 - 3 = 10$.

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v}$; donc $DB = \sqrt{10}$.

52 Corrigé dans le manuel.

53 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ par hypothèse ;
donc : $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + 3\vec{v})^2 = -8\|\vec{v}\|^2 = -32$.

54 $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ donc $\vec{R}^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$
soit $\vec{R}^2 = 90\,000 + 40\,000 + 120\,000 \cos 50^\circ$
 $= 10^4(13 + 12 \cos 50^\circ)$.

Donc $R \approx 455$ N.

55 1. $\vec{w}^2 = (\vec{u} + x\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + x^2\|\vec{v}\|^2 + 2x\vec{u} \cdot \vec{v}$
 $= 4 + x^2 - 2x = x^2 - 2x + 4$.

2. $\|\vec{w}\| = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$.

$\Delta = 24$; $x_1 = 1 + \sqrt{6}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{6}$.

PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

56 $\overrightarrow{AB}(3; 1)$; $\overrightarrow{AC}(5; -5)$; $\overrightarrow{BC}(2; -6)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, donc le triangle ABC est rectangle en B.

57 $\overrightarrow{AM}(x; -1)$ et $\overrightarrow{BM}(x - 5; -4)$.

ABM rectangle en M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$.

58 1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2 = 16 - 36 = -20$.

59 1. On projette \overrightarrow{AC} sur \overrightarrow{BD} : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2. $BD = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$ et $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = -20$;

donc $A'C' = \frac{20}{2\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$.

60 Corrigé dans le manuel.

61 1. a) $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$; d'où : $AC = a\sqrt{2}$.

$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 3a^2$; d'où : $AG = a\sqrt{3}$.

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA \times OC \times \cos \theta$.

Or $OA = OC = \frac{AG}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA^2 \cos \theta = \frac{3}{4} a^2 \cos \theta$.

2. a) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{HA}$.

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OH^2 - AH^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{AC^2}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4}$.

3. $-\frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2 \cos \theta$ soit $\cos \theta = -\frac{1}{3}$.

D'où $\theta \approx 109,5^\circ$.

62 Corrigé dans le manuel.

63 A(6; 0), B(0; 8) et C(2; 2).

$\overrightarrow{CA}(4; -2)$ et $\overrightarrow{CB}(-2; 6)$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -20 = CA \times CB \times \cos \theta = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} \cos \theta$.

D'où : $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

64 a) Réciproque : si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$.

Donc \vec{u} est orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$.

La réciproque est fautive.

b) Réciproque : si $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.

$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

La réciproque est fautive.

c) Réciproque : si \vec{u} est orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$.

\vec{u} orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$ équivaut à $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$

soit $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$.

La réciproque est vraie.

d) Réciproque : si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} AB^2$, alors M est un point
de la médiatrice de [AB].

Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} AB^2$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} AB^2$ avec H

projeté orthogonal de M sur (AB).

Donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} sont colinéaires de même sens.

Il en résulte que $AB \times AH = \frac{1}{2} AB^2$ soit $AH = \frac{1}{2} AB$.

Donc H est le milieu de [AB] et M est un point de la
médiatrice de [AB].

65 $\overrightarrow{CD}(-4; 12)$, $\overrightarrow{AB}(-6; -2)$; $\overrightarrow{AD}(2; 4)$ et $\overrightarrow{BC}(12; -6)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Donc D est l'orthocentre du triangle ABC et le quadrangle
est orthocentrique.

66 Corrigé dans le manuel.

67 1. $a = x_B - x_A$, $b = y_B - y_A$, $c = x_D - x_C$ et $d = y_D - y_C$.

2.

```

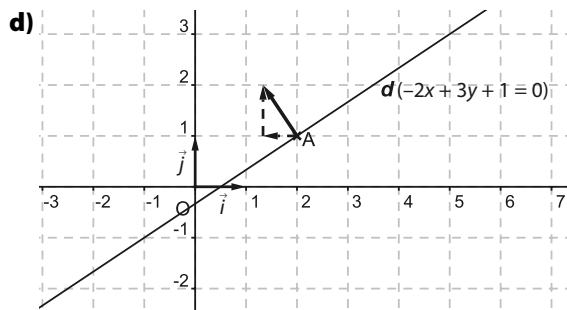
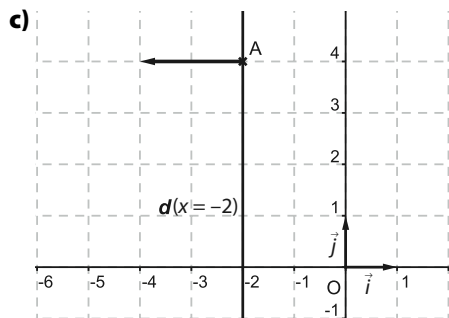
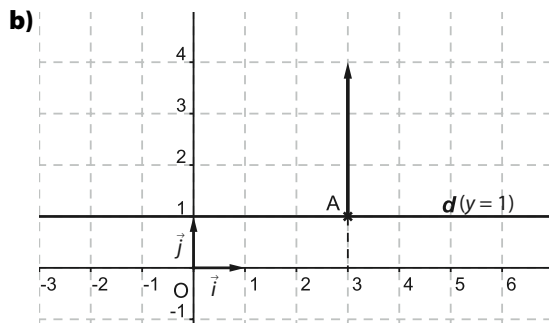
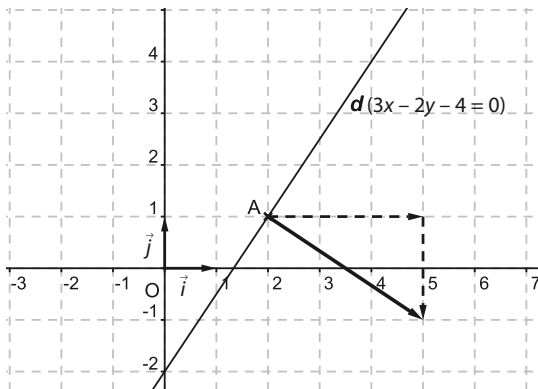
1 VARIABLES
2   xA EST_DU_TYPE NOMBRE
3   yA EST_DU_TYPE NOMBRE
4   xB EST_DU_TYPE NOMBRE
5   yB EST_DU_TYPE NOMBRE
6   xC EST_DU_TYPE NOMBRE
7   yC EST_DU_TYPE NOMBRE
8   xD EST_DU_TYPE NOMBRE
9   yD EST_DU_TYPE NOMBRE
10  a EST_DU_TYPE NOMBRE
11  b EST_DU_TYPE NOMBRE
12  c EST_DU_TYPE NOMBRE
13  d EST_DU_TYPE NOMBRE
14  p EST_DU_TYPE NOMBRE
15 DÉBUT_ALGORITHME
16   LIRE xA
17   LIRE yA
18   LIRE xB
19   LIRE yB
20   LIRE xC
21   LIRE yC
22   LIRE xD
23   LIRE yD
24   a PREND_LA_VALEUR xB-xA
25   b PREND_LA_VALEUR yB-yA
26   c PREND_LA_VALEUR xD-xC
27   d PREND_LA_VALEUR yD-yC
28   p PREND_LA_VALEUR a*c + b*d
29   SI (p=0) ALORS
30     DÉBUT_SI
31     AFFICHER «Les vecteurs sont
32     orthogonaux.»
33   FIN_SI
34   SINON
35     DÉBUT_SINON
36     AFFICHER «Les vecteurs ne sont pas
37     orthogonaux.»
38   FIN_SINON
39 FIN_ALGORITHME

```

3. Les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} ne sont pas orthogonaux.

DROITES ET PRODUIT SCALAIRE

68 a)



69 a) $\vec{u}(4; 2)$ est normal à Δ , donc Δ a une équation de la forme $4x + 2y + c = 0$.

$A \in \Delta$, donc $-8 + 2 + c = 0$ soit $c = 6$.

Donc Δ a pour équation $4x + 2y + 6 = 0$ ou $2x + y + 3 = 0$.

b) De même, on démontre que Δ a pour équation $x + 2y - 8 = 0$.

70 1. $\vec{CB}(4; -5)$ est un vecteur directeur de Δ_1 .

Une équation de Δ_1 est $5x + 4y + 14 = 0$.

2. Δ_2 a pour équation $4x - 5y + 3 = 0$.

71 a) $\vec{n}_1(1; -2)$ et $\vec{n}_2(6; 3)$ sont des vecteurs normaux respectivement à d_1 et d_2 .

Or $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, donc d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

b) $\vec{n}_1(2; 1)$ et $\vec{n}_2(1; -2)$.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, donc d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

c) $\vec{n}_1(1 + \sqrt{2}; -1)$ et $\vec{n}_2(\sqrt{2} - 1; 1)$.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ donc d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

72 a) Δ_1 a une équation de la forme $-3x + 2y + c = 0$.

$A \in \Delta_1$; donc $3 + 6 + c = 0$, soit $c = -9$.

Donc Δ_1 a pour équation $-3x + 2y - 9 = 0$.

Δ_2 a une équation de la forme $2x + 3y + c = 0$.

$A \in \Delta_2$; donc $-2 + 9 + c = 0$ soit $c = -7$.

Δ_2 a pour équation $2x + 3y - 7 = 0$.

b) Δ_1 a une équation de la forme $x - 2y + c = 0$.

Or $A \in \Delta_1$; donc $5 - 4 + c = 0$ et $c = -1$.

Δ_1 a pour équation $x - 2y - 1 = 0$.

De même, Δ_2 a pour équation $2x + y - 12 = 0$.

- 73** 1. a) Pour la copie ①, on ne projette pas sur \overrightarrow{AC} ou \overrightarrow{AF} .
 b) Pour la copie ②, le repère n'est pas orthonormé.
 2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$
 soit $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = -9 + 18 = 9$.

74 Corrigé dans le manuel.

- 75** 1. H est l'orthocentre du triangle AOB.
 2. $\overrightarrow{OH}(x; y)$, $\overrightarrow{AH}(x-2; y-1)$, $\overrightarrow{OB}(-1; 3)$, $\overrightarrow{AB}(-3; 2)$.
 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = -x + 2 + 3y - 3 = 0$ soit $-x + 3y = 1$.
 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = -3x + 2y = 0$.

Donc les coordonnées de H vérifient le système :

$$\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$$

3. H a pour coordonnées $\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

- 76** 1. $\overrightarrow{AC}(4; -6)$ et $\overrightarrow{AB}(-3; -6)$.

Les points M et N ont respectivement pour coordonnées $(4; y_1)$ et $(-3; y_2)$.

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 16 - 6y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{8}{3}$$

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 9 - 6y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = \frac{3}{2}$$

Donc M a pour coordonnées $\left(4; \frac{8}{3}\right)$ et $N\left(-3; \frac{3}{2}\right)$.

2. a) La droite (MN) a pour coefficient directeur

$$m = \frac{\frac{3}{2} - \frac{8}{3}}{-3 - 4} = \frac{-\frac{7}{6}}{-7} = \frac{1}{6}$$

Ainsi, (MN) a une équation de la forme $y = \frac{1}{6}x + p$.

Or : $M\left(4; \frac{8}{3}\right) \in (MN)$; donc : $\frac{8}{3} = \frac{2}{3} + p$ et $p = 2$.

Ainsi, (MN) a pour équation $y = \frac{1}{6}x + 2$.

- b) Il en résulte que H a pour coordonnées $(0; 2)$.

3. $\overrightarrow{BH}(3; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(4; -6)$, donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Conclusion : (AH) et (BH) sont deux hauteurs du triangle ABC, donc H est l'orthocentre.

77 Corrigé dans le manuel.

- 78** 1. $\overrightarrow{AB}(-4; -3)$; $AB = \sqrt{16 + 9} = 5$ donc $B \in \mathcal{C}$.

2. Le vecteur \overrightarrow{AB} est normal à la tangente T en B. Donc T a une équation de la forme $-4x - 3y + c = 0$.

Or : $B \in T$; donc : $4 + 6 + c = 0$ soit $c = -10$.

La tangente T a donc pour équation $4x + 3y + 10 = 0$.

AVEC LES TICE

- 79** 1. b) Il semble que la droite (MN) passe par $F(0; 1)$.

2. a) $M(m; m^2)$, $m \neq 0$, et $N(n; n^2)$, $n \neq 0$.

Donc : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = mn + m^2n^2 = 0$, soit $mn(1 + mn) = 0$,

donc $n = -\frac{1}{m}$. N a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{m}; \frac{1}{m^2}\right)$.

b) $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{1+m^2}{m}; \frac{(1+m^2)(1-m^2)}{m^2}\right)$ est colinéaire à $\vec{u}(-m; 1-m^2)$.

- c) (MN) a une équation de la forme $(1 - m^2)x + my + c = 0$.
 Or $M \in (MN)$, donc $m - m^3 + m^3 + c = 0$, soit $c = -m$.
 Ainsi, (MN) a pour équation : $(1 - m^2)x + my - m = 0$.
 Le point $F(0; 1)$ appartient à (MN).

- 80** 3. a) $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IM}$

car M se projette orthogonalement en O sur (IC).

De même : $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IM}$

car C se projette orthogonalement en H sur (IM).

$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IM}$ pour la même raison.

Enfin, le triangle IBM est rectangle en B, donc M se projette orthogonalement en B sur (IB) et $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IB}^2$.

- b) $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IB}^2 = 4$, donc $IC \times IO = 4$ et $IC = 1$.

Le point C a pour coordonnées $(0; 3)$.

ROC Restitution organisée de connaissances

- 81** 1. $BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$
 $= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$
 $= AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2. $AB^2 = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})^2$
 $= AH^2 + HB^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB}$ (1).

- $AC^2 = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})^2$
 $= AH^2 + HC^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$ (2).

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}).$$

Or $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

D'où le résultat.

Prendre toutes les initiatives

- 82** $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ND}$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$; donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ND}) \cdot (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= 0 - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{AN} - 0 \\ &= -\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AN} \times \overrightarrow{ND} = 0 \end{aligned}$$

(PC) et (MN) sont perpendiculaires.

- 83** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

• Si $M \in d$, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Donc : $M \in d \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.

• Réciproquement :

si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$, alors $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

soit $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ et M appartient à la perpendiculaire à (BC) passant par A.

Donc : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \Rightarrow M \in d$.

• D'où l'équivalence.

- 84** • $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$,

où \mathcal{C} est le cercle de diamètre [AB].

• Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$, alors $M \in d$, où d est la droite perpendiculaire en H à (AB) où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Or : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} < 0$;

donc H, A, B sont alignés dans cet ordre.

Ainsi, il n'existe aucun point M tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

85 1. Dans les deux cas, le point B se projette orthogonalement en H sur (AM), donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MH}$.

2. a) Si M est intérieur au cercle, \vec{MA} et \vec{MH} sont de sens contraires et leur produit scalaire est (strictement) négatif, donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} < 0$.

b) Si M est extérieur au cercle, \vec{MA} et \vec{MH} sont de même sens et leur produit scalaire est (strictement) positif, donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} > 0$.

3. a) Si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} > 0$, il résulte du **2. a)** que M n'est pas intérieur au cercle. Ainsi, M est extérieur au cercle.

b) De même, si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} < 0$, alors M est intérieur au cercle.

4.

```

1  VARIABLES
2  xA EST_DU_TYPE NOMBRE
3  yA EST_DU_TYPE NOMBRE
4  xB EST_DU_TYPE NOMBRE
5  yB EST_DU_TYPE NOMBRE
6  xM EST_DU_TYPE NOMBRE
7  yM EST_DU_TYPE NOMBRE
8  p EST_DU_TYPE NOMBRE
9  DEBUT_ALGORITHME
10 LIRE xA
11 LIRE yA
12 LIRE xB
13 LIRE yB
14 LIRE xM
15 LIRE yM
16 p PREND_LA_VALEUR (xM-xA)*(xM-xB)
   + (yM-yA)*(yM-yB)
17 SI(p==0) ALORS
18 DEBUT_SI
19 AFFICHER «M appartient au cercle de
   diamètre [AB]»
20 FIN_SI
21 SINON
22 DEBUT_SINON
23 SI (p>0) ALORS
24 DEBUT_SI
25 AFFICHER «M est extérieur au cercle
   de diamètre [AB]»
26 FIN_SI
27 SINON
28 DEBUT_SINON
29 AFFICHER «M est intérieur au
   cercle de diamètre [AB]»
30 FIN SINON
31 FIN SINON
32 FIN ALGORITHME

```

EXERCICES

Approfondissement (page 235)

86 I(0; y), $\vec{AB}(3; -2)$ et $\vec{IC}(3; 3 - y)$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{IC} = 0 \Leftrightarrow 9 - 6 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}.$$

87 1. a) $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{AC})$
 $= OA^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$$\text{car } \vec{OA} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{OA} = 0$$

soit $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 900 + 300 = 1200$.

b) $OB = \sqrt{900 + 225} = 15\sqrt{5}$ et $OC = \sqrt{900 + 400} = 10\sqrt{13}$;
donc $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 150\sqrt{65} \cos \alpha$.

2. $\cos \alpha = \frac{1200}{150\sqrt{65}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$, soit $\alpha \approx 7,1^\circ$.

88 1. On note K le projeté orthogonal de A sur [BC];

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{BK} = BC \times BK = 8.$$

2. $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BA} \cdot \vec{BH} = BA \times BH = 8$.

$$BH = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ et } HC = \sqrt{16 - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{16 \times 8}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

89 a) $\vec{HA} \cdot \vec{BJ} = \vec{HA} \cdot \vec{IK} = \vec{HA} \cdot \vec{CJ}$ (projection de \vec{BJ} et \vec{CJ} sur (AH)).

b) $\vec{HB} \cdot \vec{BC} = \vec{IB} \cdot \vec{BC} = -IB \times BC$.

90 1. $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$ car (AJ) \perp (BJ).

$$\vec{AI} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} \text{ car } \vec{AI} \text{ se projette en } \vec{AH} \text{ sur } (AB).$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AB} \text{ car } \vec{AC} \text{ se projette en } \vec{AH} \text{ sur } (AB).$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = AC^2 \text{ car } (BC) \perp (AC).$$

2. AC^2 est une constante donc $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$ est indépendant de d.

91 1. a) $\vec{AE} \cdot \vec{AG} = AE \times AG \times \cos \widehat{EAG}$
 $= AB \times AC \times \cos(\pi - \widehat{BAC})$
 $= -AB \times AC \cos(\widehat{BAC}) = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) $\vec{EC} \cdot \vec{BG} = (\vec{AC} - \vec{AE}) \cdot (\vec{AG} - \vec{AB})$
 $= \vec{AC} \cdot \vec{AG} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AE} \cdot \vec{AG} + \vec{AE} \cdot \vec{AB}$
 $= 0 - \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AE} \cdot \vec{AG} + 0$
 $= -\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ d'après **1. a)**.

Donc (EC) et (BG) sont perpendiculaires.

2. a) $\vec{EAC} = \vec{BAG}$ donc :

$$\vec{AE} \cdot \vec{AC} = AE \times AC \times \cos(\widehat{EAC})$$

$$= AB \times AG \times \cos \widehat{BAG} = \vec{AB} \cdot \vec{AG}.$$

$$EC^2 = (\vec{AC} - \vec{AE})^2 = AC^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AE} + AE^2$$

$$= AG^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AG} + AB^2$$

$$= (\vec{AG} - \vec{AB})^2 = BG^2, \text{ donc } EC = BG.$$

92 1. $\vec{AE} + \vec{AG} = \vec{AO} + \vec{OE} + \vec{AO} + \vec{OG} = 2\vec{AO}$

car $\vec{OE} + \vec{OG} = \vec{0}$.

2. a) $2\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 2\vec{AO} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$
 $= (\vec{AE} + \vec{AG}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$
 $= \vec{AE} \cdot \vec{AC} - \vec{AG} \cdot \vec{AB} = 0.$

Donc (AO) et (BC) sont deux droites perpendiculaires.

93 1. a) $\vec{AM} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \cdot \vec{AC}.$

$\vec{AH} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$ équivaut à A, H, C alignés dans cet ordre et

$AH \times a = \frac{a^2}{2}, AH = \frac{a}{2}.$

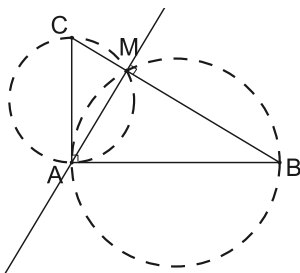
Donc M est un point de la médiatrice de [AC].

2. a) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$ équivaut à M appartient à la droite Δ perpendiculaire en A à (AB).

M est l'intersection de Δ et (BH).

b) Par symétrie orthogonale par rapport à (BH), les triangles BAM et BCM sont rectangles et les points B, A, C, M sont des points du cercle de diamètre [BM].

94 « $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$ » signifie que M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AB] et [AC], donc M est le projeté orthogonal de A sur [BC].



95 1. a) $\vec{n}(3; -4).$

b) \vec{AH} et \vec{n} sont colinéaires, donc il existe un réel k non nul tel que $\vec{AH} = k\vec{n}$.

c) $\vec{AH}(x-5; y-3)$ et $k\vec{n}(3k; -4k)$,
d'où $x = 5 + 3k$ et $y = 3 - 4k$.

2. a) $H \in d \Leftrightarrow 15 + 9k - 12 + 16k + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow 25k = -15$
 $\Leftrightarrow k = -\frac{3}{5}.$

b) \vec{AH} a pour coordonnées $(3k; -4k)$, soit $(-\frac{9}{5}; \frac{12}{5})$;
donc : $AH = \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3.$

96 1. $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \vec{AI} = AB \times AI = 4 \times 2 = 8.$

2. Si M se projette en H sur (AB), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = 8.$

Donc \vec{AB} et \vec{AH} sont colinéaires et de même sens, et $8 = AB \times HM$, soit $AH = 2$ et $H = I$.
M est donc un point de (OI).

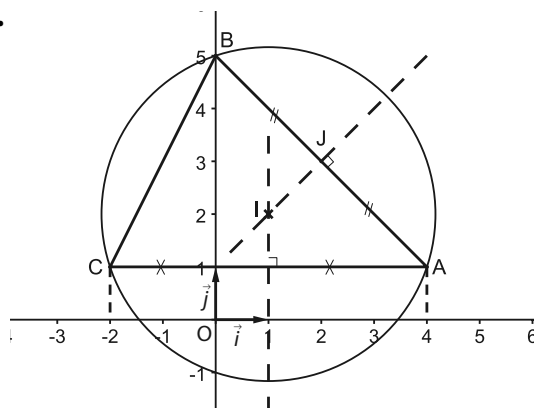
97 1. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB})$
 $= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA})$

donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - a^2.$

2. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16 \Leftrightarrow MI^2 - 4 = 16$
 $\Leftrightarrow MI = 2\sqrt{5}.$

Or : $IC = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$; donc « $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16$ » équivaut à «M est un point du cercle de centre I passant par C».

98 1.



2. I est un point de la médiatrice de [AC], donc l'abscisse de I est 1 et I a pour coordonnées (1; y).

Notons J le milieu de [AB]; J a pour coordonnées (2; 3).

$\vec{AB}(-4; 4), \vec{IJ}(1; 3 - y)$

et $\vec{AB} \cdot \vec{IJ} = 0$ soit $-4 + 12 - 4y = 0$ soit $y = 2.$

Donc I a pour coordonnées (1; 2).

$\vec{IA}(3; -1)$ donc $IA = \sqrt{10}$, c'est le rayon de \mathcal{C} .

99 1. $\vec{DI} \cdot \vec{AC} = (\vec{DA} + \vec{AI}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DC}) = -AD^2 + \vec{AI} \cdot \vec{DC}.$

Donc : $\vec{DI} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow -b^2 + a \times \frac{a}{2} = 0$

$\Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow a = b\sqrt{2}$ (car $a > 0$ et $b > 0$).

2. $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = \vec{AB} \cdot \vec{DM} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot (\vec{CM} - \vec{DM}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

$\Leftrightarrow (AB) \perp (CD).$

100 1. $\vec{AB} \cdot \vec{JK} = \vec{AB} \cdot \vec{JA} = \vec{AB} \cdot \vec{HA}$ [1].

$\vec{AC} \cdot \vec{JK} = \vec{AC} \cdot \vec{AK} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}$ [2].

2. $\vec{AC} \cdot \vec{JK} + \vec{AB} \cdot \vec{JK} = \vec{JK} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}).$

Or : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} + \vec{IC} = 2\vec{AI}$ car $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$;

donc : $\vec{AC} \cdot \vec{JK} + \vec{AB} \cdot \vec{JK} = 2\vec{AI} \cdot \vec{JK}$ [3].

Avec [1] et [2] :

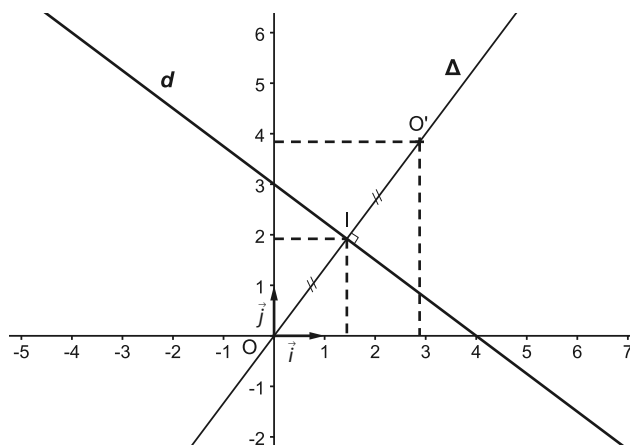
$\vec{AC} \cdot \vec{JK} + \vec{AB} \cdot \vec{JK} = \vec{AH}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$

donc d'après [3], $2\vec{AI} \cdot \vec{JK} = 0$, et les droites (AI) et (JK) sont perpendiculaires.

101 1. a) Voir figure ci-après.

b) Le vecteur $\vec{n}(-4; 3)$ est normal à Δ .

Donc Δ a pour équation $-4x + 3y = 0$ ou $y = \frac{4}{3}x$.



2. a) On résout $\frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}x + 3$, soit $\frac{25}{12}x = 3$ et $x = \frac{36}{25}$.

Le point I a pour coordonnées $(\frac{36}{25}; \frac{48}{25})$.

b) $x_o + x_{o'} = 2x_1$ et $y_o + y_{o'} = 2y_1$.

Donc O' a pour coordonnées $(\frac{72}{25}; \frac{96}{25})$.

102 1. a) $\overrightarrow{MA}(-1-x; 4-y)$ et $\overrightarrow{MB}(5-x; 2-y)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } MA^2 - MB^2 &= 1 + 2x + \cancel{y^2} + 16 - 8y + \cancel{y^2} - 25 + 10x - \cancel{y^2} \\ &\quad - 4 + 4y - \cancel{y^2} \\ &= 12x - 4y - 12. \end{aligned}$$

2. $MA^2 - MB^2 = 4$ équivaut à $3x - y - 4 = 0$.

De plus, $\overrightarrow{AB}(6; -2)$ est colinéaire à $\vec{n}(3; -1)$. L'ensemble des points M est donc une droite d perpendiculaire à (AB) .

103 1. a) $\overrightarrow{BC}(6; -2)$, donc $\vec{u}(3; -1)$ est un vecteur normal à d_1 , qui a donc une équation de la forme $3x - y + c = 0$.

Or : $A'(2; 0) \in d_1$; donc $6 + c = 0$, $c = -6$.

Ainsi, d_1 a pour équation $3x - y - 6 = 0$.

• $\overrightarrow{AC}(3; -4)$ est un vecteur normal à d_2 , qui a donc une équation de la forme $3x - 4y + c = 0$.

Or $B'(-1; 0) \in d_2$; donc $-3 + c = 0$, $c = 3$.

Ainsi, d_2 a pour équation $3x - 4y + 3 = 0$.

b) Le système $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 3x - 4y = -3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 3y = 9 \end{cases}$.

Donc I a pour coordonnées $(3; 3)$.

2. $\overrightarrow{AB}(-3; -2)$ et $\overrightarrow{CI}(-2; 3)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CI} = 0$; donc $I \in d_3$.

Conclusion : les trois droites sont concourantes.

104 Partie A

1. a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$;

l'ensemble des points M est la hauteur issue de A.

b) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$;

l'ensemble des points M est la médiatrice de $[BC]$.

c) \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AO} colinéaires;

l'ensemble des points M est la médiane issue de A.

Partie B

O a pour coordonnées $(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$.

1. $M(x; y)$; $\overrightarrow{AM}(x-5; y-4)$ et $\overrightarrow{BC}(-9; 3)$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ soit $-9x + 3y + 33 = 0$.

La hauteur a pour équation $3x - y - 11 = 0$.

• \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{OA} sont colinéaires, donc $\frac{11}{2}x - \frac{55}{2} - \frac{7}{2}y + \frac{28}{2} = 0$.

D'où une équation de la médiane issue de A :

$$11x - 7y - 27 = 0.$$

2. $\overrightarrow{OM}(x - \frac{3}{2}; y + \frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{BC}(-9; 3)$.

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ soit $-9x + \frac{27}{2} + 3y + \frac{9}{2} = 0$

soit $-9x + 3y + 18 = 0$.

Donc la médiatrice de $[BC]$ a pour équation $-3x + y + 6 = 0$.

PRENDRE TOUTES LES INITIATIVES

105 $ID = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $AC = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$;

donc $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} = 10\sqrt{13} \cos \theta$ [1].

$$\begin{aligned} \text{Or : } \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= -AD^2 + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -16 + 18 = 2 \quad [2]. \end{aligned}$$

De [1] et [2], on déduit : $\cos \theta = \frac{2}{10\sqrt{13}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}$,

ce qui donne $\theta = 86,8^\circ$ ou 1,52 radian.

106 Choisissons le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que

$\overrightarrow{OA} = 4\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = 6\vec{j}$. Dans ce repère :

$A(4; 0)$, $B(0; 6)$, $I(2; 3)$, $M_1(4; -4)$, $M_2(6; 6)$, $N(5; 1)$;

donc $\overrightarrow{IN}(3; -2)$ et $\overrightarrow{OI}(2; 3)$.

Il en résulte que :

$$\overrightarrow{IN} = \sqrt{13} = OI,$$

$\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IO} = 0$ donc (IN) et (OI) sont perpendiculaires.

Or, I est le centre du cercle circonscrit au triangle AOB.

Comme $OI = IN$, il en résulte que :

- I est un point du cercle circonscrit au triangle OAB ;

- OIN est un triangle rectangle isocèle.

A $\vec{BC}(1; -3)$ est un vecteur normal à la perpendiculaire Δ à (BC) passant par A;

donc Δ a une équation de la forme $x - 3y + c = 0$.

Or $A(4; 1) \in \Delta$; donc $c = -1$.

Δ a pour équation $x - 3y - 1 = 0$.

La droite (BC) a pour équation $-3x - y + 2 = 0$.

Notons H l'intersection de Δ et (BC);

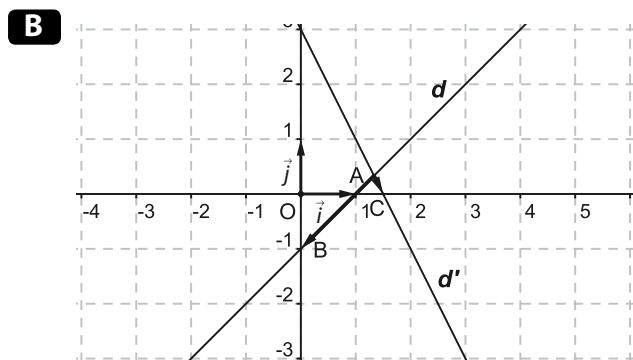
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 10x = 7 \\ 10y = -1 \end{cases}$$

d'où : $H\left(\frac{7}{10}; -\frac{1}{10}\right)$.

De plus, $x_A + x_H = 2x_H$ et $y_A + y_H = 2y_H$.

Soit $x_A = \frac{7}{5} - 4 = -\frac{13}{5}$ et $y_A = -\frac{1}{5} - 1 = -\frac{6}{5}$.

Donc $A\left(-\frac{13}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.



On détermine les coordonnées du point A, intersection des deux droites : $A\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

On considère les points $B(0; -1)$ et $C\left(\frac{3}{2}; 0\right)$;

$B \in d$ et $C \in d'$.

\vec{AB} et \vec{AC} sont deux vecteurs directeurs de d et d' respectivement, avec :

$$\vec{AB}\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) \text{ et } \vec{AC}\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\right)$$

Donc : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{2}{9}$.

Or : $AB = \frac{4}{3}\sqrt{2}$ et $AC = \frac{\sqrt{5}}{6}$;

donc : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{6} \times \cos \widehat{BAC}$.

Ainsi : $\frac{2\sqrt{10}}{9} \cos \widehat{BAC} = \frac{2}{9}$;

donc : $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, ce qui donne $\widehat{BAC} \approx 71,6^\circ$.

C La droite (BC) a pour équation $y = -\frac{2}{3}x$, et la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) a pour équation

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{4}$$

Ces droites se coupent en H de coordonnées $\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} AH \times BC$.

Or : $BC = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$;

$\vec{AH}(-4; -6)$, donc $AH = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$.

Ainsi, aire (ABC) = $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times 2\sqrt{13} = 26$.

D On choisit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{OA} = a\vec{i}$ et $\vec{OD} = b\vec{j}$. Dans ce repère :

$A(a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(0; a)$ et $D(0; b)$;

$\vec{OI}\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ et $\vec{BC}(-b; a)$, donc $\vec{OI} \cdot \vec{BC} = 0$.

Ainsi, (OI) et (BC) sont perpendiculaires.

E $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB})$
 $= AD^2 - AB^2 = 20$.

F Choisissons le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$. Dans ce repère :

$B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$, $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $M(k; 0)$ et $N(1; k)$;

$\vec{OM}\left(k - \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{ON}\left(\frac{1}{2}; k - \frac{1}{2}\right)$.

D'où : $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right) = 0$.

De plus : $OM = ON = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2}$.

Donc le triangle OMN est rectangle isocèle.

G 1. $MP^2 = (\vec{AP} - \vec{AM})^2 = AP^2 + AM^2 - 2\vec{AP} \cdot \vec{AM}$.
 $AP = a(1 - k)$ et $AM = ak$, donc $\vec{AP} \cdot \vec{AM} = a^2k(1 - k) \times \frac{1}{2}$
 et $MP^2 = a^2(1 - k)^2 + a^2k^2 - a^2k(1 - k)$
 $= a^2 - 2a^2k + a^2k^2 + a^2k^2 - a^2k + a^2k^2$
 $= a^2(3k^2 - 3k + 1)$.

2. En calculant de même MN^2 et NP^2 , on trouve que $MP = MN = NP$. Donc le triangle MNP est équilatéral.

H 1. Dans tout triangle :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AH} + \vec{HB}) \cdot (\vec{AH} + \vec{HC})$$

$$= AH^2 + \vec{HB} \cdot \vec{HC}$$

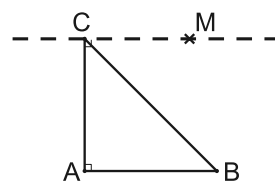
car $\vec{AH} \cdot \vec{HB} = \vec{AH} \cdot \vec{HC} = 0$.

2. ABC rectangle en A équivaut à $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

soit $\vec{HB} \cdot \vec{HC} = -AH^2$.

I $\vec{CB} \cdot \vec{CM} - \vec{AB} \cdot \vec{CM} = 0$
 équivaut à $\vec{CM} \cdot (\vec{CB} - \vec{AB}) = 0$
 soit $\vec{CM} \cdot \vec{CA} = 0$.

Donc l'ensemble des points M est la perpendiculaire en C à (AC).



J $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{OD} + \vec{DC})$
 $= \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \vec{AB} \cdot \vec{DC}$

car $\vec{OA} \cdot \vec{DC} = \vec{AB} \cdot \vec{OD} = 0$.

Donc : $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = -OA^2 + AB \times DC$, soit $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = ab - \frac{c^2}{4}$.